SEMESTRUL 1

Motto:

"Adevărul matematic, indiferent unde, la Paris sau Toulouse, este unul şi acelaşi"

Blaise Pascal

I. NUMERE NATURALE

A.I. OPERAŢII CU NUMERE NATURALE

A.I.1. SCRIEREA ŞI CITIREA NUMERELOR NATURALE

În viaţa de zi cu zi se foloseşte ***sistemul de numeraţie zecimal***, care utilizează următoarele 10 simboluri, numite ***cifre arabe***: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Sistemul se numeşte zecimal, deoarece:

- Zece unităţi formează o zece;
- Zece zeci formează o sută;
- Zece sute formează o mie.

Pentru citirea numerelor se formează grupe de câte trei cifre de la dreapta la stânga având clasa unităţilor, clasa miilor, clasa milioanelor, clasa miliardelor, etc.

Exemplu:

Pentru numărul 987643789238, pe care-l grupăm de la dreapta la stânga, avem:

Gruparea pe clase:

987.643.789.238, avem:

238 – clasa unităţilor;
789 – clasa miilor;
643 – clasa milioanelor;
987 – clasa miliardelor.

Citim: nouă sute optzeci şi şapte miliarde şase sute patruzeci şi trei milioane şapte sute optzeci şi nouă mii două sute treizeci şi opt.

Din numărul 987.643.789.238:

238 – cifra 8 indică 8 unităţi;
- cifra 3 indică 3 zeci;
- cifra 2 indică 2 sute .

789 - cifra 9 indică 9 mii;
- cifra 8 indică 8 zeci mii;
- cifra 7 indică 7 sute mii;

643 - cifra 3 indică 3 milioane;
- cifra 4 indică 40 zeci milioane;
- cifra 6 indică 6 sute milioane.

987 - cifra 7 indică 7 miliarde;
- cifra 8 indică 8 zeci miliarde;
- cifra 9 indică 9 sute miliarde.

Tabelul A.I.1. Sinteza rezultatelor exemplului

987.643.789.238											
987			643			789			238		
clasa miliardelor			clasa milioanelor			clasa miilor			clasa unităţilor		
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U
9	8	7	6	4	3	7	8	9	2	3	8

Scrierea utilizată şi sintetizată în tabel este o ***scriere poziţională***, deoarece valoarea indicată de o cifră depinde de poziţia sa în număr.

În afara scrierii poziţionale, romanii au folosit ***scrierea adiţională***, cu ***cifre romane***, introducând astfel şapte simboluri, prezentate în *tabelul A.I.2*.

Tabelul A.I.2. Simboluri ale cifrelor romane

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	**5**	**10**	**50**	**100**	**500**	**1000**

Regulile utilizate în citirea şi scrierea cifrelor romane sunt:

1. O cifră cu o valoare mai mică scrisă la dreapta uneia cu o valoare mai mare indică o sumă.

Exemplu: V I = V + I , adică: 5+1 = 6.

2. Cifrele I, X, C, M pot fi scrise consecutiv de cel mult trei ori.

Exemple: XXX → 30; MCCC → 1300.

3. Nu se pot repeta consecutiv cifrele V, L, D.
4. O cifră cu o valoare mai mică scrisă la stânga uneia cu o valoare mai mare indică o scădere.

Exemple: I V = V – I, , adică: 5-1 = 4.
LC = C - L, adică: 100 -50 = 50.

5. Nu se poate scădea mai mult de o cifră.

Exemplu: IL = L – I, adică: 49 = 50-1.
XLVII = L - X + V +I + I , adică 47 = 50 – 10 + 5 +1 +1.

6. Cifrele V, L, D nu se pot scădea.
7. Orice cifră sau grup de cifre subliniată superior cu o linie se consideră multiplicată de 1000 de ori.

Exemplu: $\overline{XL}$ → 40 000

A.I.2. ŞIRUL NUMERELOR NATURALE

Şirul numerelor naturale este format din toate numerele naturale scrise în ordine crescătoare: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ….

Numere naturale pare

Forma generală a unui număr par este $2 \cdot k$, unde k este număr natural.

Exemple: pentru k = 5, rezultă $2 \cdot 5 = 10$;

pentru k = 10, rezultă $2 \cdot 10 = 20$.

Numerele pare au ultima cifră: 0, 2, 4, 6, 8 .

Numerele pare sunt divizibile cu 2, adică se împart exact la 2.

Exerciţiu: Să se scrie numerele naturale pare cuprinse între 2n şi 2n+4 inclusiv.

Rezolvare:

2n = $\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$, pentru n = $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

2n + 4 = $\{4,6,8,10,12,14,16,18,20,22\}$, pentru n = $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Să se scrie numerele naturale pare cuprinse între 2n şi 2n+4 inclusiv sunt: $\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22\}$.

Numere naturale impare

Forma generală a unui număr impar este $2 \cdot k + 1$, unde k este număr natural.

Exemple: pentru k = 5, rezultă $2 \cdot 5 + 1 = 11$;

pentru k = 10, rezultă $2 \cdot 10 + 1 = 21$.

Numerele impare au ultima cifră: 1, 3, 5, 7, 9 .

Numerele impare NU sunt divizibile cu 2, adică NU se împart exact la 2, împărţirea la 2 dând restul 1.

Exerciţiu: Să se scrie numerele naturale impare cuprinse între 2n şi 2n+4 inclusiv, pentru n = 5.

Rezolvare: 2n = 10 şi 2n+4 = 14. Numerele impare cuprinse între 10 şi 14 sunt: 11 şi 13.

Numere naturale consecutive

Numerele naturale consecutive sunt numere de forma, n şi n+1, pentru n număr natural.

Exemplu: pentru n = 5, rezultă n+1 = 5+1 = 6, deci numerele 5 şi 6 sunt considerate numere naturale consecutive.

Exerciţiu: Să se găsească trei numere naturale consecutive ştiind că suma lor este 303.

Rezolvare: 303: 3 = 101, unul dintre numere, rezultă numerele: 100, 101, 102.

Exerciţiu: Să se găsească 4 numere consecutive a căror sumă este 30.

Fie a , b, c şi d cele 4 numere. Dacă sunt consecutive, rezultă:

b = a +1

c = b +1 = a +1+1= a+2

d = c +1 = a +2+1 = a +3

Rezultă: a + b +c +d = 30, adică

a + a +1 + a + 2 + a +3 = 30

4a + 6 = 30

4a = 30 – 6

4a = 24

a = 24:4

a = 6

Deci: a = 6, b = a +1 = 7, c = a+2 = 8, d = a+3 = 9.

A.I.3. APROXIMĂRI ŞI ROTUNJIRI

Uneori nu este importantă stabilirea cu exactitate a tuturor cifrelor unui număr. Atunci se folosesc ***aproximări ale numerelor prin lipsă sau adaos***.
Ele se pot face la zeci, sute, mii, etc.

Aproximarea care se face la numărul cel mai apropiat se numeşte ***rotunjire***.

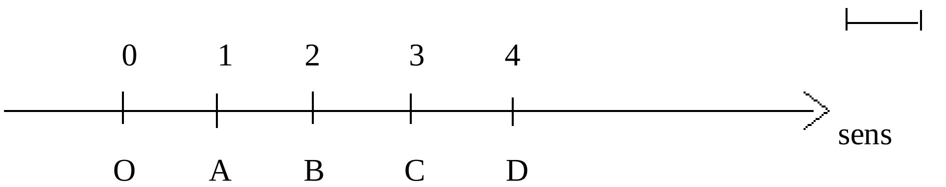
Dacă ambele aproximări prin lipsă şi adaos sunt la fel de apropiate de valoarea numărului, atunci rotunjirea se consideră aproximare prin adaos.

Tabelul A.I.3. Exemple

Număr	**Ordinul la care se face aproximarea**	**Aproximarea prin lipsă**	**Aproximarea prin adaos**	**Numărul aproximat**	**Numărul rotunjit**
844	zeci	840	850	840	840
1.387	sute	1300	1400	1400	1400
23.456	mii	23000	24000	23000	23000
789.653	zeci de mii	780.000	790.000	790.000	790.000
1.345.678	sute de mii	1.300.000	1.400.00	1.300.000	1.300.000
12.456.239	milioane	12.000.000	13.000.000	12.000.000	12.000.000
134.678.235	zeci de milioane	130.000.000	140.000.000	130.000.000	130.000.000
1.879.345.239	sute de milioane	1.800.000.000	1.900.000.000	1.900.000.000	1.900.000.000
1.879.345.239	miliarde	1.000.000.000	2.000.000.000	2.000.000.000	2.000.000.000

A.I.4. REPREZENTAREA NUMERELOR NATURALE PE AXĂ

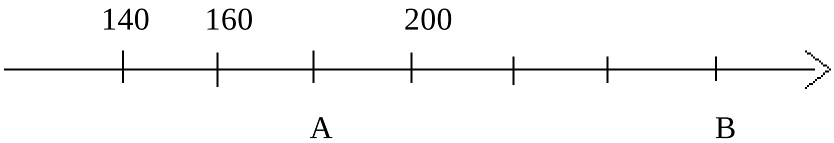
Axa unui număr este o dreaptă care este caracterizată de origine, sens şi unitate de măsură.
u.m.= 1cm



Lungimea segmentului OA se numeşte ***unitate de măsură***.

Coordonata unui punct ne indică câte unităţi de măsură sunt din origine până în punctul respectiv, adică: O (0); A (1); B (2); C (3); D (4).

Exerciţiu: Să se stabilească unitatea de măsură şi coordonatele punctelor A şi B de pe axa de mai jos.



Rezolvare: Se poate observa că u.m. = 20, iar coordonatele sunt:
Lui A îi corespunde 180, deci avem 180:20=9, A (9);
Lui B îi corespunde 260, deci avem 260:20=13, B (13).

A.I.5. COMPARAREA ŞI ORDONAREA NUMERELOR

Fiind date două numere naturale oarecare, a şi b, atunci una din afirmaţii poate fi adevărată:
a = b (a este egal cu b); a < b (a este mai mic decât b); a > b (a este mai mare decât b).

Proprietăţi ale egalităţii: **reflexivitatea: a = a**
simetria: dacă a = b, atunci şi b = a **tranzitivitatea: dacă a = b, b = c atunci şi a = c.**

A.I.6. ADUNAREA NUMERELOR NATURALE

Suma a două numere naturale a şi b, notată a + b este un număr natural unic, c . În cadrul sumei, a şi b se numesc ***termeni***. Operaţia prin care se obţine suma a două numere se numeşte ***ADUNARE***.

a + b = c , a, b, c numere naturale.

Tabelul A.I.4. Operaţia de adunare

termen	plus	termen	egal	sumă
a	**+**	**b**	**=**	**c**

Adunarea are următoarele ***proprietăţi***:

- ***Asociativitate***, adică oricare ar fi a, b, c numere naturale, atunci:
  (a + b) + c = a + (b+ c).
- ***Elementul neutru*** este numărul 0, adică pentru oricare număr natural a, avem:
  a + 0 = 0 + a = a .
- ***Comutativitate***, adică oricare ar fi a, b numere naturale, atunci:
  a + b= b + a .

Mai există ***proprietăţi suplimentare*** legate de adunarea numerelor naturale, relaţia de egalitate "=" şi relaţia de ordine " $\leq$", acestea fiind:

- Dacă a = b, atunci a + c = b + c ;
- Dacă a $\leq$ b, atunci a + c$\leq$ b + c ;
- Dacă a $\leq$ b şi c $\leq$ d, atunci a + c$\leq$ b + d .

Suma Gauss: $1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Exerciţii: Să se calculeze:

a) $1+2+3+...+99+100=\frac{100(100+1)}{2}=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$

b) $1+3+5+...+95+97+99$

Rezolvare: Notez cu S suma dată.

$S=1+3+5+...+95+97+99$

$S=99+97+95...+5+3+1$

Adunăm cele 2 relaţii astfel:

$2\cdot S=(1+99)+(3+97)+(5+95)+...+(95+5)+(97+3)+(99+1)$

$2\cdot S=100\cdot 50$

Se observă că a trebuit să calculăm suma tuturor numerelor impare până la 100, deci numărul total al acestor numere este 50.

$S=100\cdot 50:2=5000:2=2500$

c) $3+7+11+...+35+39+43$

Rezolvare: Notez cu S suma dată.

$S=3+7+11+...+35+39+43$

$S=43+39+35+...+11+7+3$

$2\cdot S=46\cdot 11$

$S=46\cdot 11:2=253$

A.I.7. SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE

Oricare ar fi două numere naturale a şi b, a $\geq$ b, există c, număr natural unic, numit diferenţă şi notat a – b; a şi b se numesc termenii diferenţei: a se numeşte **descăzut**, iar b ***scăzător***.

Operaţia prin care se obţine diferenţa a două numere naturale se numeşte ***SCĂDERE***.

a - b = c , a, b, c numere naturale.

Tabelul A.I.5. Operaţia de scădere

descăzut	minus	scăzător	egal	diferenţă
a	**-**	**b**	**=**	**c**

Observaţii:

- Diferenţa a – b are sens, numai dacă a $\geq$ b, a, b numere naturale;
- Scăderea nu este asociativă, comutativă şi nu are element neutru;
- Au loc următoarele proprietăţi:

a - (b+ c) = (a - b) - c
a - (b- c) = (a - b) + c
a -0 = a
Dacă a = b, atunci a – c = b –c.
Dacă a < b, atunci a – c < b - c

- În egalitatea a – b = c se poate pune în evidenţă fiecare termen al diferenţei:

a = b + c, b = a – c.

Adunarea şi scăderea sunt considerate operaţii de ordinul I.

Reguli:

1. ***În operaţiile în care apar numai operaţii de acelaşi ordin, acestea se efectuează de la stânga la dreapta.***

Exemplu:
8 – 5 – 2 = 3 – 2 = 1 (corect)
8 – 5 – 2 = 8 – 3 = 5 (greşit)

2. În calcule se folosesc paranteze rotunde, drepte şi acolade. ***Ordinea de efectuare a calculului este: parantezele rotunde, apoi parantezele drepte, apoi acoladele***. După terminarea calculelor din parantezele rotunde acestea se desfiinţează, cele drepte se transformă în rotunde, acoladele în paranteze drepte şi tot aşa.

Exemplu:

$$5+\{12-[18-(7+4-3)]+2\}=5+\{12-[18-(11-3)]+2\}=5+[12-(18-8)+2]=$$
$$=5+(12-10+2)=5+4=9$$

3. ***Eliminarea parantezelor***

Parantezele precedate de semnul + se pot elimina scriind termenii din paranteze cu semnul lor.

Exemplu:
3 + (4-2) = 3 + 4 – 2 = 7 – 2 = 5

Parantezele precedate de semnul **-** se pot elimina scriind termenii din paranteze cu semn schimbat.

Exemplu:
8 - (4-2) = 8 - 4 + 2 = 4 + 2 = 6

A.I.8. ÎNMULŢIREA NUMERELOR NATURALE

Oricare ar fi două numere naturale a şi b există un c, număr natural unic, numit produsul numerelor a şi b şi notat $a \cdot b$; a şi b se numesc ***factorii produsului***. Operaţia prin care se obţine produsul a două numere se numeşte ***înmulţirea numerelor naturale***.

$\mathbf{a \cdot b = c}$, a, b, c numere naturale.

Tabelul A.I.6. Operaţia de înmulţire

factor	ori	factor	egal	înmulţire
a	·	**b**	=	**c**

Înmulţirea are următoarele ***proprietăţi***:

- ***Asociativitate***, adică oricare ar fi a, b, c numere naturale, atunci:
  $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$
- ***Elementul neutru*** este numărul 1, adică pentru oricare număr natural a, avem:
  $$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a .$$
- ***Comutativitate***, adică oricare ar fi a, b numere naturale, atunci:
  $$a \cdot b = b \cdot a .$$
- ***Distributivitatea***, faţă de adunare şi scădere, adică oricare ar fi a, b, c numere naturale, atunci:
  $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
  $$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$
- Oricare ar fi numărul natural a, atunci:
  $$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 .$$

Mai există ***proprietăţi suplimentare*** legate de înmulţirea numerelor naturale, relaţia de egalitate “=” şi relaţia de ordine “$\leq$”, acestea fiind:

- Dacă a = b, atunci $a \cdot c = b \cdot c$;
- Dacă $a \leq b$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot c$;
- Dacă $a \leq b$ şi $c \leq d$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot d$.

Factorul comun

Având în vedere proprietăţile de la distributivitate, a se numeşte factor comun, adică:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$; $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$

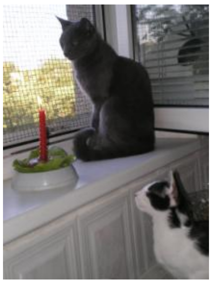
oricare ar fi a, b, c numere naturale, atunci:

Exemplu:

3755 · 26 + **3755** · 75 **-** **3755** · 100 = 3755 · (26 + 75 – 100) = 3755 · (101 – 100) = 3755

Exerciţiu: Ştiind că a + b = 25 şi a·c + b·c = 50, să se calculeze c.

$c \cdot (a + b) = 50 \Rightarrow 25 \cdot c = 50 \Rightarrow c = 2$



A.I.9. ÎMPĂRŢIREA NUMERELOR NATURALE

Operaţia prin care se obţine câtul a două numere se numeşte ***ÎMPĂRŢIRE***.
Teorema împărţirii cu rest: Oricare ar fi două numere naturale a şi b**,** b ≠ 0, există numerele naturale q şi r, ***unic determinate***, astfel încât

$$\mathbf{a = b \cdot q + r \text{ şi } r < b,}$$

q este câtul şi ***r este restul*** împărţirii lui a la b.
Dacă restul împărţirii lui a la b este 0, spunem că a se împarte exact la b şi notăm: **a : b = q** .
a se numeşte deîmpărţit, iar b împărţitor şi atunci **a = b · q şi a : q = b .**

Tabelul A.I.7. Operaţia de împărţire

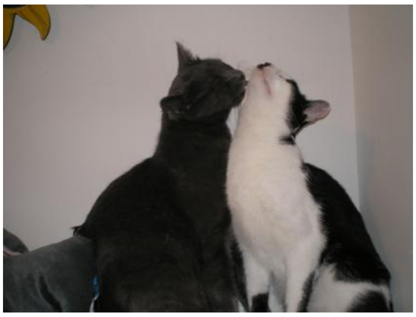
deîmpărţit	**împărţit**	**împărţitor**	**egal**	**cât**	**rest**
a	**:**	**b**	**=**	**q**	**r**
2231	:	23	=	97	0
2214	:	130	=	17	4

Observaţii:
- Împărţirea la 0 nu are sens;
- 0 : b = 0, oricare ar fi b număr natural diferit de zero;
- (a + b) : c = a:c + b:c, oricare ar fi a, b, c numere naturale;
- (a - b) : c = a:c - b:c, oricare ar fi a, b, c numere naturale;
- Dacă a şi b se împart exact la c şi a $\le$ b, atunci a:c $\le$ b:c;
- Împărţirea nu este asociativă, nici comutativă şi nu are element neutru.

Înmulţirea şi împărţirea sunt considerate operaţii de ordinul II.
Reguli:
1. ***În operaţiile în care apar numai operaţii de acelaşi ordin, acestea se efectuează de la stânga la dreapta.***
Exemplu:
8 : 2 · 2 = 4 · 2 = 8 (corect)
8 : 2 · 2 = 8 : 4 = 2 (greşit)

2. ***Ordinea de efectuare a calculului este: parantezele rotunde, apoi parantezele drepte, apoi acoladele***.

3. ***În expresiile fără paranteze se efectuează mai întâi operaţiile de ordin superior*** *(se începe cu cele de ordin III – ridicarea la putere, extragerea rădăcinii, apoi cu cele de ordin II – înmulţirea şi împărţirea, apoi cu cele de ordin I – adunarea şi scăderea).*
Exemplu:
63450 : 45+108 · 21 = 1410 + 2268 = 3678



A.I.10. PUTERI

Puterea unui număr natural

Fie a un număr natural, $a \neq 0$.
Puterea zero a numărului natural a este: $a^0 = 1$.
Exemple: $1000^0 = 1$; $2^x = 3^x \Rightarrow x = 0$
Puterea unu a numărului natural a este: $a^1 = a$.
Dacă $a \geq 2$, atunci $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a$, adică produsul în care “a” apare factor de n ori.
În expresia a^n , ***a este bază***, iar ***n este exponentul ei***.

Observaţie:
Nu are sens 0^0.

Ridicarea la putere

Operaţia prin care se obţine puterea unui număr natural se numeşte ***RIDICARE LA PUTERE.***

Ridicarea la putere este operaţie de ordinul III.

Reguli:

1. ***Ordinea de efectuare a calculului este: parantezele rotunde, apoi parantezele drepte, apoi acoladele***.

2. ***În expresiile fără paranteze se efectuează mai întâi operaţiile de ordin superior*** *(se începe cu cele de ordin III – ridicarea la putere, apoi cu cele de ordin II – înmulţirea şi împărţirea, apoi cu cele de ordin I – adunarea şi scăderea).*

3. ***Numărul de zerouri cu care se termină un număr este dat de puterea lui 10.***

Reguli de calcul cu puteri

- Oricare ar fi numerele naturale a, m şi n, $a \neq 0$, atunci:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Exemplu: $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^{2005} = 5^{2+3+2005} = 5^{2010}$; $(2^7)^8 = 2^{7 \cdot 8} = 2^{56}$

- Dacă $m \geq n$, atunci: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Exemplu: $7^{20} : 7^{13} = 7^{20-13} = 7^7$

- Oricare ar fi numerele naturale a, b şi n, $a \neq 0$, $b \neq 0$, atunci: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Exemplu: $2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$

- Dacă a se împarte exact la b, atunci: $(a : b)^n = a^n : b^n$

Exemplu: $4^7 : 2^7 = (4 : 2)^7 = 2^7$

Pătratul şi cubul unui număr natural

Puterea a doua a unui număr natural n, adică $\mathbf{n^2}$ se numeşte ***pătratul numărului n***. Astfel, $\mathbf{n^2}$ se citeşte „*n la a doua*” sau „*n la pătrat*”.

Puterea a treia a unui număr natural n, adică $\mathbf{n^3}$ se numeşte ***cubul numărului n***. Astfel, $\mathbf{n^3}$ se citeşte „*n la a treia*” sau „*n la cub*”.

Un ***pătrat perfect*** este pătratul unui număr natural.

Tabelul A.I.8. Valorile lui x^2 şi U (x^2)

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\mathbf{x^2}$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
U ($\mathbf{x^2}$)	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

U (x^2) este ultima cifră a unui pătrat perfect, iar ea **poate** fi: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Prin urmare orice număr care are ultima cifră diferită de 0, 1, 4, 5, 6, 9, adică ***2, 3, 7, 8 NU ESTE PĂTRAT PERFECT.***

Un număr natural ***NU ESTE PĂTRAT PERFECT*** dacă e încadrat între două numere naturale pătrate perfecte consecutive.

Pentru a afla ultima cifră (U) a unui număr vom ţine cont de:

U (x + y) = U (U (x) + U(y))

Exemplu: U (68+85) =U (U(68) + U(85)) = U (8 + 5) = U (13) = 3

U (x · y) = U (U (x) ·U(y))

Exemplu: U (97 · 83) = U (U(97) ·U(83)) = U(7·3) = U (21) = 1

U ($\mathbf{x^n}$) = U [(U (x))$^{\mathbf{n}}$]

Exemple:

- U (36^{59}) = U (6^{59}) = 6. Se observă din tabelul de mai jos că 6 ridicat la orice putere are ultima cifră 6.
- U (23^{1992}) = U (3^{1992}) = 1.

Se observă din tabelul de mai jos că de la 3^5 ultima cifră se repetă la puterile lui 3. Până acolo însă avem 4 cifre posibile ca fiind ultimele. Deci 1992: 4 = 498, rest = 0. Deci, dacă restul e 0, atunci ultima cifră a numărului 3^{1992} va fi dată de ultima cifră a lui 3^4 = 81, adică 1.

- U (19^{257}) = U (9^{257}) = 9.

Observăm că de la puterea a treia a lui 9, ultima cifră se repetă, prin urmare:
257:2= 128, rest = 1. Deci, ultima cifră este dată de 9^1 = 9.

Tabelul A9. Ciclul puterilor

$0^1 = 0$	$1^1 = 1$	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$5^1 = 5$	$6^1 = 6$	$7^1 = 7$	$8^1 = 8$	$9^1 = 9$
$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$
		$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$			$7^3 = 343$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$
		$2^4 = 16$	$3^4 = 81$				$7^4 = 2401$	$8^4 = 4096$	
		$2^5 = 32$	$3^5 = 243$				$7^5 = 16807$	$8^5 = 32768$	

Exerciţii:

1. Precizaţi care din numerele de mai jos sunt sau nu pătrate/cuburi perfecte:

a) $4^{17}\cdot 9^{23}=\left(2^2\right)^{17}\cdot\left(3^2\right)^{23}=(2)^{2\cdot 17}\cdot(3)^{2\cdot 23}=\left(2^{17}\right)^2\cdot\left(3^{23}\right)^2=\left(2^{17}\cdot 3^{23}\right)^2$

rezultă că $4^{17}\cdot 9^{23}$ este pătrat perfect.

b) $5^{34}+5^{17}=\left(5^{17}\right)^2+5^{17}=5^{17}\cdot\left(5^{17}+1\right)$ - nu este pătrat perfect

c) $2^n\cdot 3^{n+1}+2^{n+1}\cdot 3^n=2^n\cdot 3^n\cdot 3+2^n\cdot 2\cdot 3^n=2^n\cdot 3^n\cdot(3+2)=5\cdot 2^n\cdot 3^n$ - nu este pătrat perfect

d) $$2009+2\cdot(1+2+3+...+2008)=2009+2\cdot 2008\cdot 2009:2=2009+2008\cdot 2009=$$
$$=2009\cdot(1+2008)=2009^2$$

este pătrat perfect.

e) $8^3<512<576<729<9^3$, 576 nu este cub perfect.

f) 1998^{1999}

Calculăm să vedem care este ultima cifră a numărului dat.

$U(1998^{1999})=U(8^{1999})=U(8^3)=2$

1999 : 4 = 499, rest = 3. (se observă din *tabelul A9* că ciclul puterilor lui 8 se repetă la 4).

Rezultă că ultima cifră este dată de $8^3=512$, adică este 2.

Orice număr care are ultima cifră 2 nu este pătrat perfect.

2. Pot construi un pătrat folosind 28 de pătrate mici identice?

Un pătrat se poate construi dintr-un număr care este pătrat perfect de pătrate mai mici identice. Numărul 28 nu este pătrat perfect, deoarece $5^2=25<28<36=6^2$. Răspuns: NU.

3. Pot construi un cub folosind 27 de cuburi mici identice?

Un cub se poate construi dintr-un număr care este cub perfect de cuburi mai mici identice. Numărul 27 este cub perfect, deoarece $27=3^3$. Răspuns: DA.

Compararea puterilor

- Dacă puterile nu au aceeaşi bază şi nici acelaşi exponent, dar le putem calcula, deoarece sunt numere mici, le calculăm şi facem comparaţia.

Exemplu: Să se compare numerele: 2^3 şi 3^4.

$2^3=8$

$3^4=81$

Rezultă: $3^4>2^3$.

- Dacă puterile au aceeaşi bază diferită de 0 şi 1, atunci e mai mare numărul cu exponentul mai mare.

Exemplu: Să se compare numerele: 2^3 şi 2^4.

Rezultă: $2^4>2^3$.

