

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

III.6. PROBLEME RECAPITULATIVE PROPUSE SPRE REZOLVARE

ALGEBRĂ

$$1. \frac{0, (3) + \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot x}{0,0(3) + 13} = \frac{2620}{5083} \Rightarrow \frac{\frac{3}{9} + \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot x}{\frac{3}{90} + 13} = \frac{2620}{5083} \Rightarrow \dots \frac{420 + 351 \cdot x}{1173} = \frac{1310}{391} \Rightarrow$$

$$\dots \Rightarrow 420 + 351 \cdot x = 3930 \Rightarrow 351 \cdot x = 3510 \Rightarrow x = 10$$

$$2. \frac{bc}{a} \cdot \frac{x}{a} + \frac{ac}{b} \cdot \frac{x}{b} + \frac{ab}{c} \cdot \frac{x}{c} = 1 \Rightarrow x \cdot (bc + ac + ab) = abc$$

$$\frac{b}{a} = \frac{0, (3)}{0, (6)} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \frac{c}{b} = \frac{0, (36)}{0, (63)} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{\frac{36}{99}}{\frac{63}{99}} = \frac{36}{63} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Din } \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b, \quad \frac{c}{b} = \frac{4}{7} \Rightarrow c = \frac{4}{7} \cdot b$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(b \cdot \frac{4}{7} \cdot b + 2b \cdot \frac{4}{7} \cdot b + 2b \cdot b \right) = 2b \cdot b \cdot \frac{4}{7} \cdot b \Rightarrow \text{după calcule că } \frac{b}{x} = \frac{13}{4};$$

$$\text{Din } a = 2b \Rightarrow b = \frac{a}{2}, \Rightarrow c = \frac{4}{7} \cdot b = \frac{4}{7} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2}{7} \cdot a$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot a + a \cdot \frac{2}{7} \cdot a + a \cdot \frac{a}{2} \right) = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot a \Rightarrow \text{după calcule că } \frac{a}{x} = \frac{13}{2};$$

$$\text{Din } c = \frac{4}{7} \cdot b \Rightarrow b = \frac{7}{4} \cdot c \Rightarrow a = 2 \cdot \frac{7}{4} \cdot c = \frac{7}{2} \cdot c$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(\frac{7}{4} \cdot c \cdot c + \frac{7}{2} \cdot c \cdot c + \frac{7}{2} \cdot c \cdot \frac{7}{4} \cdot c \right) = \frac{7}{2} \cdot c \cdot \frac{7}{4} \cdot c \cdot c \Rightarrow \text{după calcule că } \frac{c}{x} = \frac{13}{7}.$$

3. 2011 este număr prim.

Numărul divizorilor lui $A = 2011^{2011}$ este $2011 + 1 = 2012$ divizori, care sunt:
 $1, 2011, 2011^2, 2011^3, \dots, 2011^{2011}$

Suma divizorilor va fi:

$$S = 1 + 2011 + 2011^2 + 2011^3 + \dots + 2011^{2011} = 2011^{2012} - 1$$

Arătăm că S nu se divide cu 2011 prin metoda reducerii la absurd.

Presupunem că S se divide cu 2011, de unde rezultă că $S \in M_{2011}$,

rezultă $2011^{2012} - 1 = 2011n, n \in \mathbb{N}$.

Atunci $2011^{2012} = 2011n + 1$

$$(2011^{1006})^2 = 2011n + 1, \text{ de unde rezultă că } 2011n + 1 \text{ e pătrat perfect.}$$

Așadar $2011n + 1 = k^2, k \in \mathbb{N}$,

$$2011n = k^2 - 1,$$

$$2011n = (k-1)(k+1)$$

Avem două cazuri:

$$I. \begin{cases} 2011 = k - 1 \\ n = k + 1 \end{cases}, \text{ de unde, adunând relațiile membru cu membru obținem } k = 2012 \text{ și } n = 2013$$

$$\text{Atunci } (2^{1006})^2 = 2013 \cdot 2011 + 1 = (2012 + 1) \cdot (2012 - 1) + 1 = 2012^2,$$

de unde rezultă $2^{1006} = 2012$ „F”.

$$\text{II. } \begin{cases} 2011 = k + 1 \\ n = k - 1 \end{cases}, \text{ de unde, adunând relațiile membru cu membru obținem } k = 2010 \text{ și } n = 2009.$$

$$\text{Atunci } (2^{1006})^2 = 2011 \cdot 2009 + 1 = (2010 + 1) \cdot (2010 - 1) + 1 = 2010^2, \\ \text{de unde rezultă } 2^{1006} = 2010, \text{ „F”}.$$

Din (I) și (II) rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci S nu se divide cu 2011.

$$4. \quad 27A = 3^3 A \text{ și } 8A^2 = 2^3 A^2$$

Descompunerile ne sugerează că $A = 2^a 3^b$, $a, b \in \mathbb{N}$.

$$\text{Atunci, card } D_A = (a + 1) \cdot (b + 1)$$

$$27A = 3^3 2^a 3^b = 2^a 3^{3+b}, \text{ de unde rezultă card } D_{27A} = (a + 1) \cdot (b + 4) \text{ și obținem relația:}$$

$$(a + 1) \cdot (b + 4) = (a + 1) \cdot (b + 1) + 15,$$

$$ab + 4a + b + 4 = ab + a + b + 1 + 15 \Rightarrow ab + 4a + b + 4 - (ab + a + b + 1 + 15) = 0$$

$$\Rightarrow ab + 4a + b + 4 - ab - a - b - 1 - 15 = 0 \Rightarrow 3a - 12 = 0 \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = 4.$$

$$8A^2 = 2^3 (2^a 3^b)^2 = 2^{3+2a} 3^{2b}, \text{ de unde rezultă card } D_{8A^2} = (2a + 4) \cdot (2b + 1) \text{ și obținem relația:}$$

$$(2a + 4) \cdot (2b + 1) = 4 \cdot (a + 1) \cdot (b + 1),$$

$$4ab + 2a + 8b + 4 = 4ab + 4a + 4b + 4$$

Cum $a = 4$, rezultă:

$$16b + 8 