- Dacă puterile au acelaşi exponent diferit de zero, atunci e mai mare puterea care ara baza mai mare.

Exemplu: Să se compare numerele: 9^3 şi 10^3.

Rezultă: $10^3>9^3$.

A.I.11. MEDIA ARITMETICĂ A DOUĂ SAU MAI MULTE NUMERE

Fie a şi b două numere naturale. ***Media aritmetică*** este numărul care se obţine împărţind la 2 suma lor:

$$m_a = \frac{a+b}{2}$$

Exemplu: Media aritmetică a numerelor 6 şi 14 este: $m_a = \frac{6+14}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

Fie $a_1, a_2, ..., a_n$, n numere naturale. Media lor aritmetică este numărul care se obţine împărţind la n suma lor, adică:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Observaţii:

- Media aritmetică a n numere naturale este mai mare decât cel mai mic dintre numere şi este mai mică decât cel mai mare dintre numere.

  Dacă numerele se repetă, atunci formula mediei aritmetice devine,

$$M_{ap} = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + ... + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

numită ***Media aritmetică ponderată***,

unde: $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt naturale,

$p_1, p_2, ..., p_n$ sunt ponderile numerelor, adică de câte ori se repetă numerele.

Exerciţii:

1. Fabian are la matematică următoarele note: 7, 8, 8, 9. Care este media aritmetică a lui Fabian?

Rezolvare:

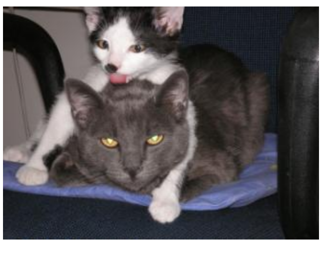
$$m_a = \frac{7+8+8+9}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

2. Media aritmetică a două numere este 20. Ştiind că unul este triplul celuilalt să se găsească numerele.

Rezolvare:

Fie a şi b cele două numere naturale. Rezultă că $m_a = \frac{a+b}{2} = 20$, adică a + b = 40.

Consider că b = 3 · a, rezultă că a + 3 · a = 40, deci 4 · a = 40, rezultă a = 10 şi b = 3 · 10 = 30.



A.I.12. ISTORIA EVOLUŢIEI SISTEMELOR DE SCRIERE A NUMERELOR. BAZE DE NUMERAŢIE

Numerele se scriu cu ajutorul unor simboluri (semne grafice). Acestea au fost diferite în Antichitate de la un popor la altul.

Exemplu: Pentru numărul 10, egiptenii au folosit simbolul "$\cap$", babilonienii au folosit simbolul "<", iar romanii simbolul "X".

După felul de ordonare şi grupare a simbolurilor folosite, se poate vorbi de două ***moduri de scriere a numerelor***:

- Scrierea nepoziţională – ex : scrierea cu simboluri romane;
- Scrierea poziţională – ex : scrierea cu simboluri arabe.

Numărarea elementelor unei mulţimi se poate face şi ea în mai multe moduri; aceasta a dat naştere la diferite ***sisteme de numeraţie.***

Numărul de simboluri necesar pentru scrierea poziţională a cardinalului mulţimilor finite se numeşte ***baza sistemului de numeraţie***.

Numeraţia în baza 10

Numărarea elementelor unei mulţimi finite se face prin gruparea şi regruparea elementelor în grupe de câte 10.

Scrierea cardinalului elementelor mulţimilor finite necesită folosirea a zece simboluri diferite, deci baza sistemului de numeraţie este 10.Aceste simboluri sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 şi sunt numite cifre arabe.

Exemplu: Dacă o mulţime are cardinalul 529, înţelegem că elementele mulţimii se pot grupa astfel :

- 5 grupe de câte 10 grupe, fiecare din cele zece grupe având 10 elemente;
- 2 grupe de câte 10 elemente;
- 9 elemente.

Descompunerea în baza 10 a numărului 529 este: $529 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 9$.

În acest sistem de numeraţie, 10 elemente (unităţi) formează o grupă numită **zece**; 10 grupe formează o nouă grupă numită **sută**; 10 grupe de o sută formează o nouă grupă numită **mie**, etc.

Observaţie: Numeraţia în baza 10 se pare că a fost inventată de indieni şi preluată de europeni datorită arabilor. Originea numeraţiei în baza 10 este foarte probabil să fie cele 10 degete de la cele 2 mâini ale omului.

Exemplu: Un număr natural de 5 cifre, a, b, c, d, e (a≠0) se scrie în baza 10, astfel:

$$\overline{abcde} = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0 = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$$

Trecerea unui număr din baza "b" în baza 10

$$\overline{XYZT}_{(b)} = X \cdot b^3 + Y \cdot b^2 + Z \cdot b^1 + T \cdot b^0$$

Exemplu: $2301_{(6)} = 2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 = 2 \cdot 216 + 3 \cdot 36 + 1 = 541_{(10)}$

Observaţie: Dacă se doreşte ordonarea unor numere aflate în baze diferite, soluţia cea mai convenabilă este de a aduce toate numerele date în aceeaşi bază. (exerciţii recapitulative)

Trecerea unui număr din baza 10 în altă bază "b" (exerciţii recapitulative)

- se face prin împărţiri succesive la baza "b"; împărţirile se fac până obţinem ultimul rest nenul.
- resturile obţinute se scriu în ordinea inversă obţinerii lor.
- se face verificarea trecând numărul în baza 10.

Observaţie: Baza de numeraţie trebuie să fie mai mare decât numerele utilizate.

B.I. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR

B.I.1. DIVIZOR, MULTIPLU

Un număr natural ***b este divizor al unui număr natural a***, dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. Se mai spune că ***a este multiplu al lui b*** .
Notăm **b | a** şi se citeşte ***b divide pe a*** sau ***b este divizor al lui a*** .
b divide pe a, dacă şi numai dacă a se împarte exact la b.

Exerciţiu: Scrieţi toţi multiplii lui 7 cuprinşi între 15 şi 65.
Răspuns: 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63.

Proprietăţi:

- Oricare ar fi numărul natural a, atunci **a | a** ;
- Oricare ar fi numărul natural a, atunci **a | 0** şi **1 | a** ;
- Oricare ar fi numerele naturale a şi b, dacă **a | b** şi **b | a** , atunci **a = b** ;
- Oricare ar fi numerele naturale a şi b, **a | a · b** şi **b | a · b** .

B.I.2. CRITERII DE DIVIZIBILITATE

- **Criteriul de divizibilitate cu 10:** un număr natural este divizibil cu 10 , dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0.
- **Criteriul de divizibilitate cu 100, 1000, 10000, ….:** un număr natural este divizibil cu 100, 1000, 10000,… dacă şi numai dacă ultimele două, trei, patru… cifre ale numărului sunt 0.
- **Criteriul de divizibilitate cu 5:** un număr natural este divizibil cu 5 , dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5.
- **Criteriul de divizibilitate cu 2:** un număr natural este divizibil cu 2 , dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0 , 2, 4, 6, 8.
- **Criteriul de divizibilitate cu 3:** dacă suma cifrelor unui număr este divizibilă cu 3.
- **Criteriul de divizibilitate cu 4:** dacă ultimele două cifre ale unui număr reprezintă un număr multiplu de 4.
- **Criteriul de divizibilitate cu 9:** dacă suma cifrelor unui număr este multiplu de 9.
- **Criteriul de divizibilitate cu 25:** dacă ultimele două cifre ale unui număr reprezintă un număr multiplu de 25.

Exerciţii:

a) Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{12x}$ divizibile cu 2.
Răspuns: 120, 122, 124, 126, 128.

b) Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{3xy}$ divizibile cu 5.
Răspuns: 300, 310, 320, 330, 340, 350, 360, 370, 380, 390, 315, 325, 335, 345, 355, 365, 375, 385, 395.

c) Scrieţi numerele naturale de forma $\overline{7xy}$ divizibile cu 2 şi cu 5.
Răspuns: 700, 710, 720, 730, 740, 750, 760, 770, 780, 790.

d) Scrieţi divizorii numărului 27.
Răspuns: 1, 3, 9, 27.

e) Scrieţi 5 divizori ai numărului 100.
Răspuns: 1, 2, 4, 5, 10, etc

f) Care sunt numerele de forma $\overline{6ab}$ divizibile cu 25?
Răspuns: $\overline{ab} \in M_{25}$ şi $\overline{6ab} \in \{600; 625; 650; 675\}$.

g) Stabiliţi, dacă numărul 31464 este divizibil cu 9.
Răspuns: 3 + 1 + 4 + 6 + 4 = 18 este multiplu de 9.

h) Care sunt numerele de forma $\overline{153x}$ divizibile cu 4?
Răspuns: $\overline{3x} \in M_4 \Rightarrow \overline{153x} \in \{1532; 1536\}$

B.I.3. NUMERE PRIME

Un ***număr prim*** este un număr natural care are exact doi divizori, pe **1** şi **pe el însuşi**.
Exemplu: 3 are ca divizori pe 1 şi pe 3.

Numerele naturale care nu sunt prime se numesc ***numere compuse***, adică acele numere care au cel puţin trei divizori.
„1” nu este nici număr prim, nici compus.
„2” este singurul număr prim par.

Stabilirea unui număr prim

Ciurul lui Eratostene*

Eratosthene din Cyrene a fost un matematician, poet, atlet, geograf şi astronom antic grec. A făcut o serie de descoperiri şi invenţii, incluzând un sistem de latitudine şi longitudine. A fost primul grec ce a calculat circumferinţa şi înclinarea axei Pământului ambele cu o acurateţe remarcabilă. Este posibil ca el să fi fost primul care a calculat distanţa pământului faţă de Soare. A creat o hartă a lumii bazată pe cunoştinţele vremii. A fost iniţiatorul cronologiei ştiinţifice, instituind sistemul de stabilire a datelor evenimentelor faţă de data cuceririi Troiei.

În matematică, **ciurul lui Eratostene** este un algoritm simplu şi vechi de descoperire a tuturor numerelor prime până la un întreg specificat. Este predecesorul algoritmului modern *ciurul lui Atkin*, un algoritm mai rapid dar mai complex. A fost creat de Eratostene, un matematician din Grecia antică.

Algoritm

1. Se scrie o listă a numerelor de la 2 la cel mai mare număr ce urmează a fi testat pentru primalitate. Numim această listă *lista A*. (Lista de pătrate din partea stângă a imaginii.)

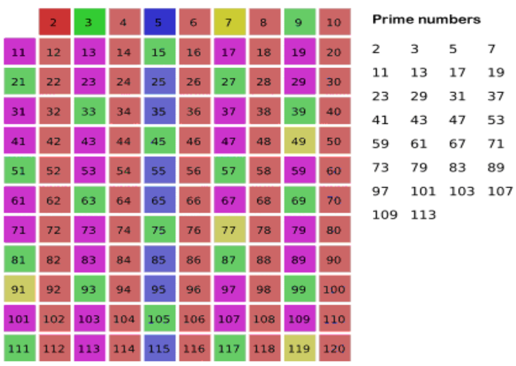
2. Se trece numărul 2, primul număr prim găsit, într-o altă listă, cea a numerelor prime găsite. Numim această listă *lista B*. (Este lista din partea dreaptă a imaginii.)

3. Se marchează 2 şi toţi multiplii lui 2 din lista A.

4. Primul număr nemarcat din listă este un număr prim. Se trece acest număr în lista B.

5. Se marchează acest număr şi toţi multiplii lui din lista A. Marcarea de multipli poate să înceapă de la pătratul numărului, întrucât multiplii mai mici au fost deja marcaţi în paşii anteriori.

6. Se repetă paşii 4 şi 5 până când se epuizează toate numerele din lista A.



*__Sursa:__ http://ro.wikipedia.org/wiki/Ciurul_lui_Eratostene

Exemplu: Este numărul a = 149 număr prim?
Rezolvare: Se caută, dacă numărul dat este divizibil cu numerele prime de dinaintea lor.
Se observă, conform criteriilor de divizibilitate menţionate la punctul B.I..2, că 149 nu este divizibil cu numerele prime: **2**, **3**, **5**. Fac verificarea pentru următoarele numere prime:
149 : **7** = 21, r = 2, rezultă că 149 nu este divizibil cu 7.
149 : **11** = 13, r = 6, rezultă că 149 nu este divizibil cu 11.
149 : **13** = 11, r = 6, rezultă că 149 nu este divizibil cu 13.
Am arătat că a = 149 , care este cuprins : 12^2 < 149 < 13^2, nu este divizibil cu numerele prime: **2**, **3**, **5, 7, 11, 13, deci nu se divide cu nici un număr prim** $\le$ **13,** deci nu se divide nici cu multiplii M_2, M_3, M_5, M_7,M_{11}.
Ne uităm în continuare care este mai mare: câtul sau împărţitorul. Se merge până la momentul în care C < Î.
Se observă că câtul > împărţitorul pentru împărţirile la 2, 3, 5, 7, 11, iar pentru împărţirea la 13, C < Î, iar restul este diferit de zero. Deci, nu mai există un număr natural mai mare decât 13, pentru care C < Î, iar restul să fie 0.
În acest caz, 149 este număr prim.

B.I.4. DESCOMPUNEREA NUMERELOR NATURALE ÎN PRODUS DE FACTORI PRIMI

Orice număr natural nenul care nu este prim se poate descompune sub forma unui produs de factori primi, această descompunere fiind unică.
Exemple:
a) Să se descompună în factori primi numărul 2310.
Rezolvare: $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

2310	2
1155	3
385	5
77	7
11	11
1	

b) Să se descompună în factori primi numărul 480.
Rezolvare: $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$

480	5
96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

B.I.5. MULŢIMEA DIVIZORILOR UNUI NUMĂR NATURAL

Fie $A = a^m \cdot b^n$, $A \in N$; $a, b, m, n \in N$; a, b= numere prime.
Mulţimea divizorilor lui A va fi dată de relaţia: $A = (m+1) \cdot (n+1)$.
În mod similar, se generalizează.
Exemplu: Să se determine numărul divizorilor numărului 48.
Rezolvare: $48 = 2^4 \cdot 3$. Rezultă că mulţimea divizorilor lui 48 va fi dată de: $(4+1) \cdot (1+1) = 10$. Aceştia sunt: $\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$.

B.I.6. CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN

Două numere pot avea divizori comuni.

Cel mai mare divizor comun a două numere a şi b notat c.m.m.d.c. (a,b) = (a, b) este cel mai mare număr care divide numerele date.

C.m.m.d.c al unor numere naturale nenule este produsul tuturor factorilor comuni, luaţi o singură dată, la puterea cea mai mică.

Dacă c.m.m.d.c = 1, atunci numerele se numesc ***prime între ele.***

Exemplu: Să se calculeze c.m.m.d.c. (12, 90).

Rezolvare:

$12 = 2^2 \cdot 3$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Rezultă că c.m.m.d.c. (12, 90) $= 2 \cdot 3 = 6$.

Exemplu: Care sunt numerele a şi b care au c.m.m.d.c = 2, iar suma numerelor este12.

Rezolvare: Dacă c.m.m.d.c = 2, atunci $a = 2x$, $b = 2y$, $x, y \in N^*$ şi c.m.m.d.c (x, y) = 1.

Cum $a + b = 12$, rezultă $2x + 2y = 12$, de unde: $x + y = 6$.

Se poate observa că:

- Pentru $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ rezultă: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 10 \end{cases}$, convine c.m.m.d.c = 2

sau

- Pentru $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ rezultă: $\begin{cases} a = 10 \\ b = 2 \end{cases}$, convine c.m.m.d.c = 2

sau

- Pentru $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ rezultă: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$ nu convine, deoarece în acest caz c.m.m.d.c = 4.
- Invers, la fel.

sau

- Pentru $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ rezultă: $\begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \end{cases}$ nu convine, deoarece în acest caz c.m.m.d.c = 6.

Deci, soluţiile posibile sunt: $(2,10)$ şi $(10,2)$.

Exemplu: Împărţind numerele 1243, 6532, 1817 la un acelaşi număr obţinem resturile 13, 7, 2. Aflaţi împărţitorul.

Rezolvare:

Fie Î împărţitorul nenul şi a, b, c câturile împărţirilor. Rezultă:

$$\begin{cases} 1243 = \hat{I} \cdot a + 13 \\ 6532 = \hat{I} \cdot b + 7 \\ 1817 = \hat{I} \cdot c + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1230 = \hat{I} \cdot a \\ 6525 = \hat{I} \cdot b \\ 1815 = \hat{I} \cdot c \end{cases}$$

Deoarece Î este acelaşi, deci este c.m.m.d.c şi $\hat{I} > 13$.

$$\begin{cases} 1230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41 \\ 6525 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 29 \\ 1815 = 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \end{cases} \Rightarrow \hat{I} = \text{c.m.m.d.c} = 3 \cdot 5 = 15$$

B.I.7. CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN

Cel mai mic multiplu comun a două numere a şi b notat c.m.m.m.c (a,b) = [a, b] este cel mai mic număr natural nenul care se divide cu numerele date.

C.m.m.m.c al numerelor a şi b este produsul tuturor factorilor primi luaţi o singură dată la puterea cea mai mare.

Exemplu: Să se calculeze c.m.m.m.c. (12, 90).

Rezolvare:

$12 = 2^2 \cdot 3$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Rezultă că c.m.m.m.c. (12, 90) = [12, 90] = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

Exemplu: Să se afle cel mai mic număr de două cifre pe care, împărţindu-l la 10, 18, 15 obţinem acelaşi rest egal cu 2.

Rezolvare: Fie $\overline{ab} = x$ numărul căutat.

Rezultă că:

$$\begin{cases} (x-2) \in M_{10} \\ (x-2) \in M_{18} \\ (x-2) \in M_{15} \end{cases} \Rightarrow (x-2) \in M_{[10;18;15]} = M_{90} \in \{0, 90, 180, 270, ...\},$$

90 - cel mai mic număr căutat

$$\begin{cases} 10 = 2 \cdot 5 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow [10;18;15] = 2 \cdot 5 \cdot 3^2 = 90 \Rightarrow x - 2 = 90 \Rightarrow x = 92$$

Exemplu: Care este cel mai mare număr de trei cifre care împărţit pe rând la 7, 3, 5 să dea restul 1 ?

Rezolvare: Fie $\overline{abc} = x$, rezultă:

$$\begin{cases} (x-1) \in M_7 \\ (x-1) \in M_3 \\ (x-1) \in M_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$(x-1) \in M_{[7;3;5]} = M_{105} \in \{0, 105, 210, 315, 420, 525, 630, 735, 840, 945, ...\}$

Cel mai mare număr de forma $\overline{abc} = 945$.

Rezultă: $\overline{abc} - 1 = 945 \Rightarrow \overline{abc} = 946$

B.I.8. LEGĂTURA DINTRE CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ŞI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN

Produsul a două numere naturale este egal cu produsul dintre c.m.m.d.c şi c.m.m.m.c.

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$$

Dacă numerele naturale a şi b sunt prime între ele, atunci $[a, b] = a \cdot b$**.**

C.I. MULŢIMI

C.I.1. MULŢIMI. ELEMENTE

Mulţimea este o colecţie de obiecte bine determinate şi distincte numite ***elementele mulţimii.***

Relaţii de apartenenţă:

$\in$ → aparţine

$\notin$ → nu aparţine

De exemplu,

- dacă A este o mulţime şi x este un element al mulţimii A vom scrie: $x \in A$ şi vom citi "x aparţine lui A".
- dacă A este o mulţime şi x nu este un element al mulţimii A vom scrie: $x \notin A$ şi vom citi "x nu aparţine lui A".

Metode de scriere

1. Enumerarea elementelor prin utilizarea acoladelor în interiorul cărora punem elementele mulţimii:

Exemplu: $A = \{0,2,4\}$.

2. Prin intermediul diagramei Venn – Euler – prin desenarea unei curbe închise şi scrierea în interiorul acesteia a elementelor mulţimii.

Exemplu:

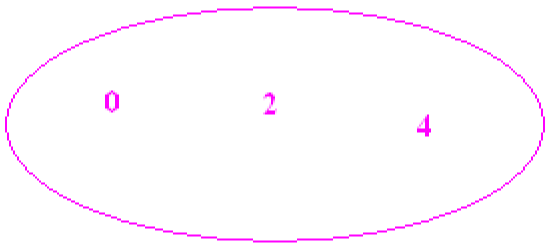


Figura I.1. Exemplu de scriere a unei mulţimi prin intermediul diagramei Venn – Euler

3. Folosind proprietăţi caracteristice mulţimilor

Exemplu: $A = \{x | x \in N \text{ si } x \leq 4 \text{ şi } x = 2k,\ k \in N\}$

Reguli:

- denumirea mulţimii: litere mari de tipar;
- elementele mulţimii se separă prin "," sau ";" ;
- ordinea nu contează;
- elementele nu se repetă.

Noţiuni de bază:

- **Mulţimea vidă = Ø** = mulţimea care nu are nici un element;
- **Mulţimea numerelor naturale = N = mulţimea care are toate elementele numere naturale:** $N = \{0,1,2,3,4,...\}$.
- **Mulţimea numerelor naturale nenule = N^* ;** $N^* = \{1,2,3,4,...\}$.
- **Mulţimea numerelor întregi = Z =** $\{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$
- **Cardinalul unei mulţimi A = Card A =** numărul de elemente al unei mulţimi A.

C.I.2. RELAŢII ÎNTRE MULŢIMI

- Două mulţimi A şi B **sunt egale** şi se notează **A = B,** dacă au aceleaşi elemente, iar dacă nu au aceleaşi elemente **nu sunt egale** şi se notează $A \neq B$.
- Fie A şi B două mulţimi; **A este inclusă în B**, dacă orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Se notează $A \subset B$. Se mai spune că **B include pe A** şi se scrie $B \supset A$.

Exemplu: $N^* \subset N$.

- Orice mulţime A este inclusă în ea însăşi: $A \subset A$.

Alte noţiuni de bază:

- O mulţime care are n elemente, $n \in N$ este o ***mulţime finită***.
- O mulţime care nu este finită este o ***mulţime infinită***.
- Mulţimea divizorilor lui **a** este o mulţime finită, iar mulţimea multiplilor lui **a** este infinită.

Fie $a \in N$.

Notăm cu D_a mulţime divizorilor lui a. $D_a = \{n | n \in N \text{ şi } n|a\}$. Se observă că mulţimea D_a nu este vidă.

Notăm cu M_a mulţime multiplilor lui a. $M_a = \{m | m \in N \text{ şi m este multiplul lui a}\}$.
$M_a = \{0, a, 2a, 3a, 4a, ...\}$.

C.I.3. OPERAŢII CU MULŢIMI

Reuniunea mulţimilor: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$ - porţiunea haşurată din *figura I.2*.

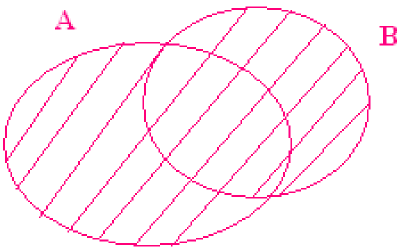


Figura I.2. Reuniunea mulţimilor A şi B

Intersecţia mulţimilor: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ şi } x \in B\}$- porţiunea haşurată din *figura I.3*.

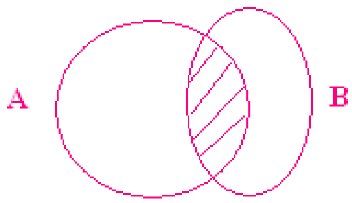


Figura I.3. Intersecţia mulţimilor A şi B

Diferenţa a două mulţimi: $A - B = \{x | x \in A \text{ şi } x \notin B\}$- porţiunea haşurată din *figura I.4*.

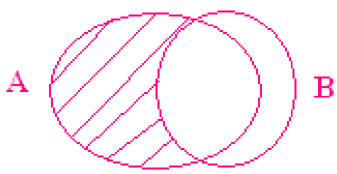


Figura I.4. Intersecţia mulţimilor A şi B

D.I. EXERCIŢII RECAPITULATIVE

D.I.1. DIVIZIBILITATE

1. Scrieţi toate numerele naturale mai mici decât 25 care au exact doi divizori.
Răspuns: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

2. Scrieţi cel mai mic număr natural care are exact 3 divizori.
Răspuns: 4 cu divizorii: 1, 2, 4.

3. Să se demonstreze că 1+2+3+…+20 se divide cu 7.
Rezolvare: 1+2+3+…+20 = 20 · 21 : 2 = 210 se împarte exact la 7.

4. Stabiliţi, dacă 17 + 213 se divide cu 10.
Răspuns: 230 se divide cu 10, conform regulii divizibilităţii cu 10 sau a faptului că 230 se împarte exact la 10.

5. Scrieţi 3 multiplii comuni ai numerelor 2 şi 7.
Răspuns: 14, 28, 42.

6. Să se arate că $3+3^2+3^3+...+3^{123}$ se divide cu 13.
Rezolvare: avem în sumă 123 de numere.
Încercăm să grupăm în ordine câte 3 termeni din care să dăm factori comuni astfel:
$$3+3^2+3^3+...+3^{123}=3\cdot(1+3+9)+3^4\cdot(1+3+9)+...+3^{121}\cdot(1+3+9)=13\cdot\left(3+3^4+...+3^{121}\right)$$
Deci, indiferent de valoarea parantezei, deoarece numărul este înmulţit cu 13, rezultă că expresia dată este divizibilă cu 13.

7. Scrie patru multiplii ai lui 10, care sunt divizori ai lui 4500.
Răspuns: 50, 90, 450, 4500.

8. Scrie zece multiplii ai lui 2, nedivizibili cu 10, mai mari decât 501.
Răspuns: 502, 504, 506, 508, 512, 514, 516, 518, 522, 524.

9. Scrie toţi multiplii lui 5 care sunt pătrate perfecte mai mici decât 100.
Răspuns: 24, 100, 225, 400, 625, 900.

10. Află numărul natural X, astfel încât între X şi 199 să se afle 5 multiplii de 5 .
Răspuns: 175, 180, 185, 190, 195 ; rezultă X = 174

D.I.2. PARITATEA ŞI IMPARITATEA

1. Scrieţi numărul 26 ca sumă de două numere naturale pare consecutive.
Răspuns: Mijlocul numărului 26 este 13 (26 : 2 = 13); deci numerele pare consecutive vor fi vecinele numărului 13, adică: 26 = 12 + 14; deci numerele sunt: 12; 14

2. Scrieţi numărul 96 ca sumă de şase numere naturale impare consecutive.
Răspuns: 96: 6 = 16, va fi numărul din mijloc în jurul cărora se vor afla numerele căutate, adică: 11 + 13 + 15 + 17+19 + 21 = 96 ; deci numerele sunt: 11; 13; 15; 17; 19; 21.

3. Scrie 4 numere pare divizibile cu 11, cuprinse între 601 şi 801.
Răspuns: 616 ($616 = 11 \cdot 56$); 638 ($638 = 11 \cdot 58$);
660 ($660 = 11 \cdot 60$) ; 682 ($682 = 11 \cdot 62$).

4. Scrie 4 numere impare divizibile cu 3, cuprinse între 1000 şi 1120.
Răspuns: 1005 ($1005 = 3 \cdot 335$) ; 1011 ($1011 = 3 \cdot 337$);
1017 ($1017 = 3 \cdot 339$) ; 1023 ($1023 = 3 \cdot 341$).

D.I.3. MEDIA ARITMETICĂ

1. Media aritmetică a două numere este 16. Ştiind că unul dintre ele este 20, să se afle celălalt număr.
Rezolvare: Fie a, b cele 2 numere şi a = 20, $m_a = 16$

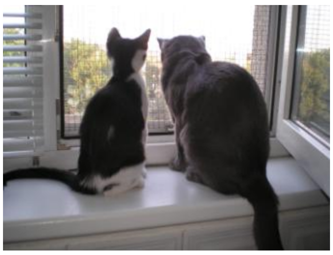
Cum $m_a = \frac{a+b}{2}$, rezultă: $16 = \frac{20+b}{2}$, adică $32 = 20 + b \Rightarrow b = 12$.

2. Media aritmetică a trei numere este egală cu 12, iar media primelor două numere este 10. Calculaţi cel de-al treilea număr.
Rezolvare: Fie a, b, c cele 3 numere; $m_{a1} = 12 = \frac{a+b+c}{3}$ şi $m_{a2} = 10 = \frac{a+b}{2}$
Din m_{a1} rezultă $a+b+c = 36$, iar din m_{a2} rezultă $a+b = 20$, rezultă: $20 + c = 36$,
deci c = 16.

3. În urma unui test de evaluare la matematică, cei 20 de elevi ai clasei au obţinut următoarele note: 4 elevi nota 7, 5 elevi nota 8, 2 elevi nota 9, 4 elevi nota 10 şi 3 elevi nota 4, 2 elevi nota 1. Calculaţi media clasei.
Rezolvare:

$$m_{clasa} = \frac{7+7+7+7+8+8+8+8+8+9+9+10+10+10+10+4+4+4+1+1}{20}$$

$$m_{clasa} = \frac{4\cdot 7 + 5\cdot 8 + 2\cdot 9 + 4\cdot 10 + 3\cdot 4 + 2\cdot 1}{20} = \frac{28+40+18+40+12+2}{20} = \frac{140}{2} = 70$$



D.I.4. PĂTRAT PERFECT ŞI CUB PERFECT

1. Arătaţi că numărul $3^{1981}+4^{1981}+5^{1981}+6^{1981}$ nu este pătrat perfect.
Rezolvare: Rezolvăm problema prin determinarea pe rând a ultimei cifre a fiecărui element component al sumei, apoi ultima cifră a sumei date.
$U(3^{1981}) = U(3^1) = 3$; 1981 : 4 = 495 rest 1
$U(4^{1981}) = U(4^1) = 4$; 1981 : 2 = 99 rest 1
$U(5^{1981}) = U(5^1) = 5$;
$U(6^{1981}) = U(6^1) = 6$.
$U(3^{1981}+4^{1981}+5^{1981}+6^{1981}) = U(3^{1981}) + U(4^{1981}) + U(5^{1981}) + U(6^{1981}) = 3+4+5+6 = 18 = 8$

$3^1 = 3$ $3^2 = 9$ $3^3 = 27$ $3^4 = 81$ $3^5 = 243$	$4^1 = 4$ $4^2 = 16$ $4^3 = 64$	$5^1 = 5$ $5^2 = 25$	$6^1 = 6$ $6^2 = 36$

2. Arătaţi că numărul 27 nu este pătrat perfect.
Rezolvare: $5^2 = 25 < 27 < 35 = 6^2$. Există 2 pătrate perfecte consecutive între care se află 27. Deci 27 nu este pătrat perfect.

3. Câte zerouri se află la sfârşitul numărului $A=\left(4^2\cdot 3^5\cdot 16^3\cdot 25^5\right)\cdot\left(3^4\cdot 5^{10}\cdot 2^{15}\right)$?
Rezolvare: $A=\left(4^2\cdot 3^5\cdot 16^3\cdot 25^5\right)\cdot\left(3^4\cdot 5^{10}\cdot 2^{15}\right)=\left(4^2\cdot 3^5\cdot 4^6\cdot 25^5\right)\cdot\left(3^4\cdot 5^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^5\right)$
$A=\left(4^3\cdot 3^5\cdot 4^5\cdot 25^5\right)\cdot\left(3^4\cdot 5^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^5\right)=\left(4^3\cdot 3^5\cdot 100^5\right)\cdot\left(3^4\cdot 10^{10}\cdot 2^5\right)=2^{11}\cdot 3^9\cdot 10^{20}$
20 zerouri

4. Fie numerele $X = 2^{10}\cdot 25^2\cdot 7^{10}$ şi $Y = 2^5\cdot 5^7\cdot 3^{10}$.
a) Cu câte zerouri se termină fiecare dintre ele?
$X = 2^{10}\cdot 25^2\cdot 7^{10} = 2^8\cdot 2^2\cdot 25^2\cdot 7^{10} = 4^2\cdot 2^4\cdot 2^2\cdot 25^2\cdot 7^{10} = 100^2\cdot 2^6\cdot 7^{10} = 10^4\cdot 2^6\cdot 7^{10}$
X se termină cu 4 zerouri
$Y = 2^5\cdot 5^7\cdot 3^{10} = 2^5\cdot 5^2\cdot 5^5\cdot 3^{10} = 10^5\cdot 5^2\cdot 3^{10}$
Y se termină cu 5 zerouri
b) Cu câte zerouri se termină X · Y?
$X\cdot Y = 10^4\cdot 2^6\cdot 7^{10}\cdot 10^5\cdot 5^2\cdot 3^{10} = 10^9\cdot 10^2\cdot 2^4\cdot 3^{10}\cdot 7^{10} = 10^{11}\cdot 2^4\cdot 3^{10}\cdot 7^{10}$
$X\cdot Y$ se termină cu 11 zerouri.

5. Determinaţi cea mai mică valoare a lui n, număr natural pentru care numărul $2^n + 17\cdot 10^2$ este pătrat perfect.
Rezolvare: $2^n + 17\cdot 10^2 = 2^n + 1700$
Se poate spune că avem nevoie de primul pătrat perfect peste numărul 1700.
Cum $42^2 = 1764$, rezultă că 1764 – 1700 = 64, deci $2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$

6. Arătaţi că 1243 nu este cub perfect.
Rezolvare: $10^3 = 1000 < 1243 < 1331 = 11^3$; există 2 cuburi consecutive între care se află 1243.

D.I.5. RIDICAREA LA PUTERE

1. Arătaţi că: $1+2+2^2+...+2^{100}<2^{101}$.
Rezolvare:
Fie $X=1+2+2^2+...+2^{100}$
Se calculează
$2X=2+2^2+...+2^{100}+2^{101}$
Se calculează:
$2X-X=X=2+2^2+...+2^{100}+2^{101}-(1+2+2^2+...+2^{100})=2^{101}-1$
şi cum $2^{101}-1<2^{201}\Rightarrow X<2^{201}$**,** adică $1+2+2^2+...+2^{100}<2^{101}$**.**

2. Arătaţi că: $1+a+a^2+...+a^n<a^{n+1}$, n şi a numere naturale.
Rezolvare:
Fie $X=1+a+a^2+...+a^n$
Se calculează
$2X=a+a^2+...+a^n+a^{n+1}$
Se calculează:
$2X-X=X=a+a^2+...+a^n+a^{n+1}-(1+a+a^2+...+a^n)=a^{n+1}-1$
şi cum $a^{n+1}-1<a^n\Rightarrow X<a^{n+1}$, adică $1+a+a^2+...+a^n<a^{n+1}$**.**

3. Ştiind că $(a-1)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1\right)=a^n-1$, să se scrie numărul $2^{10}-1$ ca o sumă de 10 puteri consecutive ale lui 2.
Rezolvare: În relaţia dată a = 2 şi n = 11.
Rezultă $(2-1)\cdot\left(2^{10-1}+2^{10-2}+...+2^1+2^0\right)=2^{10}-1$
$2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0=2^{10}-1$

4. Aflaţi numerele naturale care verifică:
a) $2+2^2+2^3+...+2^n=2^{55}-2$
Rezolvare: Încercăm să utilizăm relaţia $(a-1)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1\right)=a^n-1$, cu a = 2.
Împărţim relaţia dată cu 2, astfel obţinem:
$1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^{54}-1$, deci n = 54.
b) $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}=56$
$2^n\cdot(1+2+4)=56$
$2^n=56:7$
$2^n=8$
$2^n=2^3\Rightarrow n=3$

5. Calculaţi X^Y+Y^X pentru:
$X=8^{33}:\left[4^{32}\cdot 2^{34}+\left(2^5\cdot 2^{20}\right)^5:\left(16\cdot 2^{23}\right)+\left(7^5:7^5-1\right)^{32}\cdot 4\right]$
$Y=\left[\left(11-0^{11}\right)\cdot\left(3^3-3^2\right)+1^{2000}\right]\cdot\left(3^2-2^3\right)-3^2\cdot 2$

Rezolvare:

$$X = 8^{33} : \left[2^{64} \cdot 2^{34} + \left(2^{25}\right)^5 : \left(2^4 \cdot 2^{23}\right) + (1-1)^{32} \cdot 4 \right] = 8^{33} : \left(2^{98} + 2^{125} : 2^{27}\right) =$$

$$= 2^{99} : \left(2^{98} + 2^{98}\right) = 2^{99} : 2 : 2^{98} = 2^0 = 1$$

$$Y = \left[\left(11 - 0^{11}\right) \cdot \left(3^3 - 3^2\right) + 1^{2000}\right] \cdot \left(3^2 - 2^3\right) - 3^2 \cdot 2 = (11 \cdot 18 + 1) \cdot (1) - 18 = 199 - 18 = 181$$

$$X^Y + Y^X = 1^{181} + 181^1 = 1 + 181 = 182$$

6. Scrieţi următoarele numere în baza 10:

a) $35 = 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 3 \cdot 10 + 5$

b) $427 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$

7. Să se treacă numărul de mai jos din baza 2 în baza 10.

$110111_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 55_{(10)}$

8. Să se treacă numărul $625_{(10)}$ în baza 8.

Rezolvare: Am urmărit etapele de rezolvare.

1. se împarte numărul succesiv la 8 până se obţine ultimul rest nenul.

625 : 8 = 78 56	78 : 8 = 9 72	9 : 8 = 1 8	1 : 8 = 0 0	0 : 8 = 0 0
= 65 64	= 6	1	1	0
= =1				

2. resturile obţinute se scriu în ordinea inversă obţinerii lor, adică: $625_{(10)} = 1161_{(8)}$

3. se face verificarea trecând numărul în baza 10

$625_{(10)} = 1161_{(8)} = 1 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 512 + 64 + 48 + 1 = 625$

9. Ordonaţi crescător numerele: $222_{(3)}$; $444_{(5)}$; $1011_{(2)}$.

Pentru uşurarea ordonării trec numerele în baza 10.

$222_{(3)} = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 18 + 6 + 2 = 26$

$444_{(5)} = 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 100 + 20 + 5 = 125$

$1011_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$

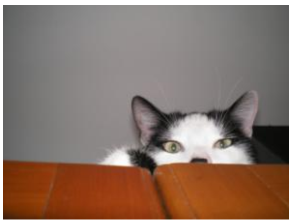
$1011_{(2)} < 222_{(3)} < 444_{(5)}$

10. Calculaţi:

$110_{(2)} + 101_{(2)} + 100_{(2)} = (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)$
$= 6_{(10)} + 5_{(10)} + 4_{(10)} = 15_{(10)}$

11. Aflaţi baza de numeraţie x, ştiind că: $121_{(x)} = 16$

Rezolvare: $121_{(x)} = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^1 + 1 = 16$. Se observă că $x = 3$, deci $121_{(3)} = 16$.



D.I.6. DIVIZORI, NUMERE PRIME, CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ŞI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN

1. Să se determine numerele naturale care admit exact patru divizori, ştiind că produsul divizorilor săi este 144.

Rezolvare:

Fie d_1, d_2, d_3, d_4 divizorii numărului **n**, unde d_1, d_2 sunt divizori proprii, iar $d_3 = 1, d_4 = 144$ sunt divizorii improprii ai numărului **n**.

Dar, $d_1 \cdot d_2 = n = d_3 \cdot d_4$ şi cum $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 144 \Rightarrow n^2 = 3^2 \cdot 4^2 \Rightarrow n = 12$.

Rezultă, $D_{12} = \{1, 3, 4, 12\}$.

2. Determinaţi perechile de numere prime între ele din următorul şir de numere: 22; 42; 35; 55.

Rezolvare:

$22 = 2 \cdot 11$

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$35 = 5 \cdot 7$

$55 = 5 \cdot 11$

Numerele **a** şi **b** sunt prime între ele, dacă: c.m.m.d.c (a,b) =1.

$(22;42) = 2$

$(22;35) = 1$

$(22;55) = 11$

$(42;35) = 7$

$(42;55) = 1$

$(35;55) = 5$

Răspuns: $(22;35) = 1$; $(42;55) = 1$

3. Să se afle numerele a şi b , ştiind că $a \cdot b = 240$; $a < b$; $(a, b) = 4$.

Rezolvare:

Dacă $a = 4 \cdot a_1$; $b = 4 \cdot b_1$, astfel încât: $(a_1; b_1) = 1$.

Rezultă: $a \cdot b = 4 \cdot a_1 \cdot 4 \cdot b_1 = 16 \cdot a_1 \cdot b_1$.

Dar $a \cdot b = 240 \Rightarrow 240 = 16 \cdot a_1 \cdot b_1 \Rightarrow 15 = a_1 \cdot b_1 \Rightarrow 15 = 3 \cdot 5$ sau $15 = 1 \cdot 15$

Deci, numerele sunt:

$$\begin{cases} a = 4 \cdot 3 = 12 \\ b = 4 \cdot 5 = 20 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a = 4 \cdot 5 = 20 \\ b = 4 \cdot 3 = 12 \end{cases} \Rightarrow (a;b) = 4$$

$$\begin{cases} a = 4 \cdot 1 = 4 \\ b = 4 \cdot 15 = 60 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a = 4 \cdot 15 = 60 \\ b = 4 \cdot 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow (a;b) = 4$$

4. Să se afle două numere naturale ştiind că c.m.m.d.c. = 8 şi c.m.m.m.c. = 240.

Răspuns:

Fie a şi b numerele căutate; atunci $(a;b) = 8$ şi $[a;b] = 240$.

Se ştie faptul că $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 8 \cdot 240 = 1920$

Dacă $(a;b) = 8 \Rightarrow a = 8 \cdot a_1$; $b = 8 \cdot b_1$, astfel încât: $(a_1; b_1) = 1$.

Rezultă: $a \cdot b = 8 \cdot a_1 \cdot 8 \cdot b_1 = 64 \cdot a_1 \cdot b_1$.

$1920 = 64 \cdot a_1 \cdot b_1 \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = 30 \Rightarrow a_1,\ b_1 \in D_{30} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 30 = 1 \cdot 30 \ \text{ sau } \ 30 = 2 \cdot 15 \ \text{ sau } \ 30 = 3 \cdot 10 \ \text{ sau } \ 30 = 5 \cdot 6 \\ 30 = 30 \cdot 1 \ \text{ sau } \ 30 = 15 \cdot 2 \ \text{ sau } \ 30 = 10 \cdot 3 \ \text{ sau } \ 30 = 6 \cdot 5 \end{cases}$$

Numerele căutate sunt:

$$\begin{cases} a = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 1 = 8 \\ b = 8 \cdot b_1 = 8 \cdot 30 = 240 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 30 = 240 \\ b = 8 \cdot b_1 = 8 \cdot 1 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 2 = 16 \\ b = 8 \cdot b_1 = 8 \cdot 15 = 120 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 15 = 120 \\ b = 8 \cdot b_1 = 8 \cdot 2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 3 = 24 \\ b = 8 \cdot b_1 = 8 \cdot 10 = 80 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 10 = 80 \\ b = 8 \cdot b_1 = 8 \cdot 3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 5 = 40 \\ b = 8 \cdot b_1 = 8 \cdot 6 = 48 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 6 = 48 \\ b = 8 \cdot b_1 = 8 \cdot 5 = 40 \end{cases}$$

D.I.7. MULŢIMI

1. Fie mulţimea $A = \{10^x \mid x \in N,\ 0 \le x < 9\}$.

a) Câte elemente are mulţimea A?
b) Câte elemente are mulţimea divizorilor tuturor elementelor lui A?
Rezolvare:
a) $A = \{10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8\}$.
b) Înainte de a calcula mulţimea divizorilor lui A (M_{D_A}) vom scrie fiecare element al mulţimii A ca produs de factori primi: $10^0 = 1$

$10 = 2^1 \cdot 5^1$ $\qquad$ $10^5 = 2^5 \cdot 5^5$

$10^2 = 2^2 \cdot 5^2$ $\qquad$ $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$

$10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ $\qquad$ $10^7 = 2^7 \cdot 5^7$

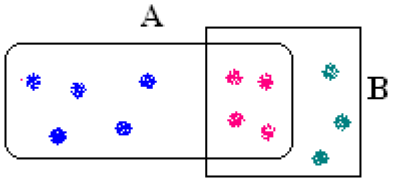
$10^4 = 2^4 \cdot 5^4$ $\qquad$ $10^8 = 2^8 \cdot 5^8$

Rezultă:

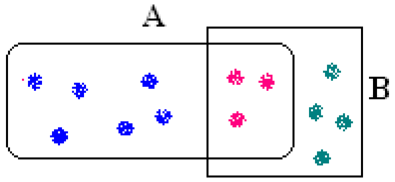
$$M_{D_A} = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 90 + 80 + 40 + 50 + 25 = 285$$

2. Fie mulţimea: $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$. Scrie trei submulţimi finite ale lui A.
Rezolvare: $\{0, 2, 4\}$; $\{6, 8, 10, 12\}$; $\{20, 22\}$.

3. Mulţimea A are 9 elemente, iar mulţimea B are 7 elemente.
a) Dacă $A \cup B = 12$ elemente, câte elemente are $A \cap B$?
b) Dacă $A \cap B = 3$ elemente, câte elemente are $A \cup B$?
Răspuns: (cu roşu elementele comune)



a) 4 elemente



b) 13 elemente

SEMESTRUL 2

Motto:

“Tot ce e gândire corectă
este sau matematică sau susceptibilă de matematizare.”

Grigore C. Moisil

II. NUMERE RAŢIONALE

III. GEOMETRIE

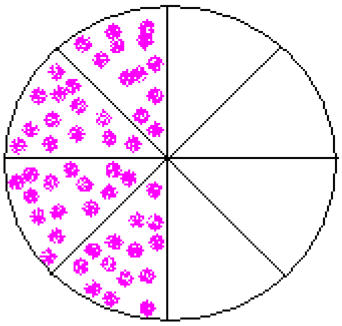
A.II. FRACŢII ORDINARE

A.II.1. DEFINIŢIE, COMPONENŢĂ

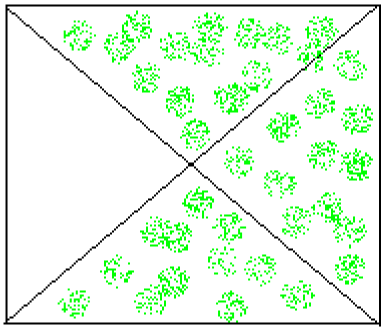
Fracţia este o pereche de numere naturale a şi b , cu $b \neq 0$, notată $\frac{a}{b}$, în care **a** se numeşte **numărător**, iar **b** se numeşte **numitor**.

Fracţia ne arată în câte părţi, fragmente a fost împărţit întregul.

Exemplu : Ce fracţii reprezintă suprafeţele colorate de mai jos?



a) *Răspuns:* $\frac{4}{8}$



b) *Răspuns:* $\frac{3}{4}$

Exemple : Pentru ce numere naturale **x** există fracţiile de mai jos?

a) $\frac{6}{x-2}$

Răspuns: Fracţia există pentru $x \in N/\{2\}$, deoarece $x-2 \neq 0$, deci $x \neq 2$ pentru ca fracţia să existe.

b) $\frac{10}{x+5}$

Răspuns: Fracţia există pentru orice $x \in N$, deoarece din $x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5 \notin N$ sau se mai poate spune că $x+5>0$, deoarece reprezintă o sumă de numere naturale, cu cea mai mică valoare pentru x = 0.

c) $\frac{x+9}{7}$

Răspuns: Fracţia există pentru orice $x \in N$ .Numitorul este $7 \neq 0$.

A.II.2. FRACŢII ECHIUNITARE, SUBUNITARE, SUPRAUNITARE

O fracţie $\frac{a}{b}$ este **echiunitară** , dacă $a = b,\ b \neq 0$. Deci $\frac{a}{b} = 1$.

O fracţie $\frac{a}{b}$ este **supraunitară** , dacă $a > b,\ b \neq 0$. Deci $\frac{a}{b} > 1$.

O fracţie $\frac{a}{b}$ este **subunitară** , dacă $a < b,\ b \neq 0$. Deci $\frac{a}{b} < 1$.

Exemple : Să se precizeze tipul fracţiilor de mai jos:

a) $\frac{17}{25}$ este o fracţie subunitară, deoarece 17<25.

b) $\frac{25}{19}$ este o fracţie supraunitară, deoarece 25>19.

c) $\frac{24}{24}$ este o fracţie echiunitară, deoarece 24 = 24.

d) $\frac{24}{22+x}$ este o fracţie

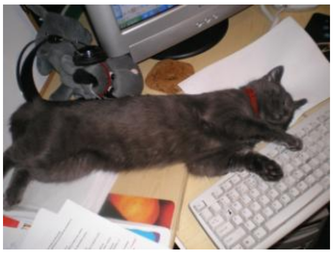
- subunitară, pentru $24 < 22 + x \Rightarrow x > 2$
- supraunitară, pentru $24 > 22 + x \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x \in \{0,1\}$
- echiunitară, pentru $24 = 22 + x \Rightarrow x = 2$

A.II.3. FRACŢII ECHIVALENTE

Două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ cu $b, d \neq 0$, se numesc echivalente şi scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Exemplu : Să se arate că fracţiile $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$.

Răspuns: Se verifică egalitatea $3 \cdot 14 = 6 \cdot 7 \Rightarrow 42 = 42$.



A.II.4. SCOATEREA ÎNTREGILOR DIN FRACŢIE

Această regulă se aplică la fracţiile supraunitare.

Regulă: Pentru a scoate întregii dintr-o fracţie $\frac{a}{b}$, împărţim numărătorul la numitor; câtul **C** reprezintă întregii, iar restul **r** reprezintă numărătorul părţii fracţionare.

$$\frac{a}{b}, a > b,\ b \neq 0,\ a : b = C,\ \text{rest} = r \Rightarrow \frac{a}{b} = C\frac{r}{b} = \text{partea fracţionară.}$$

Exemplu : $\frac{495}{14} = 35\frac{5}{14}$**,** deoarece 495:14=35, rest =5.

A.II.5. INTRODUCEREA ÎNTREGILOR ÎN FRACŢIE

Regulă: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c},\ c \neq 0$

Exemplu : $4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{30}{7}$

A.II.6. AMPLIFICAREA FRACŢIILOR

A amplifica o fracţie $\frac{a}{b},\ b \neq 0$ cu un număr natural $n \neq 0$, înseamnă a înmulţi atât numărătorul, cât şi numitorul cu numărul "n", adică ${}^{n)}\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$. Se observă că fracţia obţinută este o fracţie echivalentă cu cea iniţială.

Exemplu : ${}^{5)}\frac{7}{9} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 9} = \frac{35}{45}$

A.II.7. SIMPLIFICAREA FRACŢIILOR

A simplifica o fracţie $\frac{a}{b},\ b \neq 0$ cu un număr natural $n \neq 0$, înseamnă a împărţi atât numărătorul, cât şi numitorul cu numărul "n", adică $\frac{a}{b}^{(n} = \frac{a : n}{b : n}$. Se observă că fracţia obţinută este o fracţie echivalentă cu cea iniţială.

Exemplu : $\frac{16}{24}^{(2} = \frac{8}{12}^{(4} = \frac{2}{3}$ forma finală nu se mai poate simplifica.

A.II.8. FRACŢII IREDUCTIBILE

Fracţia care nu se mai poate simplifica se numeşte fracţie ireductibilă .

O fracţie $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ este ireductibilă, dacă c.m.m.d.c (a,b) =1.

Pentru a obţine o fracţie ireductibilă, se simplifică fracţia $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu c.m.m.d.c (a,b).

Exemplu : $\frac{16}{24}^{(2} = \frac{8}{12}^{(4} = \frac{2}{3}$ este ireductibilă, deoarece c.m.m.d.c (2, 3) =1.

Exemplu : Să se simplifice fracţia $\frac{18}{144}$**,** astfel încât să obţinem o fracţie ireductibilă.

Rezolvare: $18 = 2 \cdot 3^2$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$, rezultă c.m.m.d.c (18, 144) = $2 \cdot 3^2 = 18$.

Rezultă: $\frac{18}{144}^{(18} = \frac{1}{8}$.

A.II.9. ADUNAREA FRACŢIILOR

Suma a două sau mai multe fracţii cu acelaşi numitor este dată de relaţia:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n},\ n \neq 0 .$$

Pentru fracţiile cu numitori diferiţi se aduc fracţiile la acelaşi numitor comun.

Exemple: **a)** $\frac{2}{3} + \frac{6}{3} = \frac{8}{3}$

b) ${}^{2)}\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}$ [4; 8] = 8

A.II.10. SCĂDEREA FRACŢIILOR

Diferenţa a două sau mai multe fracţii cu acelaşi numitor este dată de relaţia:

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n},\ n \neq 0 .$$

Pentru fracţiile cu numitori diferiţi se aduc fracţiile la acelaşi numitor comun.

Exemple: **a)** $\frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{3}{8} - {}^{2)}\frac{1}{4} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$ [4; 8] = 8

A.II.11. PROCENTE

Un raport în care numitorul este 100 se numeşte raport procentual.

$\frac{p}{100} = p\%$ dintr-un număr se numesc ***p procente*** din acel număr.

Exemple: Să se calculeze:

a) 10% din 425;
b) 40% din 190;
c) 65,2% din 21.

Rezolvare:

a) $\frac{10}{100} \cdot 425 = \frac{4250}{100} = 42{,}5$

b) $\frac{40}{100} \cdot 190 = \frac{7600}{100} = 76$

c) $\frac{65{,}2}{100} \cdot 21 = \frac{652 \cdot 21}{1000} = \frac{13692}{1000} = 13{,}692$

Problemă: Un teren a fost cumpărat cu 20000 de euro şi a fost vândut cu 121% din preţul de cumpărare. Care a fost diferenţa dintre cumpărare-vânzare şi ce constituie ea, un deficit sau un beneficiu?

Rezolvare:

Preţul de vânzare:

$\frac{121}{100} \cdot 20000 = \frac{121 \cdot 20000}{100} = 121 \cdot 200 = 24200$ euro

Se observă că preţul de vânzare e mai mare decât preţul de cumpărare, deci există beneficiul dat de:

$24200 - 20000 = 4200$ euro beneficiu.

Exemple: Să se scrie ca raport procentual numerele:

a) ${}^{4)}\frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 4\%$

b) ${}^{50)}\frac{3}{2} = \frac{150}{100} = 150\%$

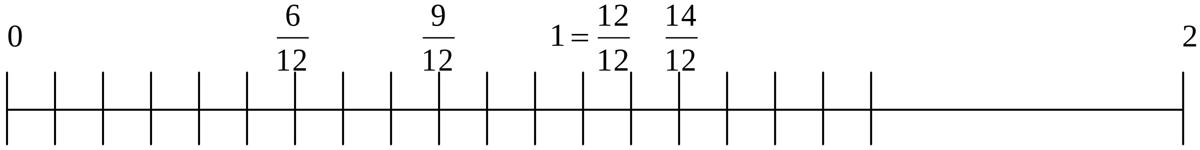
A.II.12. REPREZENTAREA PE AXA NUMERELOR A UNEI FRACŢII ORDINARE

Pentru a reprezenta o fracţie $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ pe axă, se procedează astfel: se împarte unitatea de măsură în **b** părţi egale şi se iau apoi **a** astfel de părţi.

Exemplu: Să se reprezinte pe aceeaşi axă fracţiile $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{6}$.

Rezolvare: Pentru a uşura reprezentarea aducem fracţiile la acelaşi numitor comun.

Ele devin: $\frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{14}{12}$. Deci avem $1 = \frac{12}{12}$, deci u.m.=12.



B.II. FRACŢII ZECIMALE

B.II.1. SCRIEREA FRACŢIILOR ORDINARE CU NUMITORI PUTERI ALE LUI 10 SUB FORMĂ DE FRACŢII ZECIMALE

Fracţiile zecimale sunt fracţii ordinare cu numitori puteri ale lui **10**.

Exemple: Numerele $\frac{35}{10};\frac{17}{10};\frac{25}{100};\frac{12}{1000}$ se mai pot scrie $\frac{35}{10^1};\frac{17}{10^1};\frac{25}{10^2};\frac{12}{10^3}$ şi sunt fracţii cu numitori puteri ale lui **10**. Sub formă zecimală ele se scriu: 0,35; 1,7; 0,25; 0,012.

Orice fracţie ordinară al cărui numitor se poate descompune într-un produs de puteri ale lui **2** sau **5** poate fi scrisă ca fracţie cu numitorul putere a lui **10**.

Exemple:

a) $\frac{19}{20} = {}^{5)}\frac{19}{2^2\cdot 5} = \frac{19\cdot 5}{(2\cdot 5)^2} = \frac{95}{10^2} = 0{,}95;$

b) $\frac{13}{25} = {}^{2^2)}\frac{13}{5^2} = \frac{13\cdot 4}{(2\cdot 5)^2} = \frac{52}{10^2} = 0{,}52;$

c) $\frac{53}{40} = {}^{5^2)}\frac{53}{5\cdot 2^3} = \frac{1325}{(5\cdot 2)^3} = \frac{1325}{10^3} = 1{,}325;$

d) $\frac{7}{4} = {}^{5^2)}\frac{7}{2^2} = \frac{175}{(2\cdot 5)^2} = \frac{175}{10^2} = 1{,}75.$

B.II.2. TRANSFORMAREA UNEI FRACŢII ZECIMALE CU NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE ÎNTR-O FRACŢIE ORDINARĂ

Orice număr natural se poate scrie ca ***fracţie zecimală finită***.
Exemplu: 6 = 6,0 = 6,00 = 6,000 = …= 6,000…0.

Dacă numitorul unei fracţii ordinare ireductibile conţine în descompunere şi alţi factori primi diferiţi de 2 şi de 5, atunci acea fracţie nu se poate scrie ca o fracţie zecimală finită.

Exemple: $\frac{2}{7};\frac{6}{15};\frac{13}{21}.$

O fracţie zecimală finită poate fi scrisă ca o fracţie ordinară având numărătorul egal cu numărul obţinut prin eliminarea virgulei şi numitorul o putere a lui 10 cu exponent egal cu numărul de zecimale.

Exemple: $3{,}11 = \frac{311}{10^2}$; $0{,}0034 = \frac{34}{10^4}$; $17 = \frac{170}{10} = \frac{1700}{10^2} = \frac{17000}{10^3}.$

O ***fracţie zecimală*** este formată din ***parte întreagă*** şi ***parte zecimală***, despărţite prin virgulă. Prima ***cifră din stânga*** virgulei se numeşte cifra unităţilor, a doua este cifra zecilor, a treia cifra sutelor, miilor, zecilor de mii, sutelor de mii, milioanelor, etc , iar ***în dreapta virgulei*** prima cifră este cifra zecimilor, a doua a sutimilor, apoi a miimilor, zecimilor de miimi, sutimilor de miimi, milionimilor, etc.

Cifrele care formează partea zecimală a numerelor se numesc zecimale.

Exemple: Să se completeze *tabelul B.II.1* pentru numerele: 1,54; 238,75; 0,6; 12,234.

Tabelul B.II.I. Exemple de numere zecimale

Partea întreagă			**Partea zecimală**		
sute	**zeci**	**unităţi**	**zecimi**	**sutimi**	**miimi**
		1	5	4	
2	3	8	7	5	
		0	6		
	1	2	2	3	4

Observaţii:

- Fracţia $\frac{6}{10}=0{,}6$ **se citeşte** *6 zecimi* sau *zero virgulă şase* sau *zero întregi şi 6 zecimi.*

Fracţia $\frac{124}{100}=12{,}4$ **se citeşte** *12 virgulă 4* sau *12 întregi şi 4 zecimi* sau *124 zecimi.*

Fracţia $\frac{23584}{1000}=23{,}584$ **se citeşte** *23 virgulă 584* sau *23 întregi şi 584 miimi* sau *23584 miimi sau 23 întregi, 5 zecimi, 8 sutimi, 4 miimi.*

- Se pot descrie oricâte zerouri la dreapta unei fracţii zecimale, fără ca fracţia să se schimbe.

Exemplu: 3,14 = 3,140 = 3,1400 = …

- Dacă toate cifrele părţii zecimale sunt nule, atunci nici zerourile părţii zecimale şi nici virgula nu se mai scriu.

Exemple: 47,0 = 47; 73,0000 = 73.

- Trebuie făcută distincţie între cifra zecimilor, sutimilor , miilor şi numărul zecimilor, sutimilor, miimilor.

Exemplu: Să se completeze *tabelul B.II.2* :

Tabelul B.II.2. Exemple de numere zecimale

Fracţia zecimală	**Cifra zecimilor**	**Numărul zecimilor**	**Cifra sutimilor**	**Numărul sutimilor**	**Cifra miimilor**	**Numărul miimilor**
47,29	2	472	9	4729	-	47290
10,457	4	104	5	1045	7	10457
151,24	2	1512	4	15124	-	151240
415,401	4	4154	0	41540	1	415401

Exemple: 43 de întregi şi 12 sutimi = 43,12
123 de întregi şi 237 miimi = 123,237
857 miimi = 0,857
69 zecimi = 0,69

B.II.3. APROXIMĂRI LA ORDINUL ZECIMILOR, SUTIMILOR

Reamintim noţiunile de rotunjire, aproximare prin lipsă şi adaos, prezentate în paragraful A.I.3 la numere naturale, prin intermediul câtorva exemple la fracţii zecimale.

Exemplu: Să se **rotunjească** fracţia zecimală 16, 8546 la:
a) prima zecimală;
b) a doua zecimală;
c) a treia zecimală.
Răspuns:
a) 16,9;
b) 16,86;
c) 16,85.

Exemplu: Să se completeze tabelul *B.II.3* :

Tabelul B.II.3. Exemple de aproximări

Fracţia zecimală finită	**Aproximări cu o unitate**		**Aproximări cu o zecime**		**Aproximări cu o sutime**	
	prin lipsă	**prin adaos**	**prin lipsă**	**prin adaos**	**prin lipsă**	**prin adaos**
19,137	19	20	19,1	19,2	19,13	19,14
10,287	10	11	10,2	10,3	10,28	10,29
124,5948	124	125	124,5	124,6	124,59	124,6

Exemplu: Să se scrie numerele zecimale cu cel mult trei zecimale cuprinse între 6,93 şi 6,94.
Răspuns: 6,931; 6,932; 6,933; 6,934; 6,935; 6,936; 6,937; 6,938; 6,939.

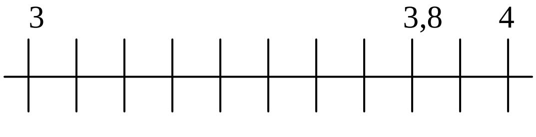
B.II.4. COMPARAREA, ORDONAREA, REPREZENTAREA PE AXĂ A FRACŢIILOR ZECIMALE

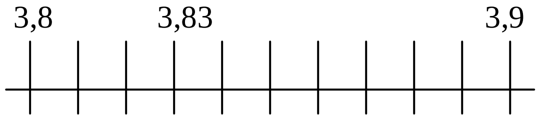
Pentru a ***compara*** două fracţii zecimale finite, se compară mai întâi părţile lor întregi, cea mai mare fiind fracţia care are partea întreagă mai mare. Relaţiile de ordonare sunt cele cunoscute: <, >, =.
Exemplu: 34, 679 > 33,999, deoarece 34 > 33.
Dacă părţile întregi sunt egale, se compară părţile zecimale.
Exemplu: 27, 578 < 27, 62, deoarece 5 < 6.
0,03 > 0,029, deoarece 3 >2.

Ordonarea se face la fel: pornind de la partea întreagă către părţile zecimale.
Exemplu: Să se ordoneze crescător numerele: 5,18; 2,05; 2,03; 0,125; 5,29; 6,314.
Răspuns: 0,125; 2,03; 2,05; 5,18; 5,29; 6,314.

Reprezentarea grafică a fracţiilor zecimale presupune:
- Unitatea de măsură se împarte în 10 segmente de lungimi egale, lungimea unui segment fiind o zecime;
- Segmentul de lungime o zecime se împarte în zece segmente de lungimi egale, lungimea unui segment fiind o sutime, etc.

Exemplu: Pe axa numerelor sunt prezentate numerele 3 şi 4; să se reprezinte fracţia zecimală 3,8. Apoi pe axă se prezintă 3,8 şi 3,9; să se reprezinte 3,83.
Rezolvare:





B.II.5. ADUNAREA FRACŢIILOR ZECIMALE CARE AU UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE

Suma a două fracţii zecimale cu un număr finit de zecimale se obţine astfel: se aşează una sub cealaltă astfel încât partea întreagă să fie sub partea întreagă, virgula sub virgulă, zecimile sub zecimi, etc. şi apoi se adună obişnuit, iar virgula se coboară la rezultat.

Exemplu:

$$\begin{array}{r} 457,234 + \\ \underline{19,14} \\ 476,374 \end{array}$$

Suma a două fracţii zecimale se numeşte ***adunarea fracţiilor zecimale*** şi are proprietatea de comutativitate, asociativitate şi are elementul neutru egal cu 0.

B.II.6. SCĂDEREA FRACŢIILOR ZECIMALE CARE AU UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE NENULE

Diferenţa a două fracţii zecimale cu un număr finit de zecimale se obţine astfel: se aşează una sub cealaltă astfel încât partea întreagă să fie sub partea întreagă, virgula sub virgulă, zecimile sub zecimi, etc. şi apoi se scad obişnuit, iar virgula se coboară la rezultat.

Exemplu:

$$\begin{array}{r} 457,234 - \\ \underline{19,14} \\ 438,094 \end{array}$$

Diferenţa a două fracţii zecimale se numeşte ***scăderea fracţiilor zecimale***.

B.II.7. ÎNMULŢIREA FRACŢIILOR ZECIMALE

1. Înmulţirea unei fracţii zecimale cu o putere a lui 10

La înmulţirea unei fracţii zecimale cu o putere a lui 10, se mută virgula spre dreapta peste atâtea cifre cât este exponentul lui 10.

Exemple:

$$198{,}346 \cdot 10 = 1983{,}46$$

$$2478{,}9789 \cdot 10^2 = 247897{,}89$$

$$8978{,}9789 \cdot 10^3 = 8978978{,}9$$

2. Înmulţirea a două fracţii zecimale care au un număr finit de zecimale nenule

Două numere zecimale se înmulţesc astfel: se efectuează înmulţirea numerelor neţinând cont de virgulă, iar la rezultat se despart prin virgulă, de la dreapta la stânga, atâtea cifre zecimale câte au cele două numere zecimale împreună.

Exemplu:

$$\begin{array}{r} 1,5\ * \\ \underline{2,3} \\ 45 \\ \underline{30} \\ 3,45 \end{array}$$

Înmulţirea fracţiilor zecimale are proprietatea de comutativitate, asociativitate, distributivitate faţă de adunare şi scădere şi are elementul neutru egal cu 1.

B.II.8. RIDICAREA LA PUTERE CU EXPONENT NUMĂR NATURAL A UNEI FRACŢII ZECIMALE CARE ARE UN NUMĂR FINIT DE ZECIMALE

Numărul de zecimale al unei puteri a unui număr zecimal este egal cu produsul dintre numărul de zecimale ale bazei şi exponentul puterii.

Exemplu: $0{,}002^3$ are $3 \cdot 3 = 9$ zecimale, adică: $0{,}000000008$.

Oricare ar fi numerele naturale **m** şi **n**, iar **a** şi **b** două fracţii zecimale finite, atunci:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

$a^m : a^n = a^{m-n}$, dacă $m \geq n$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a : b)^n = a^n : b^n$

$a^0 = 1,\ a \neq 0,\ \ a^1 = a$

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a,\ \ n \in N^*$

Aceste proprietăţi se aplică exact ca şi la numere naturale.

B.II.9. ÎMPĂRŢIREA A DOUĂ NUMERE NATURALE CU REZULTAT FRACŢIE ZECIMALĂ. PERIODICITATEA

Orice fracţie ordinară se poate transforma într-o fracţie zecimală prin împărţirea numărătorului la numitor.

Exemplu: $\frac{42}{5}$

42	5
40	8, 4
20	
20	
= =	

Dacă numitorul unei fracţii ordinare ireductibile conţine şi alţi factori decât puteri ale lui 2 şi ale lui 5, atunci împărţirea numărătorului la numitor este nesfârşită.

Exemple:

50	7
49	7,142
10	
7	
30	
28	
20	
14	
6	
etc	

37	15
30	2,466
70	
60	
100	
90	
100	
90	
10	
etc	

$\frac{50}{7}$ este o ***fracţie periodică simplă*** cu perioada 142 şi va fi notată 7,(142) şi se citeşte 7 virgulă perioadă 142.

$\frac{37}{15}$ este o ***fracţie periodică mixtă*** cu perioada 6 şi partea neperiodică 4 şi va fi notată 2,4(6) şi se citeşte 2 virgulă 4 perioadă 6.

B.II.10. ÎMPĂRŢIREA UNEI FRACŢII ZECIMALE FINITE LA O PUTERE A LUI 10

Pentru a împărţi o fracţie zecimală finită la o putere a lui 10, se mută virgula la stânga peste un număr de cifre egal cu exponentul lui 10.

Exemple: $8{,}23:100 = 8{,}23:10^2 = 0{,}0823$

$1259{,}569:1000 = 1259{,}569:10^3 = 1{,}259569$

B.II.11. ÎMPĂRŢIREA UNUI NUMĂR NATURAL LA O FRACŢIE ZECIMALĂ FINITĂ

Se efectuează în acelaşi mod ca şi împărţirea numerelor naturale.

Exemple: $31:0{,}5 = 310:5 = 62$

$47:1{,}5 = 470:15 = 31{,}(3)$

$167:0{,}12 = 16700:12 = 1391{,}(6)$

B.II.12. ÎMPĂRŢIREA A DOUĂ FRACŢII ZECIMALE FINITE

Exemplu: $1{,}35:0{,}7 = 13{,}5:7 = 1{,}928...$

B.II.13. TRANSFORMAREA UNEI FRACŢII ZECIMALE ÎNTR-O FRACŢIE ORDINARĂ

1. O fracţie zecimală finită se transformă într-o fracţie ordinară cu numărătorul egal cu numărul obţinut prin eliminarea virgulei şi numitorul o putere a lui zece cu exponentul egal cu numărul de zecimale.

Exemple: $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{4}{10^2}$; $2{,}234 = \frac{2234}{1000} = \frac{2234}{10^3}$.

2. O fracţie zecimală periodică simplă cu partea întreagă nulă se transformă într-o fracţie ordinară al cărei numărător se obţine din numărul zecimal prin omiterea virgulei, iar numitorul este format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

Exemple: $0{,}(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0{,}(15) = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$.

3. O fracţie zecimală periodică mixtă cu partea întreagă nulă se transformă într-o fracţie ordinară al cărei numărător este diferenţa dintre numărul natural format din partea neperiodică urmată de perioadă şi numărul natural format din partea neperiodică, iar numitorul este format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada şi atâtea zerouri câte cifre are partea neperiodică.

Exemple: $0{,}1(3) = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$; $0{,}2(15) = \frac{215-2}{990} = {}^{(3}\frac{213}{990} = \frac{71}{330}$; $0{,}0(25) = {}^{(5}\frac{25}{990} = \frac{5}{198}$

Observaţie: Dacă fracţia periodică simplă sau mixtă are partea întreagă nenulă, aceasta se adună cu fracţia ordinară obţinută după regulile 1 sau 2.

Exemple: $2{,}(4) = 2\frac{4}{9} = \frac{2\cdot 9+4}{9} = \frac{22}{9}$; $4{,}1(2) = 4\frac{12-1}{90} = \frac{4\cdot 90+11}{90} = \frac{377}{90}$.

B.II.14. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAŢIILOR CU FRACŢII ZECIMALE FINITE

Se respectă regulile prezentate la numerele naturale.

Exemplu: $14{,}4:10-14{,}4:100-14{,}4:1000=1{,}44-0{,}144-0{,}0144=1{,}2816$

B.II.15. MEDIA ARITMETICĂ A DOUĂ FRACŢII ZECIMALE FINITE

Media aritmetică a **n** numere raţionale se obţine împărţind suma acestor numere la **n**. Regula funcţionează la fel ca şi la numere naturale (a se vedea paragraful A.I.11).

- Media aritmetică a două numere raţionale este mai mică decât cel mai mare dintre ele şi mai mare decât cel mai mic dintre ele, dacă cele două numere sunt diferite şi este egală cu fiecare dintre ele, dacă cele două numere sunt egale.
- Media aritmetică a mai multor numere raţionale este mai mică decât cel mai mare dintre ele şi mai mare decât cel mai mic dintre ele, dacă cel puţin două dintre ele sunt diferite.

Exemplu: Calculaţi media aritmetică a numerelor: 0,15; 0,3; 1.

Rezolvare: $m_a=\dfrac{0{,}15+0{,}3+1}{3}=\dfrac{1{,}45}{3}=0{,}48(3)$

B.II.16. ECUAŢII ŞI INECUAŢII

Exerciţii:

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $235+x=347{,}59$

b) $x^2=1{,}44$

c) $x^3=0{,}027$

d) $x:1{,}1=1{,}1^3$

Rezolvare:

a) $235+x=347{,}59\Rightarrow x=347{,}59-235\Rightarrow x=112{,}59$

b) $x^2=1{,}44\Rightarrow x^2=\dfrac{144}{100}\Rightarrow x^2=\left(\dfrac{12}{10}\right)^2\Rightarrow x^2=(1{,}2)^2\Rightarrow x=1{,}2$

c) $x^3=0{,}027\Rightarrow x^3=\dfrac{27}{1000}\Rightarrow x^3=\left(\dfrac{3}{10}\right)^3\Rightarrow x^3=(0{,}3)^3\Rightarrow x=0{,}3$

d) $x:1{,}1=1{,}1^3\Rightarrow x=1{,}1^4=1{,}4641$

2. Să se rezolve inecuaţiile în N:

a) $x+3{,}4<7{,}3$

b) $x\cdot 3{,}8<10{,}5$

c) $14{,}7-x>11{,}3$

Rezolvare:

a) $x+3{,}4<7{,}3\Rightarrow x<3{,}9\Rightarrow x\in\{0;1;2;3\}$

b) $x\cdot 3{,}8<10{,}5\Rightarrow x<10{,}5:3{,}8\Rightarrow x<2{,}76...\Rightarrow x\in\{0;\ 1;\ 2\}$

c) $14{,}7-x>11{,}3\Rightarrow 14{,}7-11{,}3>x\Rightarrow 3{,}4>x\Rightarrow x\in\{0;1;2;3\}$

C.II. EXERCIŢII RECAPITULATIVE

C.II.1. FRACŢII ORDINARE

1. Ce parte dintr-o săptămână prezintă:
a) o zi ; **b)** trei zile; **c)** 28 de zile ?
Răspuns:
a) $\frac{1}{7}$; **b)** $\frac{3}{7}$; **c)** $\frac{28}{7}$?

2. Determinaţi numărul natural x pentru care fiecare din fracţiile de mai jos sunt supraunitare:
a) $\frac{5}{x-1}$; **b)** $\frac{5x+2}{3x+4}$
Rezolvare:
a) $5 > x-1 \Rightarrow 6 > x \Rightarrow x < 6 \Rightarrow x\{2;3;4;5\}$
Pentru $x = 0 \Rightarrow x-1 < 0$
Pentru $x = 1 \Rightarrow x = 1,$ dar pentru ca fracţia să aibă sens: $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

b) $5x+2 > 3x+4 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in \{2,3,...\}$

3. Fie fracţia $\frac{2n+7}{3n+1}$, $n \in N$. Determinaţi valorile lui n în următoarele situaţii:
a) fracţia este supraunitară;
b) fracţia este echiunitară;
c) fracţia este subunitară.
Rezolvare:
a) $2n+7 > 3n+1 \Rightarrow 6 > n \Rightarrow n < 6 \Rightarrow n \in \{0;1;2;3;4;5\}$
b) $2n+7 = 3n+1 \Rightarrow n = 6$
c) $2n+7 < 3n+1 \Rightarrow 6 < n \Rightarrow n > 6 \Rightarrow n \in \{7;8...\}$

4. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) $\frac{2^{93}}{3^{62}}$ este fracţie supraunitară.
b) $\frac{8^{15}}{32^{9}}$ este fracţie echiunitară.
Rezolvare:
a) $\frac{2^{93}}{3^{62}} = \frac{2^{3\cdot 31}}{3^{2\cdot 31}} = \frac{8^{31}}{9^{31}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{31}$ **Fals**
b) $\frac{8^{15}}{32^{9}} = {}^{(2^{30}}\frac{2^{30}}{2^{45}} = \frac{1}{2^{15}}$ **Fals**

5. Să se simplifice fracţia: $\frac{10a+10b}{25x+25y}$.
Rezolvare: $\frac{10a+10b}{25x+25y} = {}^{(5}\frac{10\cdot(a+b)}{25\cdot(x+y)} = \frac{2\cdot(a+b)}{5\cdot(x+y)}$

C.II.2. FRACŢII ZECIMALE

1. Completaţi tabelul după modelul dat:

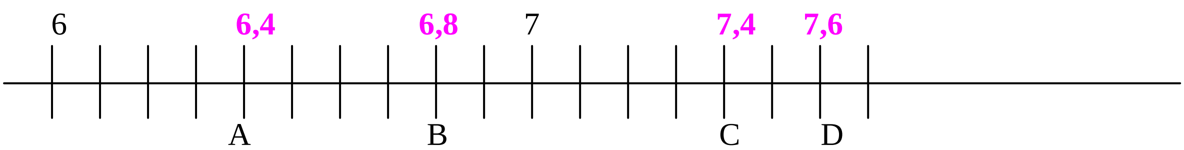
Şase întregi şi treizeci şi patru de sutimi	6,34	$6+\frac{3}{10}+\frac{4}{100}$	$6+\frac{34}{100}$	$\frac{634}{100}$
O sută două zeci şi patru de întregi şi şapte sute treizeci şi şase de miimi	**124,736**	$124+\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{6}{1000}$	$124+\frac{736}{1000}$	$\frac{124736}{1000}$
O sută patru zeci şi trei de întregi şi şaptesprezece sutimi	143,17	$143+\frac{1}{10}+\frac{7}{100}$	$143+\frac{17}{100}$	$\mathbf{\frac{14317}{100}}$
Doisprezece întregi şi douăzeci şi cinci de sutimi	12,25	$12+\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$	$\mathbf{12+\frac{25}{100}}$	$\frac{1225}{100}$
Doi întregi şi douăzeci şi cinci de sutimi	2,25	$\mathbf{2+\frac{2}{10}+\frac{5}{100}}$	$2+\frac{25}{100}$	$\frac{225}{100}$

2. Scrieţi sub formă de fracţii zecimale:

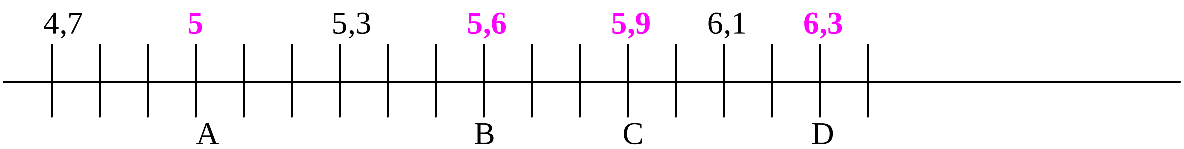
a) 2 m şi 47 mm = 2 m şi 0,047 m = 2,047 m
b) 4 l şi 59 cl = 4 l şi 0,59 l = 4,59 l
c) 5 g şi 50 mg = 5 g şi 0,05 g = 5,05 g
d) 1 kg şi 4 mg = 1000 g şi 0,004 g = 1000,004 g

3. Precizaţi coordonatele punctelor A, B, C, D:

a)



b)



4. Calculaţi: $0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}3\cdot 0{,}4+0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}6\cdot 0{,}7$.

Rezolvare:

$$0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}3\cdot 0{,}4+0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}6\cdot 0{,}7=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{7}{10}=$$

$$=\frac{2+6+12+20+30+42}{100}=\frac{112}{100}=1{,}12$$

5. Calculaţi: $(7{,}47-4{,}95)\cdot 10+12{,}7\cdot 1{,}2$.

Rezolvare:

$$(7{,}47-4{,}95)\cdot 10+12{,}7\cdot 1{,}2=\left(\frac{747}{100}-\frac{495}{100}\right)\cdot 10+\frac{127\cdot 12}{100}=\frac{252}{100}\cdot 10+\frac{1524}{100}=25{,}2+15{,}24=40{,}44$$

6. Aflaţi două numere ştiind că media lor aritmetică este 41,1 şi diferenţa numerelor este 32,4.

Rezolvare:

Fie a şi b cele două numere şi a>b. Rezultă:

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=41{,}4\\ a-b=32{,}4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=82{,}8\\ a-b=32{,}4\end{cases}$$

Adunăm termen cu termen cele două ecuaţii. Rezultă:

$2\cdot a=115{,}2\Rightarrow a=115{,}2:2=57{,}6\Rightarrow b=82{,}8-57{,}6=25{,}2$.

Deci numerele căutate sunt:

$$\begin{cases}a=57{,}6\\ b=25{,}2\end{cases}$$

8. Rezolvaţi (determinaţi necunoscutele):

a) $6{,}98+3{,}4x=10{,}41$

b) $2\cdot(x+4{,}3)=17{,}5$

c) $\overline{xy},5+\overline{x,y}=19{,}2$

d) $[12+(57{,}3-x):0{,}1]:10^2=3$

e) $x\cdot 0{,}2<4,\quad x\in N$

Rezolvare:

a) $6{,}98+3{,}4x=10{,}41\Rightarrow 3{,}4x=10{,}41-6{,}98\Rightarrow 3{,}4x=3{,}43\Rightarrow x=3$

b) $2\cdot(x+4{,}3)=17{,}5\Rightarrow x+4{,}3=8{,}75\Rightarrow x=8{,}75-4{,}3\Rightarrow x=4{,}45$

c) $\overline{xy},5+\overline{x,y}=19{,}2\Rightarrow x=1;\ y=7$

d) $[12+(57{,}3-x):0{,}1]:10^2=3\Rightarrow 12+(57{,}3-x):0{,}1=300\Rightarrow(57{,}3-x):0{,}1=288$

$$57{,}3-x=288\cdot 0{,}1\Rightarrow 57{,}3-x=288\cdot\frac{1}{10}\Rightarrow 57{,}3-x=28{,}8\Rightarrow x=57{,}3-28{,}8\Rightarrow x=28{,}5$$

e) $x\cdot 0{,}2<4\Rightarrow x\cdot\dfrac{2}{10}<4\Rightarrow 2\cdot x<40\Rightarrow x<20\Rightarrow x\in\{0;1;2;3;\ldots 18;19\}$

A.III. ELEMENTE DE GEOMETRIE

A.III. 1. DREAPTA, SEGMENTUL DE DREAPTĂ, MĂSURAREA UNUI SEGMENT DE DREAPTĂ

Punctul şi ***dreapta*** sunt noţiunile cele mai simple ale geometriei .
Punctele se notează cu litere mari ale alfabetului A, B, C,… (*figura III.1*), iar dreptele cu litere mici: a, b, c,… (*figura III.2*).

Exemple:

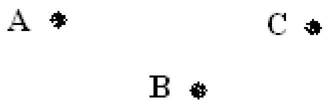


Figura III.1. Reprezentarea punctelor

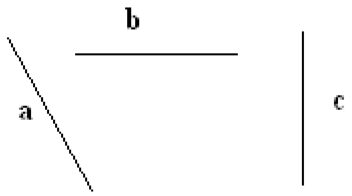


Figura III.2. Reprezentarea dreptelor

Poziţiile relative a două sau mai multe puncte în plan

Două ***puncte*** pot fi ***diferite*** şi se notează $A \neq B$ (*figura III.3*) sau pot exista ***puncte care să coincidă*** şi se notează $C = D$ (*figura III.4*).

Exemple:

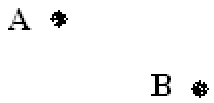


Figura III.3.
Reprezentarea punctelor diferite $A \neq B$

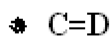


Figura III.4.
Reprezentarea punctelor care coincid $C = D$

Puncte coliniare = punctele care aparţin unei drepte.
În exemplul din *figura III.5* : $A \in a$; $B \in a$; $C \in a$.

Puncte necoliniare = punctele care nu aparţin unei drepte.
În exemplul din *figura III.6* : $D \in d$; $E \in d$; $F \notin d$.

***Puncte de aceeaşi parte a dreptei* c: Y** şi **Z** - *figura III.7.*
***Puncte de o parte şi de cealaltă a dreptei* c: X** - *figura III.7.*

Exemple:

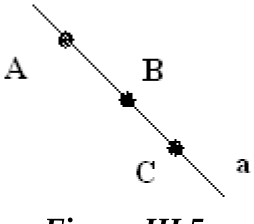


Figura III.5.
Puncte coliniare

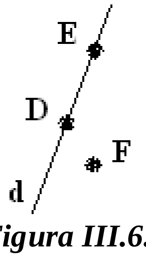


Figura III.6.
Puncte necoliniare

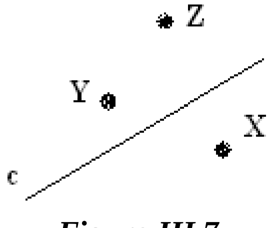


Figura III.7.
Puncte de pe aceeaşi parte sau de pe o parte şi de alta a dreptei

Semidreapta = se notează [OA , unde O este originea semidreptei - *figura III.8.*

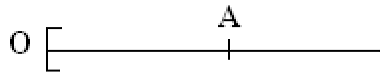


Figura III.8. Reprezentarea unei semidrepte

Poziţiile relative a două drepte în plan

Drepte concurente = două drepte care se intersectează într-un punct.
În exemplul din *figura III.9,* $a \cap b = \{O\}$.

Drepte perpendiculare = două drepte situate în acelaşi plan, care formează un unghi drept.
În exemplul din *figura III.10* , $c \perp d$.

Drepte paralele = două drepte a căror intersecţie este mulţimea vidă..
În exemplul din *figura III.11* , $e \parallel f$.

Exemple:

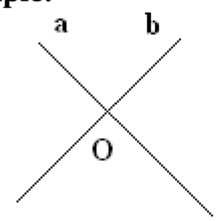


Figura III.9. Reprezentarea a două drepte concurente

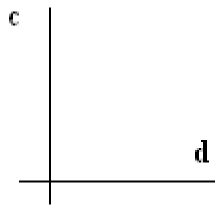


Figura III.10. Reprezentarea a două drepte perpendiculare

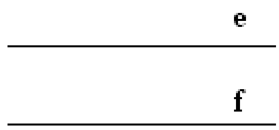


Figura III.11. Reprezentarea a două drepte paralele

Segment de dreaptă = presupune două puncte A şi B pe o dreaptă d şi se notează [AB] ; punctele A şi B se numesc extremităţile segmentului - *figura III.12* .
Segmentele se măsoară cu rigla gradată. Două sau mai multe segmente egale se pot obţine şi prin aceeaşi deschidere de compas.
Prin măsurarea cu rigla gradată, oricărui segment îi corespunde un anumit număr de unităţi de măsură, numit ***lungimea segmentului*** - *figura III.13* .

Exemple:

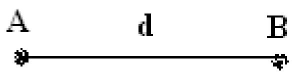


Figura III.12.Reprezentarea unui segment de dreaptă

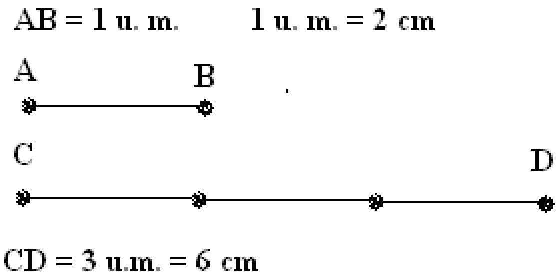


Figura III.13. Reprezentarea lungimii segmentului CD

În *figura III.14* se prezintă operaţiile de adunare şi scădere pentru segmente.

Exemplu:

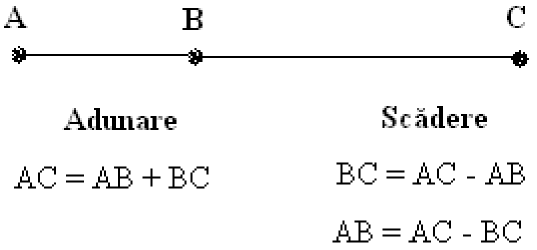


Figura III.14. Reprezentarea operaţiilor cu segmente

A.III. 2. UNGHIUL, TRIUNGHIUL, PATRULATERUL, CERCUL

Unghiul = se obţine desenând două semidrepte [OA şi [OB care au aceeaşi origine O. Originea semidreptelor se numeşte *vârful unghiului*, iar cele două semidrepte se numesc laturi – *figura III.15*. În *figura III.16* se prezintă diferite tipuri de unghiuri. Dacă laturile sunt perpendiculare [MN $\perp$ [NP, unghiul este de 90 de grade şi se numeşte unghi drept – *figura III.16 b*.

Exemple:

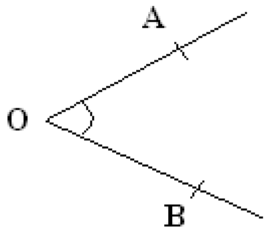
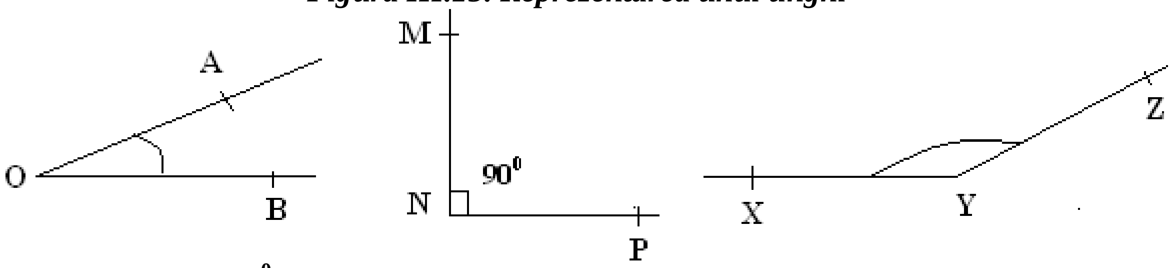


Figura III.15. Reprezentarea unui unghi



***a) ascuţit:* < 90^0**   ***b) drept:* 90^0**   ***c) obtuz:* > 90^0**

Figura III.16. Reprezentarea unghiului

Triunghiul = aşa cum îi spune şi numele are trei unghiuri şi evident trei laturi aferente.
Punctele din interiorul triunghiului se numesc ***puncte interioare*** (D), iar cele din exteriorul triunghiului se numesc ***puncte exterioare*** (E).
În *figura III.17* sunt prezentate aceste noţiuni.

Exemplu:

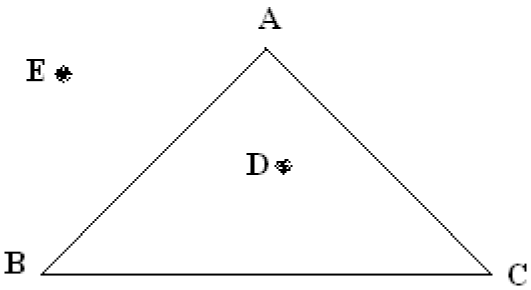


Figura III.17. Reprezentarea unui triunghi

Patrulaterul = aşa cum îi spune şi numele are patru unghiuri, evident patru laturi aferente şi două diagonale [MP], [QN]. Funcţionează şi aici, ca şi la triunghi noţiunile de puncte interioare (D) şi exterioare (E). În *figura III.18* sunt prezentate aceste noţiuni.

Paralelogramul = patrulaterul cu laturile opuse paralele două câte două: $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$; [AC] şi [BD] sunt diagonale - *figura III.19.*

Dreptunghi = paralelogram cu unghiuri drepte: $EF \parallel HG$; $EH \parallel FG$; $EH \perp HG$; [EG] şi [HF] sunt diagonale - *figura III.20.*

Romb = paralelogram cu laturile de lungimi egale: $KN \parallel LM$; $NM \parallel KL$; KN=NM= ML=LK; [KM] şi [NL] sunt diagonale - *figura III.21.*

Pătrat = dreptunghi cu laturile de lungimi egale: $OP \parallel RS$; $PS \parallel OR$; $OR \perp RS$; OP=PS= SR=RO; [OS] şi [PS] sunt diagonale - *figura III.22.*

Trapez = patrulater cu două laturi opuse paralele şi două neparalele: $XY \parallel TZ$; $YZ \nparallel XT$; [XZ] şi [YT] sunt diagonale - *figura III.23.*

Exemple:

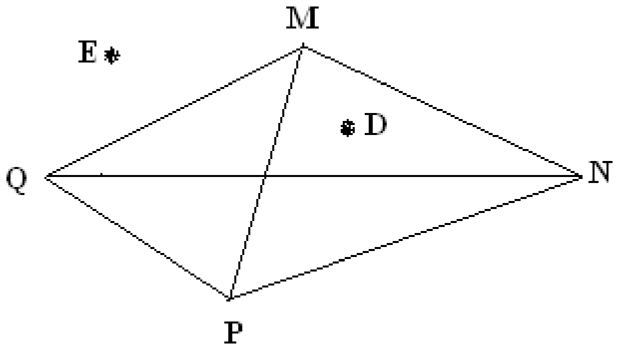


Figura III.18. Reprezentarea unui patrulater

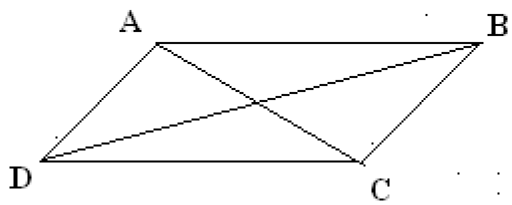


Figura III.19. Reprezentarea unui paralelogram

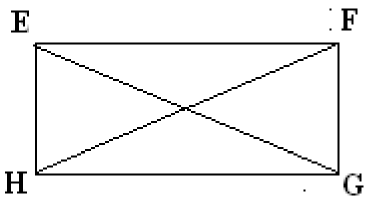


Figura III.20. Reprezentarea unui dreptunghi

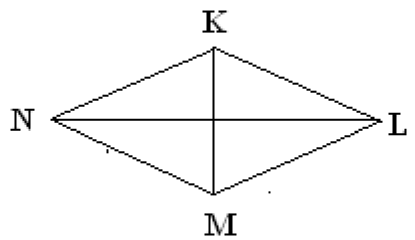


Figura III.21. Reprezentarea unui romb

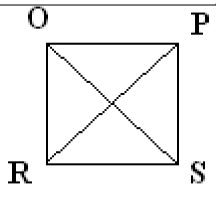


Figura III.22. Reprezentarea unui pătrat

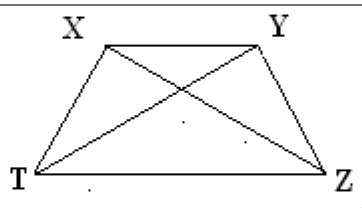


Figura III.23. Reprezentarea unui trapez

Cercul = se trasează cu compasul; cuprinde elementele: raza [OC], diametrul [AB] = 2*[OC], coarda [FG], punct interior cercului D, punct exterior cercului E - *figura III.24.*

Exemplu:

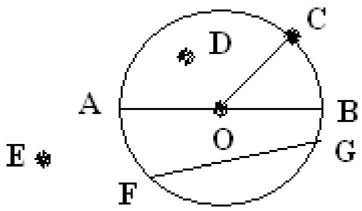


Figura III.24. Reprezentarea unui cerc

A.III. 3. SIMETRIA, AXA DE SIMETRIE ŞI TRANSLAŢIA

Două figuri F1 şi F2 sunt ***simetrice*** faţă de o dreaptă **d**, dacă prin pliere după dreapta **d** figurile coincid.

Două figuri F1 şi F2 sunt ***simetrice*** faţă de o dreaptă **d**, dacă orice punct al figurii F1 are ca simetrie faţă de dreapta d un punct al figurii F2 şi invers. Dreapta **d** se numeşte **axă de simetrie.**

Exemplu: În *figura III.25* se prezintă două puncte simetrice **A**, **B**, două drepte simetrice **[CD]**, **[C*D*]** şi două triunghiuri simetrice **XZY** şi **X*Y*Z***, faţă de axa de simetrie care este dreapta **d**.

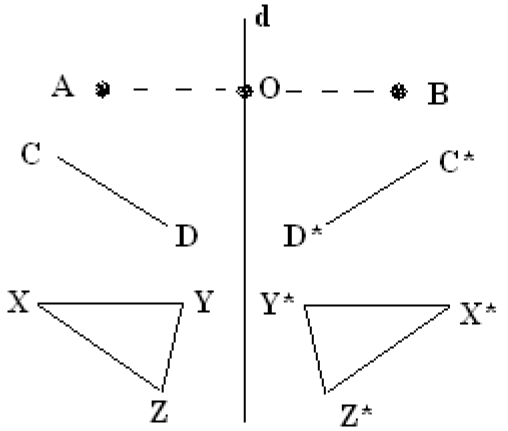


Figura III.25. Reprezentarea simetriei

Translaţia unei figuri pe o direcţie şi cu o distanţă dată se face deplasând fiecare punct al figurii pe un drum paralel cu direcţia dată, astfel încât distanţa dintre orice punct deplasat şi punctul iniţial să fie egală cu distanţa dată

Exemplu: În *figura III.26* se prezintă translaţia unei figuri. Paşii de realizare ai acestei translaţii sunt: se desenează $s \parallel d$ care conţine punctul M; în sensul indicat de dreapta **d** , pe dreapta **s** se alege punctul M*, astfel încât MM* = AB; similar pentru celelalte puncte. Translaţia se realizează în sensul arătat de AB.

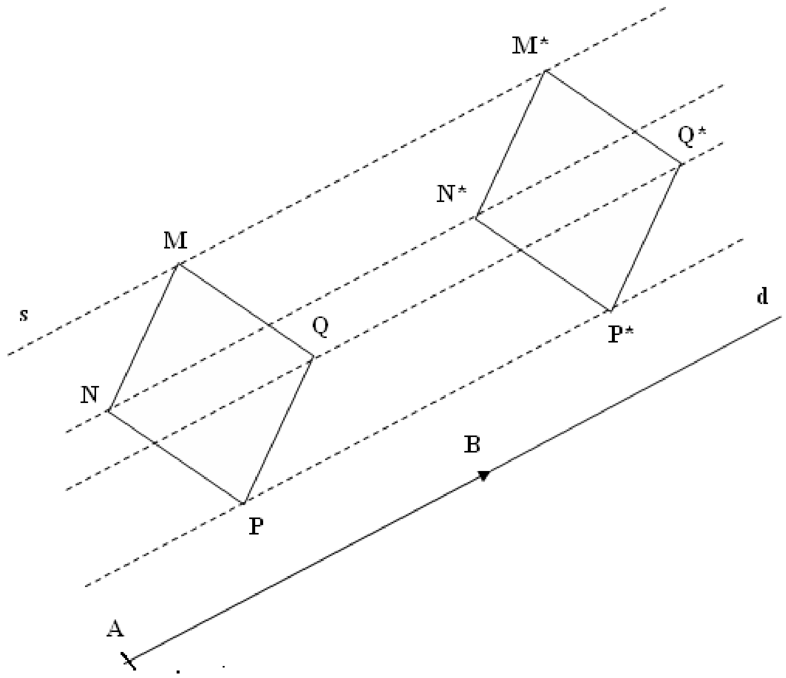


Figura III.26. Translaţia unei figuri

A.III. 4. CUBUL, PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC

Paralelipipedul dreptunghic este un corp mărginit de şase feţe dreptunghiulare. Elementele unui paralelipiped dreptunghic sunt: feţele, muchiile, vârfurile – *figura III.27*. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt: lungimea (L), lăţimea (l) şi înălţimea (h).

Cubul este un paralelipiped dreptunghic ale cărei feţe sunt pătrate – *figura III.28*.

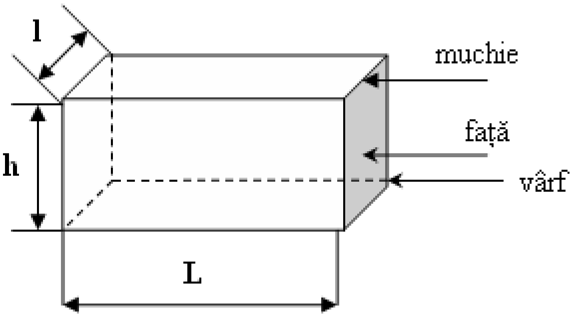


Figura III.27. Reprezentarea unui paralelipiped dreptunghic

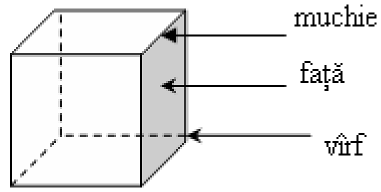


Figura III.28. Reprezentarea unui cub

B.III. UNITĂŢI DE MĂSURĂ

B.III.1. UNITĂŢI DE MĂSURĂ PENTRU LUNGIME

Multiplii metrului: decametrul (dam), hectometrul (hm), kilometrul (km).
Submultiplii metrului: decimetrul (dm), centimetrul (cm), milimetrul (mm).

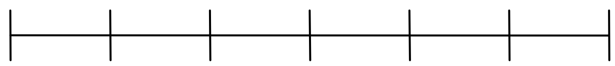
1km	**1hm**	**1dam**	**1m**	**1dm**	**1cm**	**1mm**
1000m	**100m**	**10m**	**1m**	**0,1m**	**0,01m**	**0,001m**

Transformări: Pentru a transforma o unitate de măsură în alta utilizând următoarele reguli:

- Unităţile mari se transformă în unităţi mici prin înmulţirea cu 10^n,
- Unităţile mici se transformă în unităţi mari prin împărţire cu 10^n,

în care n este numărul de segmente dintre unităţile implicate în transformări.
Se poate folosi o schemă de tipul:

km hm dam m dm cm mm



Exemple: Transformaţi în hectometri:
a) 13 km;
b) 14,5 m;
c) 500 dm;
d) 9,2 mm.
Rezolvare:
a) 13 km = $13 \cdot 10 = 130$ hm;
b) 14,5 m = $14{,}5 : 10^2 = 0{,}145$ hm;
c) 500 dm = $500 : 10^3 = 0{,}5$ hm;
d) 9,2 mm.= $9{,}2 : 10^5 = 0{,}000092$ hm.

Perimetrul pătratului [OPRS] din *figura III.22* este: **P [OPRS] = 4 · OP**
Perimetrul dreptunghiului [EFGH] din *figura III.20* este: **P [EFGH] = 2· (EF + FG)**

B.III.2. UNITĂŢI DE MĂSURĂ PENTRU ARIE

Unitatea de măsură pentru măsurarea ariei (suprafeţei) este metrul pătrat (m^2), dar se utilizează şi multiplii şi submultiplii acestuia.
Multiplii metrului pătrat: kilometru pătrat (km^2), hectometru pătrat (hm^2), decametru pătrat (dam^2);
Submultiplii metrului pătrat: decimetru pătrat (dm^2), centimetru pătrat (cm^2), milimetru pătrat(mm^2).

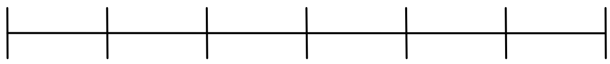
$1km^2$	**$1hm^2$**	**$1dam^2$**	**$1m^2$**	**$1dm^2$**	**$1cm^2$**	**$1mm^2$**
1000^2m^2	**100^2m^2**	**10^2m^2**	**$1m^2$**	**$(1:10^2)m^2$**	**$(1:100^2)m^2$**	**$(1:1000^2)m^2$**

Alte unităţi de măsură pentru suprafeţe sunt:
hectarul, 1 ha = 100^2 m^2 = $1hm^2$
arul, 1 ar = 10^2 m^2 = $1dam^2$

Transformări: Pentru a transforma o unitate de măsură în alta utilizând următoarele reguli:
- Unităţile mari se transformă în unităţi mici prin înmulţirea cu 10^{2n},
- Unităţile mici se transformă în unităţi mari prin împărţire cu 10^{2n},

în care n este numărul de segmente dintre unităţile implicate în transformări.
Se poate folosi o schemă de tipul:

km^2 hm^2 dam^2 m^2 dm^2 cm^2 mm^2



Exemple: Transformaţi în centimetri pătraţi:
a) 24,3 dam^2;
b) 235,78 m^2;
c) 500 dm^2;
d) 98,22 mm^2.
Rezolvare:
a) 24,3 dam^2 = 24,3 $\cdot 10^6$ = 24300000 cm^2
b) 235,78 m^2 = 235,78 $\cdot 10^4$ = 2357800 cm^2
c) 500 dm^2 = 500 $\cdot 10^2$ = 50000 cm^2
d) 98,22 mm^2 = 98,22 : 10^2 = 0,9822 cm^2

Calcului ariilor unor suprafeţe** – figurile III.29* şi *III.30**.

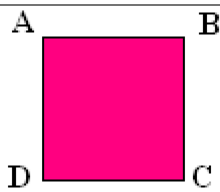


Figura III.29.
Reprezentarea suprafeţei unui pătrat

Aria [ABCD] = A [ABCD] = AB^2

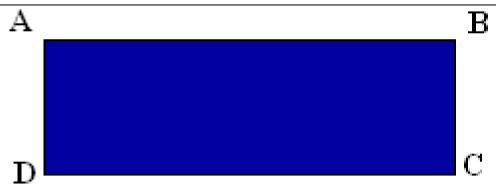


Figura III.30.
Reprezentarea suprafeţei unui dreptunghi

Aria [ABCD] = A [ABCD] = AB · BC

B.III.3. UNITĂŢI DE MĂSURĂ PENTRU VOLUM

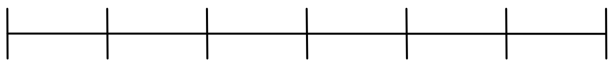
Unitatea de măsură pentru măsurarea volumelor este metrul cub (m^3). Metrul cub este volumul unui cub cu muchia de 1m.
Multiplii metrului cub: kilometru cub (km^3), hectometru cub (hm^3), decametru cub (dam^3);
Submultiplii metrului pătrat: decimetru cub (dm^3), centimetru cub (cm^3), milimetru cub (mm^3).

1km³	**1hm³**	**1dam³**	**1m³**	**1dm³**	**1cm³**	**1mm³**
1000^3m^3	**100^3m^3**	**10^3m^3**	**$1m^3$**	**$(1:10^3)m^3$**	**$(1:100^3)m^3$**	**$(1:1000^3)m^3$**

Transformări: Pentru a transforma o unitate de măsură în alta utilizând următoarele reguli:
- Unităţile mari se transformă în unităţi mici prin înmulţirea cu 10^{3n},
- Unităţile mici se transformă în unităţi mari prin împărţire cu 10^{3n},

în care n este numărul de segmente dintre unităţile implicate în transformări.
Se poate folosi o schemă de tipul:

km^3 hm^3 dam^3 m^3 dm^3 cm^3 mm^3



Exemple: Transformaţi în decametri cubi:
a) 24,3 hm^3;
b) 235,78 m^3;
c) 500 dm^3;
d) 762231198,22 mm^3.
Rezolvare:
a) 24,3 hm^3 = 24,3 · 10^3 = 24300 dam^3
b) 235,78 m^3 = 235,78 : 10^3 = 0,23578 dam^3
c) 500 dm^3 = 500 : 10^6 = 0,0005 dam^3
d) 762231198,22 mm^3 = 762231198,22: 10^{12} = 0,00076223119822 dam^3

Calculul volumelor unor corpuri** – figurile III.31* şi *III.32.

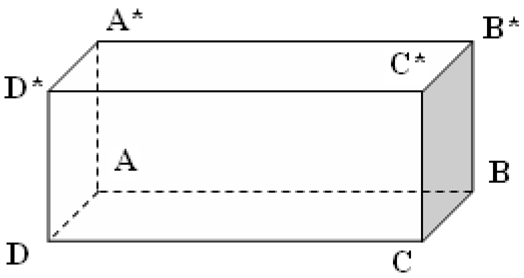


Figura III.31.
Reprezentarea unui paralelipiped dreptunghic

V [ABCDA*B*C*D*] = AB · BC · BB*

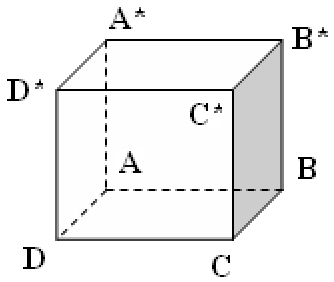


Figura III.32.
Reprezentarea unui cub

V [ABCDA*B*C*D*] = AB^3

B.III.4. UNITĂŢI DE MĂSURĂ PENTRU CAPACITATE

În practică se foloseşte termenul de capacitate pentru volumul unor vase (sticle, butoaie) şi ca unitate de măsură, litrul (*l*).

1 litru este volumul unui cub cu muchia de 1 dm.

1 *l* = 1 dm^3

Multiplii litrului: decalitrul (da*l*), hectolitrul (h*l*), kilolitrul (k*l*).

Submultiplii litrului: decilitrul (d*l*), centilitrul (c*l*), mililitrul (m*l*).

1k*l*	1h*l*	1da*l*	1*l*	1d*l*	1c*l*	1m*l*
1000 *l*	100*l*	10*l*	1*l*	0,1*l*	0,01*l*	0,001*l*

Transformări: Pentru a transforma o unitate de măsură în alta utilizând următoarele reguli:

- Unităţile mari se transformă în unităţi mici prin înmulţirea cu 10^n,
- Unităţile mici se transformă în unităţi mari prin împărţire cu 10^n,

în care n este numărul de segmente dintre unităţile implicate în transformări.

Se poate folosi o schemă de tipul:

k*l*   h*l*   da*l*   *l*   d*l*   c*l*   m*l*

Exemple: Transformaţi în kilolitri:

a) 1200 *l*;

b) 12,5 da*l*;

c) 35 h*l*;

d) 1250000 m*l*.

Rezolvare:

a) 1200 *l* = 1200 : 10^3 = 1,2 k*l* ;

b) 12,5 da*l* = 12,5 : 10^2 = 0,125 k*l* ;

c) 35 h*l* = 35 : 10 = 3,5 k*l* ;

d) 1250000 m*l* = 1250000 : 10^6 = 1,25 k*l* .

B.III.5. UNITĂŢI DE MĂSURĂ PENTRU MASĂ

Masa măsoară inerţia unui corp; inerţia este proprietatea corpurilor care constă în menţinerea stării de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă a corpurilor, în absenţa unei acţiuni exterioare. Kilogramul (kg) este unitatea de măsură de bază.

Se poate folosi o schemă de tipul:

Multiplii gramului: decagram (dag), hectogram (hg), kilogram (kg).

Submultiplii gramului: decigramul (dg), centigramul (cg), miligramul (mg).

1kg	1hg	1dag	1g	1dg	1cg	1mg
1000 g	100g	10g	1g	0,1g	0,01g	0,001g

Transformări: Pentru a transforma o unitate de măsură în alta utilizând următoarele reguli:

- Unităţile mari se transformă în unităţi mici prin înmulţirea cu 10^n,
- Unităţile mici se transformă în unităţi mari prin împărţire cu 10^n,

în care n este numărul de segmente dintre unităţile implicate în transformări.

Se poate folosi o schemă de tipul:

kg hg dag g dg cg mg

Se mai folosesc noţiunile de:

chintal (q): 1 q = 100 kg
tona (t): 1 t = 1000 kg

Exemple: Transformaţi în kilograme:
a) 4 hg ;
b) 100^4 mg ;
c) 500 dag ;
d) 9000 g.
Rezolvare:
a) 4 hg = 4:10 = 0, 4 kg;
b) 100^4 mg = 10^8 mg = $10^8 : 10^6$ = 100 kg.
c) 500 dag = 500 : 100 = 5 kg;
d) 9000 g = 9000 : 1000 = 9 kg.

Legătura dintre volumul şi masa apei
1 cm^3 = 1g
1 dm^3 = 1000 cm^3 = 1000 g; 1 kg = 1 *l*.
1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000 *l* = 1000 kg = 1t

B.III.6. UNITĂŢI DE MĂSURĂ PENTRU TIMP

Principalele unităţi de măsură pentru timp sunt:
1 zi = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s
1 săptămână = 7 zile
1 lună: 28, 29, 30 sau 31 zile
1 an: 365 saqu 366 de zile
1 an = 12 luni
1 deceniu = 10 ani
1 secol = 100 ani
1 mileniu = 1000 ani.

B.III.7. UNITĂŢI MONETARE

Moneda României: leul
Bancnote: ***1 leu, 5 lei, 10 lei, 50 lei, 100 lei, 200 lei, 500 lei.***
Monede: ***1 ban, 5 bani, 10 bani, 50 bani.***
1 leu = 100 bani

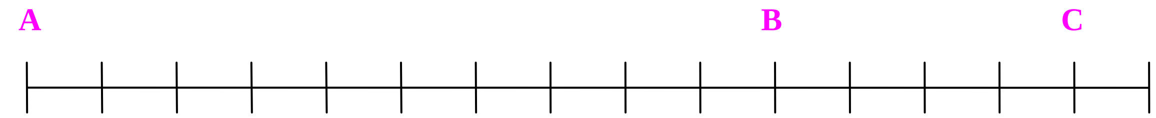
Moneda în majoritatea ţărilor din Uniunea Europeană: euro
Bancnote: ***5 euro, 10 euro, 20 euro, 50 euro, 100 euro, 200 euro, 500 euro.***
Monede: ***1 eurocent, 2 eurocenţi, 5 eurocenţi, 10 eurocenţi, 20 eurocenţi, 50 eurocenţi, 1 euro şi 2 euro.***

C.III. EXERCIŢII RECAPITULATIVE

C.III.1. ELEMENTE DE GEOMETRIE

1. Fie pe o dreaptă d punctele A, B, C, în această ordine. Ştiind că AB = 10 u.m şi BC = 14 u.m., să se determine lungimea segmentului [AC].

Rezolvare:



[AC] = [AB] + [BC] = 10 + 14 = 24 u.m.

2. Triplul lungimii unui segment [AB] depăşeşte cu 25 u.m. jumătatea lungimii acestuia. Ce lungime are segmentul [AB] ?

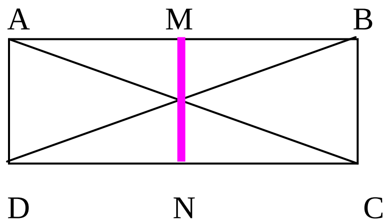
Rezolvare:

$$3\cdot[AB]=25+\frac{1}{2}\cdot[AB]$$

$$^{2)}3\cdot[AB]-\frac{1}{2}\cdot[AB]=25\Rightarrow\frac{6\cdot[AB]-[AB]}{2}=25\Rightarrow 5\cdot[AB]=50\Rightarrow[AB]=10$$

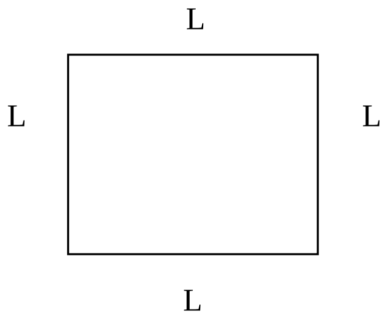
3. Desenaţi un dreptunghi ABCD şi un segment [MN], astfel încât ABMN şi MNDC să fie pătrate.

Rezolvare:



4. Desenaţi un pătrat ştiind că perimetrul său este de 12 cm.

Rezolvare: $P=4\cdot L\Rightarrow L=\frac{P}{4}\Rightarrow L=3\text{cm}$

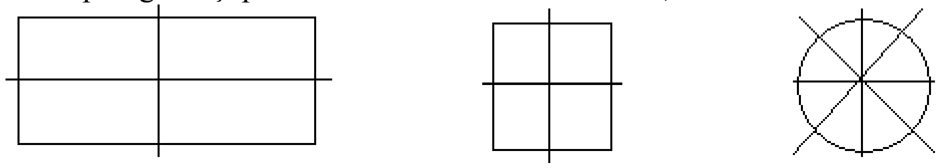


5. Aflaţi lungimea unui cerc cu raza de 4 cm.

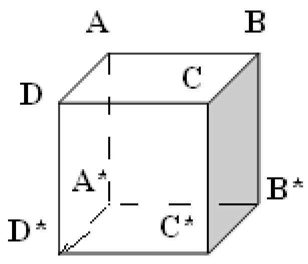
Rezolvare: Se ştie că $L=2\pi R$, cu $\pi=3{,}14$(folosit în calcule)$\Rightarrow L=2\cdot3{,}14\cdot4=25{,}12\text{cm}$

6. Desenaţi axele de simetrie pentru un dreptunghi, un pătrat şi un cerc.

Rezolvare: Dreptunghiul şi pătratul au câte 2 axe de simetrie, iar cercul o infinitate.



7. Pentru cubul din figura de mai jos:
a) Care sunt muchiile cubului cărora le aparţine punctul A?
b) Care sunt feţele cubului cărora le aparţine punctul A?
c) Care sunt feţele cubului care conţin muchia [AB] ?
d) Indicaţi perechi de drepte determinate de muchiile cubului care sunt drepte paralele.
e) Indicaţi drepte necoplanare, adică acele drepte determinate de muchiile cubului care nu au puncte comune, dar nu sunt drepte paralele.
Rezolvare:
a) AB, AD, AA*
b) ABCD, ABB*A*, AA*D*D
c) ABCD, ABB*A*
d) $AB \parallel CD$, $AB \parallel A^*B^*$, $AB \parallel D^*C^*$, $AA^* \parallel CC^*$, etc
e) AB cu DD*, A*B* cu CC*, C*D* cu BB*, etc



C.III.2. UNITĂŢI DE MĂSURĂ

1. Se construieşte un bazin pentru înot în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile măsurate în exterior de: lungimea 250 dm, lăţimea de 12,5 m şi adâncimea de 2,5 m. Să se calculeze volumul betonului necesar construirii acestuia, ştiind că grosimea pereţilor şi a fundului bazinului este de 30 cm.
Rezolvare:
L = 250 dm = 25 m ; l = 12,5 m ; h = 2,5 m ; g =30 cm = 0,3 m.

$$V_{ext} = L \cdot l \cdot h \Rightarrow V = 25 \cdot 12{,}5 \cdot 2{,}5 = 781{,}25\,m^3$$

$$V_{int} = (L-0{,}6)\cdot(l-0{,}6)\cdot(h-0{,}3) \Rightarrow V = 24{,}4 \cdot 11{,}9 \cdot 2{,}2 = 638{,}792\ m^3$$

$$V_{beton} = V_{ext} - V_{int} = 781{,}25 - 638{,}792 = 142{,}458\ m^3$$

2. Calculaţi şi exprimaţi rezultatul în kilograme: $855g + 312cg + 0{,}25q + 19{,}35g$.
Rezolvare: $855g + 312cg + 0{,}25q + 19{,}35g = 0{,}855 + 0{,}00312 + 25 + 0{,}01935 = 25{,}87747kg$

3. Calculaţi: $17h\,3min\,5s + 5h\,47min\,75s - 1h\,30s$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} &17h\,3min\,5s + 5h\,47min\,75s - 1h\,30s = \\ &= [(17\cdot 3600 + 3\cdot 60 + 5) + (5\cdot 3600 + 47\cdot 60 + 75) - (3600 + 30)s = \\ &= 61385 + 36075 - 3570 = 93890s \end{aligned}$$

4. Un călător parcurge 188km în 3h şi 8 min. Cu ce viteză s-a deplasat călătorul?
Rezolvare:
d = 188km
t = 3 h şi 8 min = 188 min
v = d:t = 188: 188 = 1 km/min, 1 h = 60 min, rezultă 1min = 1:60 h
v = 60 km/oră

5. Un pătrat are latura egală cu media aritmetică a numerelor 45 şi 75. Calculaţi perimetrul şi aria pătratului.
Rezolvare: Fie L= latura pătratului; $L = \frac{45+75}{2} = 60$

$P = 4 \cdot L = 240$ şi $A = L^2 = 3600$

Motto:

“Învăţând matematică, înveţi să gândeşti.”

Grigore C. Moisil

IV. PROBLEME DE MATEMATICĂ pentru clasa a V-a propuse de Dziţac Ioana

IV.1. PROBLEME CU VÂRSTE, ANI,….

Problema 1: Mirela a împlinit vârsta de 36 de ani în 29 februarie 2008.
a) Pentru a câta oară îşi sărbătoreşte ziua de naştere?
b) Când va fi următoarea aniversare?
Răspuns:
- ***a)*** **la a noua aniversare**, deoarece ziua de naştere fiind 29 februarie, avem de a face cu un an bisect, adică există această dată doar din 4 în 4 ani.
  Deci, s-a născut în 29 februarie 1972 şi şi-a sărbătorit prima zi de naştere în 29 februarie 1976, a doua zi de naştere în 1980, etc.
- **b) 29 februarie 2012**, adică peste 4 ani.

Problema 2: Ioana, Simona şi cu Nelu au împreună 100 de ani. Să se calculeze vârsta fiecăruia dintre cei trei, ştiind că Ioana şi Simona au împreună 46 de ani, iar Simona şi Nelu 90 de ani.
Rezolvare:
Notez: Vârsta Ioanei = I, Vârsta Simonei = S, Vârsta lui Nelu = N

$$\begin{cases} I+S+N=100 \\ I+S=46 \\ S+N=90 \end{cases}$$

Din primele 2 relaţii, avem:
$46+N=100 \quad \Rightarrow \quad N=54$ ani
Din prima şi a treia relaţie, avem:
$I+90=100 \quad \Rightarrow \quad I=10$ ani
Prima relaţie devine: $10+S+54=100 \quad \Rightarrow \quad S=100-10-54=36$ ani

Răspuns: Ioana, Simona, Nelu= 10; 36;54 de ani

IV.2. PROBLEME CU JOCURI: FOTBAL, ŞAH, BASCHET, ÎNOT,…

Problema 3: Mama mea înoată 100 de lungimi de bazin în ştrandul din Felix de la Hotel Termal în 45 de minute, iar eu înot acelaşi număr de lungimi în 40 de minute. Care este timpul mediu cu care va trebui să înoate mama mai repede, pentru a mă ajunge?
Rezolvare:
Timpul mediu alocat unei lungimi de bazin de către mama mea:
45 de minute = $45 \cdot 60 = 2700$ secunde pentru cele 100 de lungimi de bazin
$2700 : 100 = 27$ secunde/lungime de bazin
Timpul mediu alocat unei lungimi de bazin de către mine:
40 de minute = $40 \cdot 60 = 2400$ secunde pentru cele 100 de lungimi de bazin
$2400 : 100 = 24$ secunde/lungime de bazin
Timpul mediu cu care trebuie să înoate mama mai repede o lungime, ca să mă poată ajunge:
$27-24=3$ secunde/lungime de bazin.

Răspuns: 3 secunde/lungime de bazin.

Problema 4: Clasa noastră, formată din 27 de elevi, a participat la un campionat de tenis de masă în sistem eliminatoriu, adică cel care pierde primul meci este eliminat. Câte meciuri se joacă până la desemnarea campionului clasei?
Notă: Formarea perechilor care joacă se face prin tragere la sorţi. Dacă la o etapă avem un număr impar de jucători, unul dintre ei se califică mai departe tot prin tragere la sorţi, fără să joace.
Răspuns: **26 de meciuri**
Justificare: Numărul de meciuri jucate este egal cu numărul de jucători eliminaţi, deoarece dacă se joacă un meci este eliminat un jucător, iar un jucător nu poate fi eliminat fără să joace. Până la desemnarea campionului toţi jucătorii sunt eliminaţi, cu excepţia campionului.

IV.3. PROBLEME CU CĂRŢI, PAGINI, …….

Problema 5: Paginile unei cărţi sunt numerotate de la 1 la 200. De câte ori s-a folosit cifra 0 în numerotarea acestor pagini?
Răspuns:
de 31 de ori (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200)

Problema 6: Mai am de citit 300 de pagini dintr-o carte. Să se determine câte pagini are cartea ştiind că am citit un sfert din ea.
Rezolvare:
Notez:

a = numărul de pagini pe care-l are cartea

$$\frac{1}{4}\cdot a = a - 300$$

$$\frac{1}{4}\cdot a = \frac{4\cdot a}{4} - \frac{300\cdot 4}{4}$$

$$\frac{300\cdot 4}{4} = \frac{4\cdot a}{4} - \frac{1}{4}\cdot a$$

$$1200 = 4\cdot a - a$$

$1200 = 3\cdot a$, rezultă $a = \frac{1200}{3} = 400$pagini

Răspuns: Cartea are 400 de pagini

IV.4. RAŢIONAMENT LOGIC BAZAT PE „CEL MAI NEFAVORABIL CAZ"

Problema 7: Într-un sertar sunt 3 perechi de ciorapi albi şi 5 perechi de ciorapi negri, amestecaţi şi desperecheaţi. Care este numărul minim de ciorapi pe care trebuie să-l scot la întâmplare, fără să văd culoarea, pentru a avea cu siguranţă:
a) o pereche de aceeaşi culoare?
b) o pereche de ciorapi albi?
c) o pereche de ciorapi negri?
Observaţie: Ciorapul stâng poate fi folosit pentru piciorul drept şi invers.
Rezolvare:
Număr de ciorapi albi: $3\cdot 2 = 6$ ciorapi
Număr de ciorapi negri: $5\cdot 2 = 10$ ciorapi
Total ciorapi: $6 + 10 = 16$ ciorapi

a) 3 ciorapi

Justificare: La extragerea a doi ciorapi cel mai nefavorabil caz ar fi ca să avem un ciorap alb şi un ciorap negru, dar la a treia extragere cu siguranţă vom avea o pereche de ciorapi de aceeaşi culoare.

b) 12 ciorapi

Justificare: Cel mai nefavorabil caz este de a extrage unul după altul numai ciorapi negri, adică 10. Deci, mai avem nevoie de încă 2 ciorapi pentru a fi siguri că realizăm cel puţin o pereche de ciorapi albi.

c) 8 ciorapi

Justificare: Cel mai nefavorabil caz este de a extrage unul după altul numai ciorapi albi, adică 6. Deci, mai avem nevoie de încă 2 ciorapi pentru a fi siguri că realizăm cel puţin o pereche de ciorapi negri.

Răspuns: a) 3 ciorapi; b) 12 ciorapi; c) 8 ciorapi

Problema 8: Într-un sertar sunt 3 perechi de mănuşi roz şi 5 perechi de mănuşi mov, desperecheate şi amestecate. Care este numărul minim de mănuşi pe care trebuie să-l scot la întâmplare, fără să văd culoarea, pentru a avea cu siguranţă:

a) o pereche de mănuşi de aceeaşi culoare?

b) o pereche de mănuşi roz ?

c) o pereche de mănuşi mov ?

Observaţie: Aici mănuşa stângă nu poate fi folosită pentru mâna dreaptă şi invers.

Rezolvare:

Număr de mănuşi roz: $3 \cdot 2 = 6$ mănuşi roz (3 pe stânga + 3 pe dreapta)

Număr de mănuşi mov: $5 \cdot 2 = 10$ mănuşi mov (5 pe stânga + 5 pe dreapta)

Total mănuşi: $6 + 10 = 16$ mănuşi (8 pe stânga + 8 pe dreapta)

a) 9 mănuşi

Justificare: Cel mai nefavorabil caz ar fi să le extragem una după alta toate pe aceeaşi mână, de exemplu stânga (8). La a 9-a extragere nu mai există mănuşi pe stânga şi indiferent de culoare se va forma o pereche.

b) 14 mănuşi

Justificare: Cel mai nefavorabil caz ar fi ca în primele 8 extrageri să am mănuşi numai pe aceeaşi mână, de exemplu stânga (8), iar la următoarele 5 extrageri să am numai mănuşi mov (5), dar la a 14-a extragere vom avea cu siguranţă o pereche de mănuşi roz.

c) 12 mănuşi

Justificare: Cel mai nefavorabil caz ar fi ca în primele 8 extrageri să am mănuşi numai pe aceeaşi mână, de exemplu stânga (8), iar la următoarele 3 extrageri să am numai mănuşi roz (3), dar la a 12-a extragere vom avea cu siguranţă o pereche de mănuşi mov.

Răspuns: a) 9 mănuşi; b) 14 mănuşi; c) 12 mănuşi

Problema 9: Câţi copii trebuie să fie într-un grup, pentru a fi siguri că:

a) cel puţin 2 dintre ei sunt născuţi în aceeaşi zi a săptămânii?

b) cel puţin 2 dintre ei sunt născuţi în aceeaşi lună a anului?

Rezolvare:

a) 8 copii

Justificare: Cel mai nefavorabil caz ar fi ca şi copiii din grup să fie născuţi în zile diferite ale săptămânii, adică ar fi 7 copii, dar dacă am avea al 8-lea copil acesta va fi născut cu siguranţă într-una din zilele în care este născut unul dintre cei 7 copii.

b) 13 copii

Justificare: Cel mai nefavorabil caz ar fi ca şi copiii din grup să fie născuţi în luni diferite ale anului, adică ar fi 12 copii, dar dacă am avea al 13-lea copil acesta va fi născut cu siguranţă într-una din lunile în care este născut unul dintre cei 12 copii.

Răspuns: a) 8 copii; b) 13 copii

Problema 10: Să se justifice că într-un grup de 367 de persoane există cel puţin două care îşi sărbătoresc la aceeaşi dată ziua de naştere.
Justificare: Cel mai nefavorabil caz ar fi ca anul să aibă 366 de zile şi fiecare din persoane să fie născute în zile diferite.

IV.5. ALTE CATEGORII / TIPURI DE PROBLEME

Problema 11: La un test la matematică, Petre şi Andrei au rezolvat următoarea problemă: „Să se afle restul împărţirii $\frac{202 \cdot 203}{2} : 202$", astfel:

Petre: $\frac{202 \cdot 203}{2} : 202 = \frac{41006}{2} : 202 = \frac{203}{2}$, de unde se obţine câtul 101 şi restul 1.

Andrei: $\frac{202 \cdot 203}{2} : 202 = (202 \cdot 203) : 2 : 202 = 41006 : 2 : 202 = 20503 : 202$, de unde se obţine câtul 101 şi restul 101. Care dintre cele doi elevi a rezolvat corect problema?
Răspuns: Andrei

Justificare: Conform regulii privind ordinea operaţiilor, fracţia $\frac{202 \cdot 203}{2}$ trebuie calculată prima dată şi ea ne dă ca valoare numărul întreg 20503, care va fi deîmpărţitul D=20503, iar împărţitorul era de la început I=202. Din teorema împărţirii cu rest avem D= I C +R, unde C este câtul şi R este restul. Ca urmare, C=101 şi R = 101.

Problema 12: Un bucătar are de prăjit 6 chiftele. Află timpul minim pentru prăjirea celor 6 chiftele, ştiind că o chiftea se prăjeşte pe o parte în 3 minute, iar în tigaie încap doar 4 chiftele.
Răspuns: **9 minute**
Justificare: Se pun 4 chiftele în tigaie. Deci, în primele 3 minute se prăjesc pe o parte cele 4 chiftele. După cele 3 minute, 2 chiftele se întorc pe cealaltă parte, iar 2 se scot afară şi se pun celelalte 2 rămase afară. Se mai lasă 3 minute, după care vom avea: primele 2 chiftele gata, ultimele 2 introduse trebuie întoarse, iar cele de afară puse pe cealaltă parte în tigaie şi deci va mai urma o prăjire de încă 3 minute şi toate chiftelele sunt terminate în doar 9 minute. Poftă bună!

Problema 13. Să se afle cel mai mic număr natural par care să se împartă exact la 7, 11, 13.
Rezolvare: **Număr natural par = 2k**

$7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2 = 2002$

Problema 14. Să se arate că, dacă dintr-un număr format din 2 cifre scădem suma cifrelor sale, diferenţa se împarte exact la 9.
Rezolvare:

$\overline{ab} - (a + b) = 10a + b - a - b = 9a$ număr care se împarte exact la 9.

Problema 15. Într-o sală sunt scaune cu 3 picioare şi cu 4 picioare, în total 41 de picioare şi 12 scaune. Câte scaune sunt de fiecare tip?
Rezolvare:

Presupunem că toate cele 12 scaune sunt cu 4 picioare. Rezultă 48 de picioare.
48 - 41=7 scaune cu 3 picioare, deci 5 scaune cu 4 picioare.

Problema 16. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu perimetrul unui pătrat şi este de 240 m. Să se afle dimensiunile lor, ştiind că lăţimea dreptunghiului este jumătate din latura pătratului.

Rezolvare:

P dreptunghi = 2 (L+l) = 240 m, rezultă L+l = 240:2 = 120 m

L= lungimea dreptunghiului

l = lăţimea dreptunghiului

P pătrat = a+a+a+a = 4a = 240 m, rezultă a = 60 m

a = latura pătratului

$l = \frac{a}{2} = \frac{60}{2} = 30\,m$

L+l = 120 m

L+30 = 120 m, rezultă L= 90 m.

Problema 17. A venit toamna. În jurul unui lac sunt copaci. Din copaci pică frunze, astfel încât în fiecare zi se acoperă o suprafaţă a lacului de 2 ori mai mare decât suprafaţa acoperită deja în ziua precedentă. Întregul lac este acoperit în 10 zile. În câte zile se acoperă jumătate din lac?

Rezolvare: în 9 zile, adică în ziua precedentă

Problema 18. Ştiind că $X^2 = 1$, să se calculeze X^{2008}.

Rezolvare: $X^{2008} = X^{2\cdot 1004} = \left(X^2\right)^{1004} = 1^{1004} = 1$

Problema 19. Calculaţi : $0,001 + 0,002 + ... + 0,009 + 0,091 + 0,092 + ... + 0,099$.

Rezolvare: $0,001 + 0,002 + ... + 0,009 + 0,091 + 0,092 + ... + 0,099 = 0,1 \cdot 18 : 2 = 0,1 \cdot 9 = 0,9$.

Problema 20. Determinaţi necunoscutele: $\overline{x,y} + \overline{2x,y} = \overline{28,8}$.

Rezolvare: Se observă că $x = y = 4$.

Problema 21. Fie $4^n = 1024$. Să se calculeze: 2^{2n+4}.

Rezolvare: $4^n = 1024 \Rightarrow 4^n = 4^5 \Rightarrow n = 5$

$2^{2n+4} = 2^{2\cdot(n+2)} = 4^{n+2} = 4^n \cdot 4^2 = 4^5 \cdot 4^2 = 4^7 = 16384$.

sau $2^{2n+4} = 2^{2\cdot 5+4} = 2^{14} = 4^7$

Problema 22. Ştiind că $x = 6$ şi $y + z = 21$, calculaţi: $6 \cdot x + 17y + 17z$.

Rezolvare: $6 \cdot x + 17y + 17z = 6 \cdot x + 17 \cdot (y + z) = 36 + 17 \cdot 21 = 393$

Problema 23. Enumeraţi elementele mulţimilor:

a) $A = \{x | x \in Z^*, |x| \le 4\}$;

b) $A = \{x | x \in Z, |x| = 2\}$

Rezolvare: Se cunoaşte că: $|x| = \begin{cases} x, \text{ pentru } x > 0 \\ 0, \text{ pentru } x = 0 \\ -x, \text{ pentru } x < 0 \end{cases}$ şi că $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

a) $A = \{x | -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4\}$

b) $A = \{-2; +2\}$

Motto:

„Matematica va fi limba latină a viitorului, obligatorie pentru toţi oamenii de ştiinţă. Tocmai pentru că matematica permite accelerarea maximă a circulaţiei ideilor ştiinţifice"

Grigore C. Moisil

V. PROBLEME DE SINTEZĂ pentru clasa a V-a

V.I. PROBLEME DATE LA OLIMPIADE DE MATEMATICĂ

1. Determinaţi mulţimile A si B, dacă satisfac simultan condiţiile:
a) $A \cap B = \{x / x \in N, 4 \le x < 9\}$;
b) $A \cup B = \{x / x \in N, 2 \le x \le 10\}$;
c) $B - A = \{3;\ 3^2\}$.

Olimpiada naţională de matematică
Etapa judeţeană, 2009, Bihor

Rezolvare:

$A \cap B = \{4,5,6,7,8\}, A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, B \setminus A = \{3,9\}$

$\{4,5,6,7,8\} \subseteq A$

$\{4,5,6,7,8\} \subseteq B$

$B \setminus A = \{3,9\} \Rightarrow \{3,\ 9\} \subseteq B \Rightarrow 3 \notin A$ şi $9 \notin B$

Rezultă: $A = \{4,5,6,7,8,2,10\}$ $\quad B = \{3,4,5,6,7,8,9\}$.

2. Determinaţi numerele naturale a,b,c ştiind că $a \cdot b = 18$, $a \cdot c = 30$ şi $5b + 2c = 75$.

Olimpiada naţională de matematică
Etapa judeţeană, 2009, Bihor
E.Blăguţ, Bacău(G.M.nr.9/2008)

Rezolvare:

$a \cdot b = 18 \quad \big| \cdot 5$

$a \cdot c = 30 \quad \big| \cdot 2$

Rezultă:

$5 \cdot a \cdot b = 90$

$2 \cdot a \cdot c = 60$

Adunăm cele două relaţii şi rezultă:

$$5 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c = 150 \Rightarrow a \cdot (5 \cdot b + 2 \cdot c) = 150 \Rightarrow a \cdot 75 = 150 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \\ c = 15 \end{cases}.$$

3. Comparaţi numerele:

$a = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008}$

$b = 3^{1256} - 2 \cdot 3^{1255}$

Olimpiada naţională de matematică
Etapa locală, 2010, Oradea

Rezolvare:

$a = 2^{2008} \cdot (2^2 - 2 - 1) = 2^{2008} = 2^{8 \cdot 251} = 256^{251}$

$b = 3^{1255} \cdot (3 - 2) = 3^{1255} = 3^{5 \cdot 251} = 243^{251}$

Rezultă: $a > b$.

4. Fie **n** un număr natural nenul. Arătaţi că numărul 5^n se poate scrie ca:
a) suma a două pătrate perfecte nenule;
b) diferenţa a două pătrate perfecte nenule.

Olimpiada naţională de matematică
Etapa locală, 2010, Oradea,(RMT / 2009)

Rezolvare:
Pentru
$n = 2k+1,\ k \in N \Rightarrow$

$$5^n = 5^{2k+1} = 5^{2k} \cdot 5 = 5^{2k} \cdot \left(2^2 + 1^2\right) = 5^{2k} \cdot 2^2 + 5^{2k} = \left(5^k \cdot 2\right)^2 + \left(5^k\right)^2$$

$$5^n = 5^{2k+1} = 5^{2k} \cdot 5 = 5^{2k} \cdot \left(3^2 - 2^2\right) = 5^{2k} \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 5^{2k} = \left(5^k \cdot 3\right)^2 + \left(5^k \cdot 2\right)^2$$

Pentru
$n = 2k+2,\ k \in N \Rightarrow$

$$5^n = 5^{2k+2} = 5^{2k} \cdot 5^2 = 5^{2k} \cdot \left(4^2 + 3^2\right) = 5^{2k} \cdot 4^2 + 5^{2k} \cdot 3^2 = \left(5^k \cdot 4\right)^2 + \left(5^k \cdot 3\right)^2$$

$$5^n = 5^{2k+2} = 5^{2k} \cdot 5^2 = 5^{2k} \cdot \left(13^2 - 12^2\right) = 5^{2k} \cdot 13^2 - 5^{2k} \cdot 12^2 = \left(5^k \cdot 13\right)^2 - \left(5^k \cdot 12\right)^2$$

5. Se dă numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 2005,\ n \geq 10$. Să se afle restul împărţirii lui **a** la 256.

Olimpiadă, Bacău
Prof. Florentina şi Costică Vieru

Rezolvare:
Din $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 2005,\ n \geq 10$ se observă că cea mai mică valoare pentru **a** se obţine pentru n = 10.
Pentru n = 10, numărul devine:

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 2005 = 1 \cdot 2^1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) + 2005$$

$$a = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 + 2005$$

Pentru $n \geq 10$, numărul devine:

$$a = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot n + 2005$$

$$256 = 2^8$$

Se observă că: $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot n$ se divide cu 2^8.
Deci restul împărţirii lui a la 256 va fi dat de 2005:256 = 7, restul 213.

6. Fie $n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 64 + 858$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: “n este pătrat perfect”.

Olimpiadă, Bistriţa-Năsăud
Prof. Măriuca Sabău

Rezolvare:
$U(n) = U(1 \cdot 2 \cdot \ldots 10 \cdot \ldots \cdot 64) + U(858) = 0 + 8 = 8$ nu este pătrat perfect.
Propoziţia este **Falsă**.

7. Scrieţi următoarele numere naturale în ordine crescătoare:

$x = 2^{1653} - 2^{1652} - 2^{1651}$; $y = 3^{993} - 2 \cdot 3^{992} - 2 \cdot 3^{991} - 3^{990}$; $z = 7^{662} + 9 \cdot 7^{660} - 8 \cdot 7^{661}$.

Olimpiadă, Cluj
Prof. Lucia Iepure

Rezolvare:

$$x = 2^{1653} - 2^{1652} - 2^{1651} = 2^{1651} \cdot (4 - 2 - 1) = 2^{1651} = 2 \cdot 2^{1650} = 2 \cdot 2^{2 \cdot 5^3 \cdot 7}$$

$$y = 3^{993} - 2 \cdot 3^{992} - 2 \cdot 3^{991} - 3^{990} = 3^{990} \cdot (27 - 18 - 6 - 1) = 2 \cdot 3^{990} = 2 \cdot 3^{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

$$z = 7^{662} + 9 \cdot 7^{660} - 8 \cdot 7^{661} = 7^{660} \cdot (49 + 9 - 56) = 2 \cdot 7^{660} = 2 \cdot 7^{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

$$x = 2 \cdot 2^{2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 11} = 2 \cdot \left(2^5\right)^{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = 2 \cdot 32^{330}$$

$$y = 2 \cdot 3^{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11} = 2 \cdot \left(3^3\right)^{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11} = 2 \cdot 27^{330} \qquad \Rightarrow z > x > y$$

$$z = 2 \cdot 7^{2^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11} = 2 \cdot \left(7^2\right)^{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = 2 \cdot 49^{330}$$

8. Să se determine numerele de forma $\overline{\mathbf{ab}}$ pentru care:

$$a^{\left(\overline{ab}\right)^2} = \left(16^{101} - 8^{134} - 4^{200}\right) : 11$$

Olimpiadă, Cluj
Prof. Nicolae Alb

Rezolvare:

$$a^{\left(\overline{ab}\right)^2} = \left(2^{404} - 2^{402} - 2^{400}\right) : 11$$

$$a^{\left(\overline{ab}\right)^2} = 2^{400} \cdot \left(2^4 - 2^2 - 1\right) : 11$$

$$a^{\left(\overline{ab}\right)^2} = 2^{400} \cdot 11 : 11$$

$$a^{\left(\overline{ab}\right)^2} = 2^{(2 \cdot 10)^2}$$

Rezultă: $a = 2$ şi $b = 10$.

9. Împărţind numărul natural a la numărul b, obţinem câtul 5 şi restul 33.

a) Aflaţi numerele a şi b ştiind că $2 \cdot a + b = 440$.

b) Arătaţi că $4 \cdot a - 20 \cdot b - 68$ este pătrat perfect.

Olimpiadă, Constanţa

Rezolvare:

a) $\begin{cases} a = 5 \cdot b + 33 \\ 2 \cdot a + b = 440 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (5 \cdot b + 33) + b = 440 \Rightarrow 10 \cdot b + b = 440 - 66 \Rightarrow 11 \cdot b = 374$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 34 \\ a = 5 \cdot 34 + 33 = 203 \end{cases}$

b) $4 \cdot a - 20 \cdot b - 68 = 4 \cdot 203 - 20 \cdot 34 - 68 = 812 - 680 - 68 = 64 = 8^2$

10. Demonstraţi că: $86 | 9^{n+2}+5\cdot 9^n$, $n \in N^*$; $27 | 2^n+3\cdot 2^{n+1}+5\cdot 2^{n+2}, n \in N^*$

Olimpiadă, Dâmboviţa

Rezolvare: $86 | 9^{n+2}+5\cdot 9^n$, $n \in N^*$

$9^{n+2}+5\cdot 9^n = 9^n\cdot\left(9^2+5\right) = 9^n\cdot 86$ divizibil cu 86.

$27 | 2^n+3\cdot 2^{n+1}+5\cdot 2^{n+2}, n \in N^*$

$2^n+3\cdot 2^{n+1}+5\cdot 2^{n+2} = 2^n\cdot(1+3\cdot 2+5\cdot 4) = 2^n\cdot 27$ divizibil cu 27.

11. Împărţind numărul natural x la numărul natural y, aflăm câtul 3 şi restul 19.

a) Calculaţi $2\cdot x-6y+3$.

b) Arătaţi că $x+y>95$.

c) Aflaţi x şi y, dacă $x-y<61$.

Olimpiada naţională de matematică
Etapa locală, 2010, Satu Mare
Prof. Cuibuş Nicoleta

Rezolvare:

a) $x=3\cdot y+19,\ y>19$

$2\cdot x-6y+3 = 2\cdot(3\cdot y+19)-6y+3 = 6\cdot y+38-6\cdot y+3 = 41$

b) $x=3\cdot y+19\ \ |+y \Rightarrow x+y=4\cdot y+19$, cum $y>19 \Rightarrow x+y>4\cdot 41+19=76+19=95$

c)

$x-y<61 \Rightarrow 3\cdot y+19-y<61 \Rightarrow 2\cdot y<42 \Rightarrow y<21$; cum $y>19 \Rightarrow y=20 \Rightarrow x=3\cdot y+19=79$

12. Se dă numărul $A=5^n+6^{n^2}+7^{n^2+n}, n \in N^*$.

a) Arătaţi că n^2+n este număr par;

b) Aflaţi ultima cifră a numărului A.

Olimpiada naţională de matematică
2009, Argeş

Rezolvare:

a) Pentru $n=2\cdot k,\ k\in N \Rightarrow n^2+n=(2\cdot k)^2+2\cdot k=2\cdot k\cdot(2\cdot k+1) \Rightarrow$ număr par, deoarece întotdeauna produsul a două numere consecutive sau dintre un număr par şi unul impar este un număr par.

Pentru $n=2\cdot k+1,\ k\in N$

$\Rightarrow n^2+n=(2\cdot k+1)^2+2\cdot k+1=(2\cdot k+1)\cdot(2\cdot k+1+1)=(2\cdot k+1)\cdot 2\cdot(k+1)=2\cdot K$

$\Rightarrow$ număr par, deoarece rezultatul e multiplu de 2, deci un număr par.

b) $U(A)=U(5^n+6^{n^2}+7^{n^2+n})=U(5^n)+U(6^{n^2})+U(7^{n^2+n})$

$U(5^n)=5$

$U(6^{n^2})=6$

$U(7^{n^2+n})=U(7^{2k})=\begin{cases}9\\1\end{cases}$ $7^1=7$; $\mathbf{7^2}$ = **49**; 7^3 = 343; $\mathbf{7^4}$ = 240**1**

Rezultă: $U(A)=\begin{cases}U(5+6+9)=U(20)=0\\U(5+6+1)=U(12)=2\end{cases}$

13. La festivalul Pinguinilor fără Frontiere, desfăşurat la Polul Sud, comitetul de primire (format, fireşte, din pinguinii gazdă) i-a întâmpinat la intrarea în Palatul de Cleştar pe oaspeţii veniţi din toate colţurile lumii. Preşedintele festivalului, în urma discuţiilor cu membrii comitetului de primire a constatat că: unul dintre pinguinii gazdă a întâmpinat 15 oaspeţi, următorul pinguin a întâmpinat 16 oaspeţi şi, continuând astfel din aproape în aproape, ultimul pinguin din comitetul de primire îi întâmpinase pe toţi oaspeţii. Ştiind că numărul total al oaspeţilor şi membrilor comitetului de primire a fost 34, să se afle câţi oaspeţi au fost şi din câţi membri era format comitetul de primire.

Concursul interdisciplinar"± Poezie"
Etapa judeţeană, Bihor, 2009

Rezolvare:

Deoarece primul pinguin din comitetul de primire întâmpină 15 oaspeţi, înseamnă că numărul oaspeţilor este cu 14 mai mare decât al membrilor comitetului de primire.

Notăm cu a = numărul pinguinilor din comitetul de primire
b = numărul oaspeţilor.

Rezultă: $b = a + 14$

Dar, $a + b = 34$ şi prin înlocuire rezultă $a + a + 14 = 34 \Rightarrow a = 10$; $b = 24$

Rezultă că 10 pinguini fac parte din comitetul de primire şi numărul oaspeţilor este 24.

14. ***a)*** Arătaţi că: $2009 + 2008 \cdot 2009 + 2008 \cdot 2009^2 + ... + 2008 \cdot 2009^{2009}$ este pătrat perfect.

b) Fie numărul $n = 3009^{3010} - 1000 \cdot 3009^{3009}$. Să se determine cel mai mic număr natural nenul p, astfel încât $n \cdot p$ să fie cub perfect.

Problemă din Varianta 2 propusă pentru Concursul interdisciplinar"± Poezie"
Etapa judeţeană, Bihor, 2009

Rezolvare:

$2009 + 2008 \cdot 2009 + 2008 \cdot 2009^2 + ... + 2008 \cdot 2009^{2009} =$

a) $= 2009 + (2009-1) \cdot 2009 + (2009-1) \cdot 2009^2 + ... + (2009-1) \cdot 2009^{2009}$

$= 2009 + 2009^2 - 2009 + 2009^3 - 2009^2 + ... + 2009^{2010} - 2009^{2009} = 2009^{2010}$

b) $n = 3009^{3010} - 1000 \cdot 3009^{3009} = 3009^{3009} \cdot (3009 - 1000) = 3009^{3009} \cdot 2009 =$

$= 3009^{3009} \cdot 7^2 \cdot 41 = \left(3009^{1003}\right)^3 \cdot 7^2 \cdot 41$

Pentru ca $n \cdot p$ să fie cub perfect se observă că trebuie ca $p = 7 \cdot 41^2$

Deci $n \cdot p = \left(3009^{1003}\right)^3 \cdot 7^2 \cdot 41 \cdot 7 \cdot 41^2 = (3009 \cdot 7 \cdot 41)^3 = 863583^3$

15. Câte zecimale are numărul $0{,}25^1 \cdot 0{,}25^2 \cdot ... \cdot 0{,}25^{2009}$?

Problemă din Varianta 3 propusă pentru Concursul interdisciplinar"± Poezie"
Etapa judeţeană, Bihor, 2009

Rezolvare:

$$0{,}25^1 \cdot 0{,}25^2 \cdot ... \cdot 0{,}25^{2009} = 0{,}25^{1+2+...+2009} = 0{,}25^{\frac{2009 \cdot 2010}{2}} = 0{,}25^{2009 \cdot 1005}$$

$$0{,}25^{2009 \cdot 1005} = \left(\frac{25}{100}\right)^{2009 \cdot 1005} = \frac{25^{2009 \cdot 1005}}{10^{2 \cdot 2009 \cdot 1005}} = \frac{25^{2009 \cdot 1005}}{10^{2009 \cdot 2010}}$$

Rezultă că numărul are $2009 \cdot 2010$ zecimale.

16. De ziua lui, Andrei a primit multe mesaje de felicitare pe telefonul mobil. Fiind ocupat cu invitaţii, a citit doar o şesime din ele. A doua zi, a mai primit 6 mesaje şi a citit o treime din totalul numărului de mesaje necitite. A treia zi, a mai primit încă 6 mesaje şi a citit jumătate din totalul numărului de mesaje necitite. În fine, în a patra zi, a citit restul de 40 de mesaje. Câte mesaje a primit Andrei în prima zi?

Concursul interdisciplinar"± Poezie", Etapa judeţeană, Bihor, 2010

Rezolvare: **Varianta I**

În prima zi: x mesaje primite, $\frac{1}{6}x$ mesaje citite, $x-\frac{1}{6}x=\frac{5}{6}x$ mesaje necitite.

În a doua zi: $\frac{5}{6}x+6$ mesaje în total; $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}x+6\right)=\frac{5}{18}x+2$ mesaje citite

$\frac{5}{6}x+6-\left(\frac{5x}{18}+2\right)=\frac{5}{6}x+6-\frac{5x}{18}-2=\frac{15x-5x}{18}+4=\frac{10x}{18}+4$ mesaje necitite.

În a treia zi: $\frac{10}{18}x+4+6=\frac{10}{18}x+10$ mesaje în total; $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{18}x+10\right)$ mesaje citite, deci au mai rămas $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{18}x+10\right)=\frac{5}{18}x+5$ mesaje necitite.

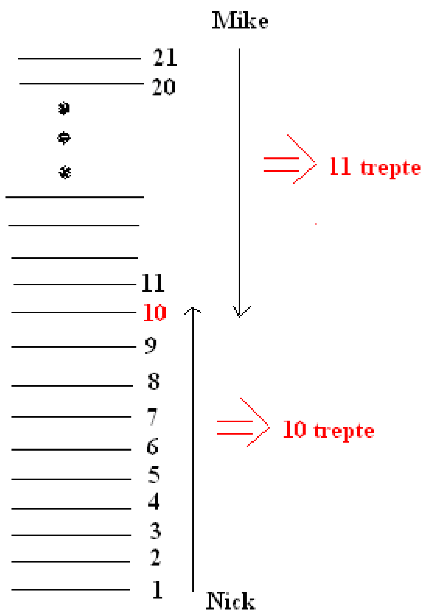
În a patra zi: $\frac{5}{18}x+5=40\Rightarrow\frac{5}{18}x=35\Rightarrow x=\frac{35\cdot 18}{5}=7\cdot 18=126$ mesaje primite în prima zi

Varianta a II - a: Cele 40 de mesaje citite în ultima zi reprezintă jumătate din totalul mesajelor necitite din ziua a 3-a, în număr de 80, din care 6 mesaje noi, ceea ce înseamnă că Andrei avea 74 de mesaje necitite după 3 zile. Acestea reprezintă două treimi din totalul mesajelor necitite, ceea ce înseamnă că Andrei avea 111 mesaje necitite la finalul zilei a doua. Din acestea, 6 mesaje erau noi, ceea ce înseamnă că Andrei avea 105 mesaje necitite la finalul zilei întâi, care reprezintă cinci şesimi din totalul mesajelor, deci a primit 126 de mesaje.

17. O scară are 21 de trepte. Nick şi Mike numără treptele, unul începând de jos în sus, celălalt începând de sus în jos. El se întâlneşte pe treapta care, în numărătoarea lui Nick, este a zecea. Ce număr are această treaptă în numărătoarea lui Mike?

A) 21 B) 31 **C) 11** D) 12 E) 10

Rezolvare:



21 – 10 = 11 trepte

18. Care dintre următoarele expresii are o valoare diferită faţă de toate celelalte ?

A) $20\times10+20\times10$ B) $20:10\times20\times10$ C) $20\times10\times20:10$
D) $20\times10+10\times20$ **E)** $20:10\times20+10$

Rezolvare:

A) $20\times10+20\times10=200+200=400$
B) $20:10\times20\times10=2\times20\times10=400$
C) $20\times10\times20:10=200\times20:10=4000:10=400$
D) $20\times10+10\times20=200+200=400$
E) $20:10\times20+10=2\times20+10=50$

19. Ben s-a gândit la un număr, l-a împărţit la 7, a adunat 7 la rezultat şi apoi a înmulţit suma cu 7. A obţinut rezultatul 777. La ce număr s-a gândit?

A) 7 B) 778 C) 777 D) 826 **E) 728**

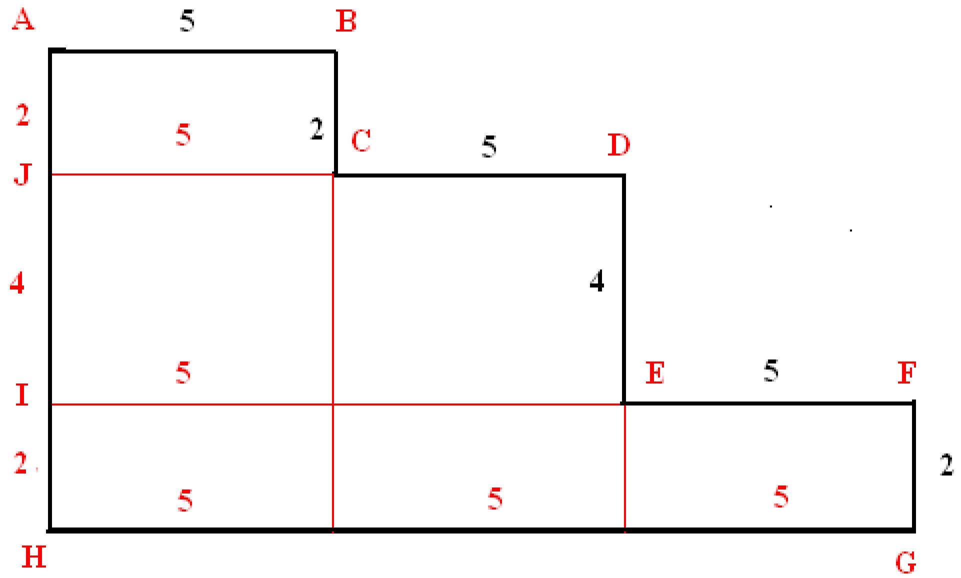
Rezolvare:

Fie **a** numărul la care s-a gândit Ben.

$[(a:7)+7]\cdot7=777\Rightarrow(a:7)+7=777:7\Rightarrow(a:7)+7=111\Rightarrow a:7=111-7\Rightarrow a:7=104$

$a=7\cdot104=728$

20. Care este perimetrul figurii alăturate?



A) $3\times5+4\times2$ B) $3\times5+2\times2+4$ C) $5\times2+5\times4+5\times2$ D) $6\times5+6\times2$ **E)** $6\times5+8\times2$

Rezolvare:

Desenul iniţial este cel cu contur şi scris negru, ceea ce este cu roşul fiind adăugat mai târziu.
Notăm cu P – perimetrul.

$P_{ABCDEFGHA}=5+2+5+4+5+2+5+5+5+2+4+2=6\times5+8\times2$

21. O pizzerie oferă, ca preparat de bază, pizza cu mozzarela şi roşii. Trebuie adăugate unul sau două topping-uri: hamsii, bacon, ciuperci, pui. Mai mult, fiecare tip de pizza poate fi de trei tipuri: mică, medie, mare. Câte tipuri diferite de pizza (ca mărime şi conţinut) pot fi preparate?

A) 30 B) 7 C) 13 D) 12 E) 18

Rezolvare:

Posibilităţi:

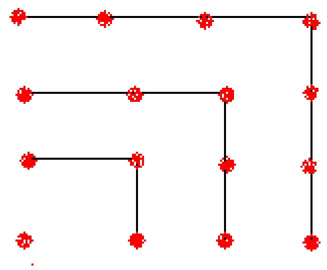
Pizza mică poate fi cu:

- 1 topping: hamsii sau bacon sau ciuperci sau pui = 4 variante

- 2 topping-uri: hamsii – bacon; hamsii - ciuperci; hamsii – pui; bacon – ciuperci; bacon – pui; ciuperci – pui = 6 variante

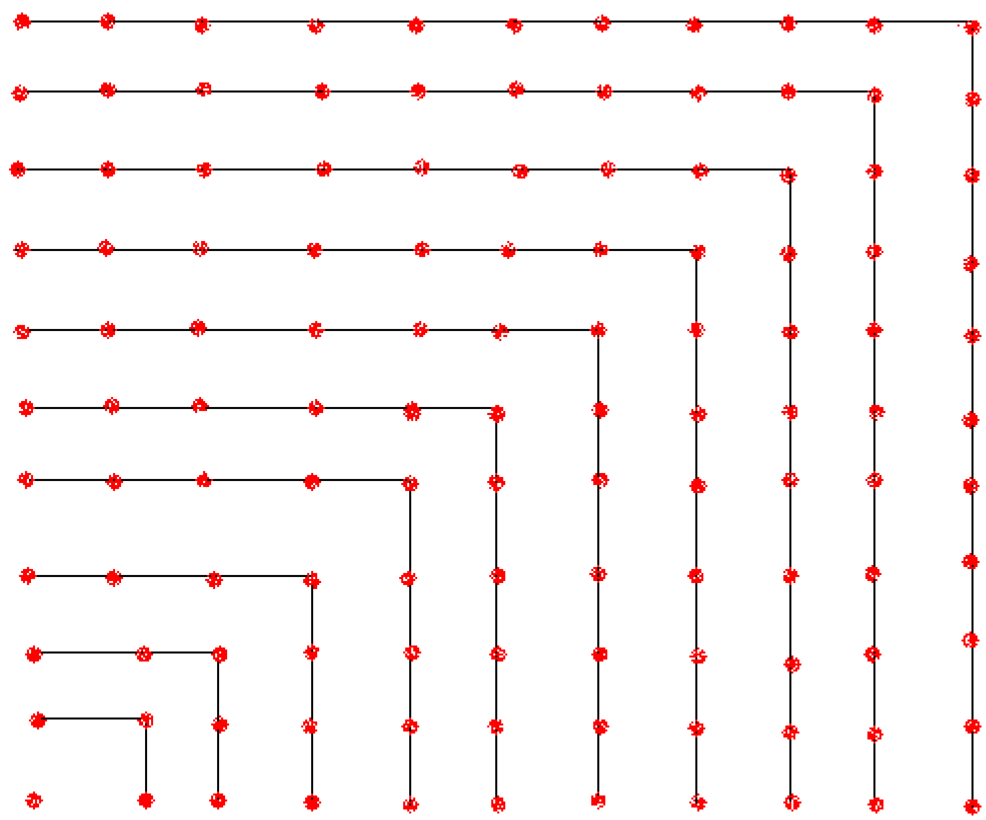
Deci pot exista 10 variante pentru pizza mică.
La fel, pentru pizza medie şi pizza mare.
În total, 30 de variante.

22. Folosind figura alăturată poţi observa că $1+3+5+7=4\times4$. Ce valoare are expresia $1+3+5+7+...+17+19+21$?



A) 10×10 **B)** 11×11 C) 4×4 D) 4×10 E) 21×21

Rezolvare: Se observă în relaţia dată $1+3+5+7=4\times4$ că se numără punctele de pe fiecare contur pornind de la 1 punct până la 7 (3 puncte pe fiecare latură + 1 punct în colţ), astfel formându-se un pătrat care are pe fiecare latură 4 puncte.
Ca să calculăm expresia $1+3+5+7+...+17+19+21$ se poate continua desenul sau se poate constata efectiv că numărul de puncte de pe conturul exterior al pătratului mare va fi de 11.



Observaţie: Problemele 17 ÷ 22 sunt probleme selectate de la *Concursul internaţional de matematică aplicată Cangurul – 2010*, clasele V-VI, 2010. Variantele boldate constituie răspunsurile corecte.

V.II. PROBLEME DIN REVISTA DE MATEMATICĂ

1. Calculaţi: $S=(3+4+...+13)+(33+44+...+143)+(333+444+...+1443)$

P.S.V.2112, [4]

Rezolvare: $S=(3+4+...+13)+(33+44+...+143)+(333+444+...+1443)$

$S=(3+4+...+13)+11\cdot(3+4+...+13)+111\cdot(3+4+...+13)$

$S=(3+4+...+13)\cdot(1+11+111)=(16\cdot 11:2)\cdot 123=88\cdot 123=10824$

2. Să se afle ultima cifră a numărului: $2^{n+1}\cdot 5^{n+2}-2^{n}\cdot 5^{n+1}$.

P.S.V.2112, [4]

Rezolvare:

$UC(2^{n+1}\cdot 5^{n+2}-2^{n}\cdot 5^{n+1})=UC(2^{n}\cdot 2\cdot 5^{n}\cdot 5^{2}-2^{n}\cdot 5^{n}\cdot 5)$

$\Rightarrow$

$UC(2^{n+1}\cdot 5^{n+2}-2^{n}\cdot 5^{n+1})=UC[2^{n}\cdot 5^{n}\cdot 5\cdot(10-1)]=UC(45\cdot 10^{n})=\begin{cases}0, & \text{pentru } n\in N^*\\ 5, & \text{pentru } n=0\end{cases}.$

3. Se dau mulţimile: $A=\{2^3;3\cdot(x+1)\};\ B=\{y+1;3x+2\}$.

a) Determinaţi valorile lui x şi y pentru care $A\cup B$ are două elemente;

b) Pentru x, y determinate calculaţi: $A\cap B; A-B$.

P.S.V.2120, [4]

Rezolvare:

a) Se observă că elementele mulţimii sunt aceleaşi.

$3\cdot(x+1)\neq 3x+2\Rightarrow 3\neq 2$

$3x+2=8\Rightarrow x=2$

$3\cdot(x+1)=y+1\Rightarrow y=8$

$\Rightarrow A=B=\{2;\ 8\}\Rightarrow A\cup B=\{2;\ 8\}$

b) $A\cap B=\{2;8\}$

$A-B=\varnothing$

4. Determinaţi elementele mulţimii $A=\left\{x\in N \middle| \frac{9}{x+1}\in N\right\}$.

P.S.V.2123, [4]

Rezolvare:

Se observă că pentru $x+1>9$, adică $x>8$ fracţia devine subunitară, deci nu va mai putea aparţine lui N:

Verificăm care dintre valorile $x\leq 8$ îndeplinesc condiţiile cerute:

Pentru $x=0\Rightarrow \frac{9}{1}=9\in N$ Pentru $x=3\Rightarrow \frac{9}{4}\notin N$ Pentru $x=6\Rightarrow \frac{9}{7}\notin N$

Pentru $x=1\Rightarrow \frac{9}{2}\notin N$ Pentru $x=4\Rightarrow \frac{9}{5}\notin N$ Pentru $x=7\Rightarrow \frac{9}{8}\notin N$

Pentru $x=2\Rightarrow \frac{9}{3}=3\in N$ Pentru $x=5\Rightarrow \frac{9}{6}=\frac{3}{2}\notin N$ Pentru $x=8\Rightarrow \frac{9}{9}=8\in N$

Deci , $A=\{0;\ 2;\ 8\}$.

5. Să se determine a şi b care au suma 56, iar restul împărţirii lui a la b este 4.

C.R..V.4, [4]

Rezolvare:

$$\begin{cases} a+b=56 \\ a=b\cdot c+4 \end{cases}, \quad b>4 \quad c=\text{cât}$$

$a=56-b \Rightarrow 56-b=b\cdot c+4 \Rightarrow 52=b\cdot(1+c)$

$52=1\cdot 52=52\cdot 1=2\cdot 26=26\cdot 2=4\cdot 13=13\cdot 4$

Pentru $b\cdot(1+c)=1\cdot 52 \Rightarrow b=1$; $1+c=52 \Rightarrow c=51$ FALS

Pentru $b\cdot(1+c)=52\cdot 1 \Rightarrow b=52$; $1+c=1 \Rightarrow c=0 \Rightarrow a=4 \Rightarrow$ ADEVĂRAT

Pentru $b\cdot(1+c)=2\cdot 26 \Rightarrow b=2$; $1+c=26 \Rightarrow c=25$ FALS

Pentru $b\cdot(1+c)=26\cdot 2 \Rightarrow b=26$; $1+c=2 \Rightarrow c=1 \Rightarrow a=30 \Rightarrow$ ADEVĂRAT

Pentru $b\cdot(1+c)=4\cdot 13 \Rightarrow b=4$; $1+c=13 \Rightarrow c=12$ FALS

Pentru $b\cdot(1+c)=13\cdot 4 \Rightarrow b=13$; $1+c=4 \Rightarrow c=3 \Rightarrow a=43 \Rightarrow$ ADEVĂRAT

Soluţia: (a,b) = (4; 52); (30; 26); (43;13).

6. ***a)*** Câte numere naturale de patru cifre în baza 10 sunt egale cu răsturnatele lor?
b) Calculaţi suma acestor numere.

C.R..V.5, [4]

Rezolvare:

a) $\overline{abcd}=\overline{dcba} \Rightarrow a=d$; $b=c \Rightarrow \overline{abba}=\overline{abba}$

a poate lua valori de la **1** la **9,** iar **b** poate lua valori de la **0** la **9,** deci în total: $9\cdot 10=90$ numere.

b)

$$S=1001+1111+1221+...+9999=(1001+9999)+(1111+9889)+...+(1991+9009)+...+$$
$$+(2002+8998)+...+(2992+8008)+(3003+7997)+...(3993+7007)+(4004+6996)+...+$$
$$+(4994+6006)+(5005+5995)+...(5445+5555)=45\cdot 11000=495.000$$

7. Dacă se pun câte 3 flori într-o vază, rămân 6 flori fără vază. Dacă se pun câte 4 flori, rămân 2 vaze goale. Câte flori şi câte vaze sunt?

C.R..IV.1, [4]

Rezolvare:

Fie $f=$ numărul de flori şi $v=$ numărul de vaze.

$$\begin{cases} f=3\cdot(v+2) \\ f=4\cdot(v-2) \end{cases} \Rightarrow 3\cdot v+6=4\cdot v-8 \Rightarrow v=14\,\text{vaze} \Rightarrow f=3\cdot 16=48\,\text{flori}$$

8. Reconstituiţi adunarea:

```
 DOLJ +
  OLJ
   LJ
    J
 ----
 2098
```

C.R..IV.1, [4]

Rezolvare: J + J + J + J = 4 J ; U(4J) = 8 , rezultă că $J=\{2,7\}$

Pentru J = 2, L + L + L = 3 L = 9, deci L = 3; O + O = 0, deci O = 0 sau 5; 0 nu se poate; rezultă: D = 1, rezultă: DOLJ = 1532

Pentru J = 7, rezultă, cu un raţionament similar: DOLJ = 1497.

9. Aflaţi numerele naturale a, b,c, astfel încât $a^3+b^3+c^3=6^{2010}$.

P.P.V.1283, V, [4]

Rezolvare:

$a^3+b^3+c^3=6^{2010}$

$a^3+b^3+c^3=6^3\cdot 6^{2007}$

$a^3+b^3+c^3=6^3\cdot\left(6^{669}\right)^3$

$a^3+b^3+c^3=\left(3^3+4^3+5^3\right)\cdot\left(6^{669}\right)^3$

$a^3+b^3+c^3=\left(3\cdot 6^{669}\right)^3+\left(4\cdot 6^{669}\right)^3+\left(5\cdot 6^{669}\right)^3$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=3\cdot 6^{669}\\ b=4\cdot 6^{669}\\ c=5\cdot 6^{669}\end{cases}$$

10. Aflaţi termenul necunoscut din egalitatea: $4x+12x+20x+...+396x=990000$.

P.P.V.1286, V, [4]

Rezolvare:

$4x\cdot(1+3+5+...+99)=990000$

$4x\cdot 100\cdot 50:2=990000$

$10000\cdot x=990000\Rightarrow x=990000:10000$

$x=99$

11. Determinaţi elementele mulţimii $M=\left\{x\in Z\middle|x=\dfrac{7n+1}{2n-1},n\in N\right\}$.

P.P.V.1284, V, [4]

Rezolvare:

$$x=\frac{7n+1}{2n-1}=\frac{6n-3+n+4}{2n-1}=\frac{6n-3}{2n-1}+\frac{n+4}{2n-1}=\frac{3\cdot(2n-1)}{2n-1}+\frac{n+4}{2n-1}=3+\frac{n+4}{2n-1}$$

$2n-1\,|\,n+4\Rightarrow 2n-1\le n+4\Rightarrow n\le 5$

Pentru $n=0\Rightarrow x=3-4=-1$

Pentru $n=1\Rightarrow x=3+5=8$

Pentru $n=2\Rightarrow x=3+2=5$

Pentru $n=3\Rightarrow x=3+\dfrac{7}{5}=\dfrac{22}{5}\notin Z$

Pentru $n=4\Rightarrow x=3+\dfrac{8}{7}=\dfrac{22}{5}\notin Z$

Pentru $n=5\Rightarrow x=3+1=4$

Rezultă: $M=\{-1;4;5;8\}$

12. Să se arate că nu există numere naturale x şi y, astfel încât $x^2-100\cdot y=2002$.

P.P.V.1285, V, [4]

Rezolvare:

Presupunem că y ar fi număr natural.

$x^2 - 100 \cdot y = 2002 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 2002}{100} \in N \Rightarrow 100 \mid x^2 - 2002 \Rightarrow 2 \cdot 50 \mid x^2 - 2002 \Rightarrow$

$2 \mid 2002 \Rightarrow 2 \mid x^2 \Rightarrow x = 2k$

$100 \mid 4k^2 - 2002 \Rightarrow 4 \cdot 25 \mid 4k^2 - 2002 \Rightarrow 4 \mid 4k^2$, dar 4 nu divide pe 2002 .

Rezultă că y nu poate fi număr natural.

13. Arătaţi că suma tuturor numerelor naturale de patru cifre identice este un număr divizibil cu 11.

P.P.V.1275, V, [4]

Rezolvare:

$1111 + 2222 + 3333 + 4444 + 5555 + 6666 + 7777 + 8888 + 9999 = 1111 \cdot (1 + 2 + ... + 9) =$
$= 1111 \cdot 10 \cdot 9 : 2 = 1111 \cdot 45 = 11 \cdot 101 \cdot 45$ divizibil cu 11.

14. Arătaţi că $A = 12^n \cdot 26 + 3^{n+2} \cdot 4^{n+2} + 2^{n+3} \cdot 6^n \cdot 230$ este divizibil cu 2010 pentru orice $n \in N$.

P.P.V.1282, V, [4]

Rezolvare:

$A = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot 26 + 3^n \cdot 3^2 \cdot 2^{2n} \cdot 2^4 + 2^n \cdot 2^3 \cdot 3^n \cdot 2^n \cdot 230$

$A = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot \left(26 + 3^2 \cdot 2^4 + 2^3 \cdot 230\right) = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot (26 + 9 \cdot 16 + 8 \cdot 230) = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot 2010 \mid 2010$
divizibil cu 2010.

15. Care dintre mulţimile A şi B are elemente mai multe: $A = \left\{x \in N \mid 3^{71} < x \le 3^{82}\right\}$, $B = \left\{y \in N \mid y \le 3^{81}\right\}$?

P.P.V.1282, V, [4]

Rezolvare:

$a = 3^{82} - 3^{71} = 3^{71} \cdot \left(3^{11} - 1\right)$

$b = 3^{81} - 0 = 3^{81}$

$\frac{a}{b} = \frac{3^{71} \cdot \left(3^{11} - 1\right)}{3^{81}} = \frac{3^{11} - 1}{3^{10}} > 1 \Rightarrow$ deoarece $3^{11} - 1 > 3^{10} \Leftrightarrow 3^{11} - 3^{10} > 1 \Leftrightarrow 3^{10} \cdot (3 - 1) > 1$

$\Rightarrow a > b$

16. Să se determine numerele naturale x şi y ştiind că: $25_{(x)} + 14_{(y)} = 222_{(3)}$.

Gazeta matematică, nr.11/2007

Rezolvare:

Cum bazele trebuie să fie mai mari decât cifrele utilizate, rezultă: $x > 5;\ \ y > 4$.

$2 \cdot x + 5 + y + 4 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \Rightarrow 2 \cdot x + y = 17 \Rightarrow y = 17 - 2 \cdot x > 1 \Rightarrow x < 8 \Rightarrow$

$5 < x < 8 \Rightarrow x = \{6; 7\}$

$2 \cdot x = 17 - y \Rightarrow x = \frac{17 - y}{2} > 1 \Rightarrow 4 < y < 15$

Pentru $x = 6 \Rightarrow y = 17 - 2 \cdot 6 = 5$

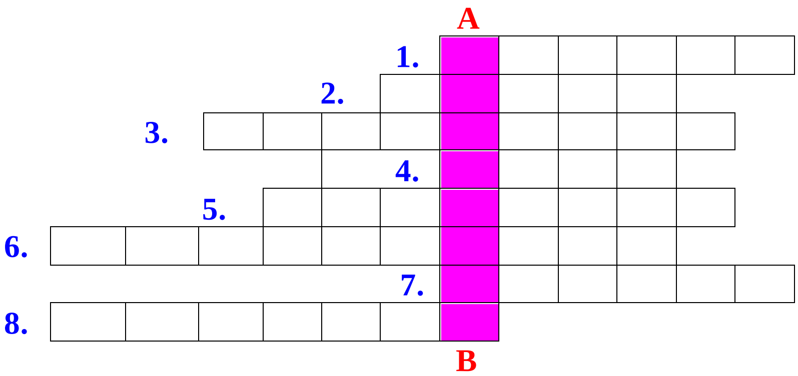
Pentru $x = 7 \Rightarrow y = 17 - 2 \cdot 7 = 3$ nu convine.

Soluţia: $x = 6;\ \ y = 5$.

V.III. REBUSURI ŞI INTEGRAME

V.III.1. Dacă se completează corect cerinţele de mai jos, pe traseul AB se va obţine un cuvânt folosit în matematică, fizică, chimie, statistică, economie, mass-media, etc:

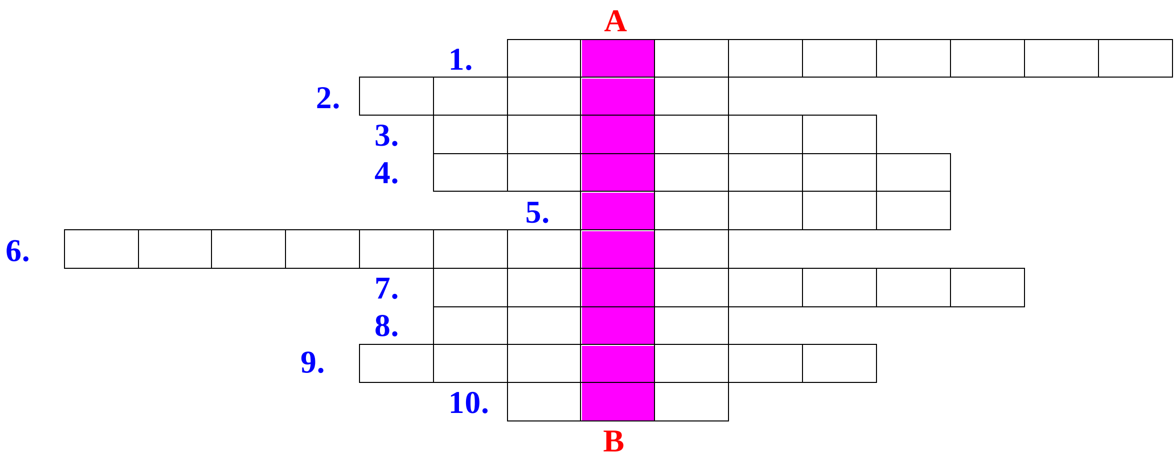
1. Rombul cu unghiuri drepte se numeşte ...
2. Unghiul cu masura de 90^0 se numeşte unghi ...
3. Segmentul care uneşte două vârfuri opuse ale unui patrulater se numeşte …
4. Toate punctele din plan, egal depărtate de un punct fix alcătuiesc un ...
5. Pătratul are patru axe de ...
6. Paralelogramul cu unghiurile drepte se numeşte...
7. Patrulaterul cu două laturi opuse paralele şi celelalte neparalele se numeşte ...
8. Punctul de unde începe o semidreaptă se numeşte ...



Autor, Ioana Dziţac

V.III.2. Dacă se completează corect cerinţele de mai jos, pe traseul AB se va obţine numele “reginei ştiinţelor” (Gauss):

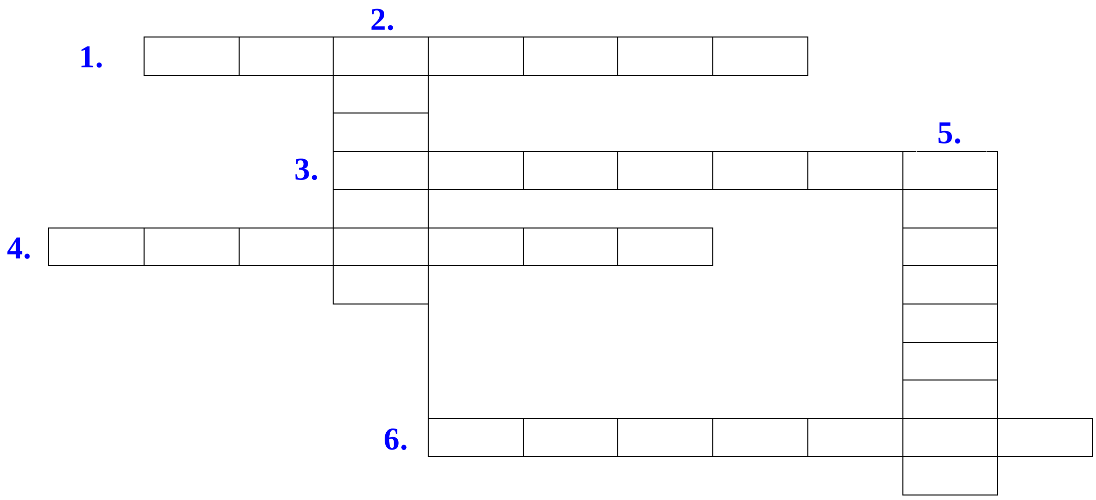
1. Operaţie matematică.
2. Numărul de forma $2\cdot k+1$, unde k este număr natural se numeşte…
3. Numărul 16 este ...perfect.
4. Mulţimea vidă nu are nici un ...
5. ...aritmetică a numerelor 5 şi 7 este 6.
6. Numărul 844 a fost ... prin adaos la 850.
7. Numărul 844 a fost ... la 840.
8. Numărul natural care are exact doi divizori, pe 1 şi pe el însuşi se numeşte număr…
9. O pereche de numere naturale a şi b , cu $b\neq 0$, notată $\frac{a}{b}$ se numeşte…
10. Numărul de forma $2\cdot k$, unde k este număr natural se numeşte…



Autor, Ioana Dziţac

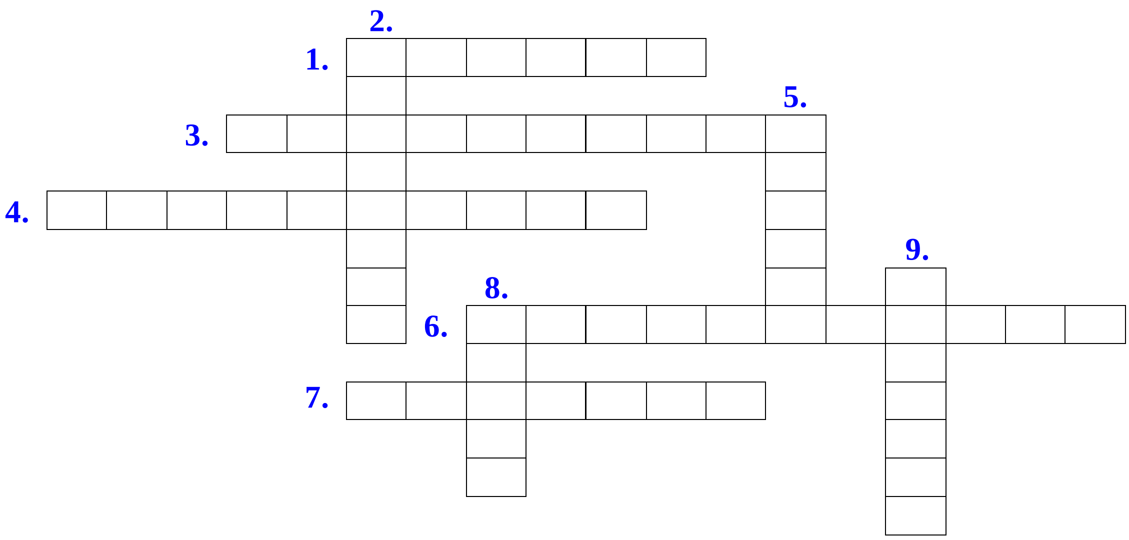
V.III.3.

1. Operaţie matematică.
2. …de măsură.
3. Numerele care se adună se numesc…
4. Numerele care se înmulţesc se numesc…
5. Operaţie matematică.
6. Operaţie matematică.



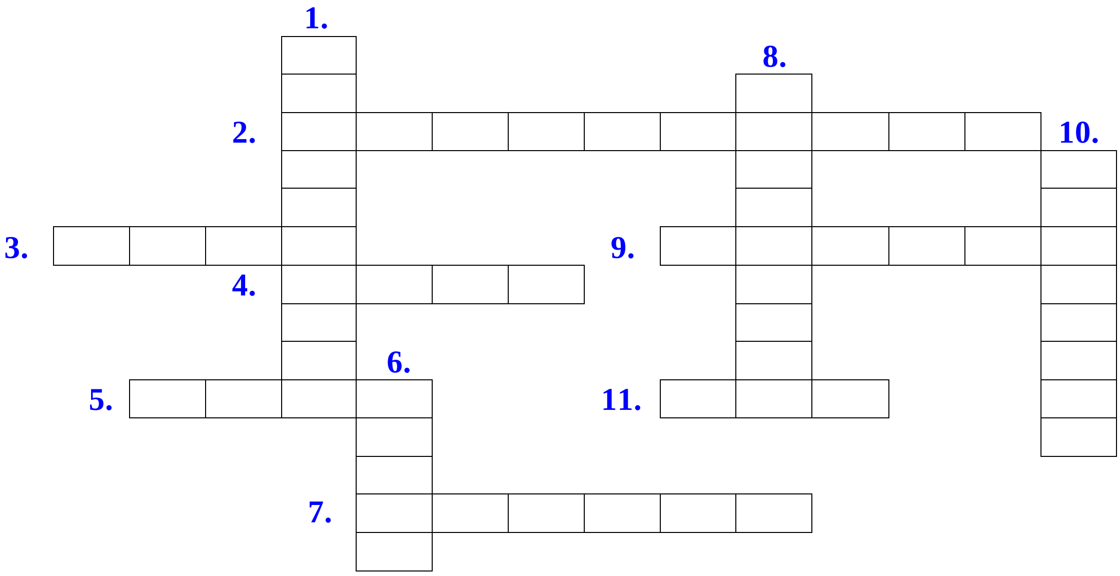
V.III.4.

1. Unitate principală pentru măsurat lungimea.
2. Unităţi mai mari decât unitatea principală de măsurat.
3. Unitatea principală de măsurat masa corpurilor.
4. De zece ori mai mare decât litrul.
5. Unitate principală pentru măsurat capacitatea.
6. Unităţi mai mici decât unitatea principală.
7. Zece ani sau un…
8. O sută de ani sau un…
9. O mie de ani sau un…



V.III.5.

1. Primul număr la împărţire.
2. Numărul la care se împarte.
3. Rezultatul adunării.
4. Se obţine când împărţitorul nu e divizor al deîmpărţitului ...
5. Ordin care se află după zeci.
6. Două pătrate care prin suprapunere coincid.
7. Lungime şi…
8. Rezultatul scăderii…
9. Rezultatul înmulţirii.
10. Primul număr la scădere.
11. Rezultatul împărţirii.



Răspunsuri V.III.

V.III.1.

							A					
						1.	P	Ă	T	R	A	T
					2.	D	R	E	P	T		
			3.	D	I	A	G	O	N	A	L	Ă
						4.	C	E	R	C		
			5.	S	I	M	E	T	R	I	E	
6.	D	R	E	P	T	U	N	G	H	I		
						7.	T	R	A	P	E	Z
8.	O	R	I	G	I	N	E					
							B					

V.III.2.

								A							
						1.	Î	M	P	A	R	T	I	R	E
				2.	I	M	P	A	R						
					3.	P	A	T	R	A	T				
					4.	E	L	E	M	E	N	T			
							5.	M	E	D	I	A			
6.	A	P	R	O	X	I	M	A	T						
					7.	R	O	T	U	N	J	I	T		
					8.	P	R	I	M						
				9.	F	R	A	C	T	I	E				
						10.	P	A	R						
								B							

V.III.3.

				2.							
	1.	A	D	U	N	A	R	E			
				N							
				I						5.	
			3.	T	E	R	M	E	N	I	
				A						N	
4.	F	A	C	T	O	R	I			M	
				E						U	
										L	
										T	
										I	
				6.	S	C	A	D	E	R	E
										E	

V.III.4.

						2.												
					1.	M	E	T	R	U	L							
						U							5.					
			3.	K	I	L	O	G	R	A	M	U	L					
						T							I					
4.	D	E	C	A	L	I	T	R	U	L			T					
						P							R		9.			
						L		8.					U		M			
						I	6.	S	U	B	M	U	L	T	I	P	L	I
								E							L			
					7.	D	E	C	E	N	I	U			E			
								O							N			
								L							I			
															U			

V.III.5.

				1.										
				D						8.				
				E						D				
			2.	I	M	P	A	R	T	I	T	O	R	10.
				M						F				D
				P						E				E
3.	S	U	M	A				9.	P	R	O	D	U	S
			4.	R	E	S	T			E				C
				Ț						N				A
				I	6.					T				Z
	5.	S	U	T	E			11.	C	A	T			U
					G									T
					A									
				7.	L	A	T	I	M	E				
					E									

BIBLIOGRAFIE

1. Mariana Mitea, Alina Birta, “*Matematică. Manual pentru clasa a V-a*”, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2005.
2. Sorin Peligrad, Dan Zaharia, Maria Zaharia, Mate 2000 + 9/10, “*Aritmetică. Algebră. Geometrie*“- partea I, clasa a V-a, Editura Paralela 45, Piteşti, 2009.
3. Sorin Peligrad, Dan Zaharia, Maria Zaharia, Mate 2000 + 9/10, “*Aritmetică. Algebră. Geometrie*“- partea a II-a, clasa a V-a, Editura Paralela 45, Piteşti, 2009.
4. *Revista de matematică* fondată în 1985, editată de SC Reprograph SRL, Craiova, Anul XV (seria a II-a), nr.2/2009
5. *Gazeta de matematică,* nr.11/2007
6. Florica Vancea, Radu Luncan, Ovidiu Butişcă, Octavian Butişcă, “*Matematica pentru gimnaziu. Ghid practic pentru elevi şi părinţi*”, Editura Brevis, Oradea, 1998.
7. Marcela Peneş, “*Rebusuri şi integrame şcolare*”, clasele I-IV, Editura Ana, 2005.
8. http://ro.wikipedia.org/wiki/Ciurul_lui_Eratostene
9. http://www.isjbihor.ro/isj/discipline/matebh.html
10. http://www.cangurul.ro/

ANEXĂ

FRUMUSEŢEA MATEMATICĂ

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$
$$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$$

$9 \times 9 + 7 = 88$
$98 \times 9 + 6 = 888$
$987 \times 9 + 5 = 8888$
$9876 \times 9 + 4 = 88888$
$98765 \times 9 + 3 = 888888$
$987654 \times 9 + 2 = 8888888$
$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$
$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$

$1 \times 1 = 1$
$11 \times 11 = 121$
$111 \times 111 = 12321$
$1111 \times 1111 = 1234321$
$11111 \times 11111 = 123454321$
$111111 \times 111111 = 12345654321$
$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$
$11111111 \times 11111111 =$
123456787654321
$111111111 \times 111111111 =$
12345678987654321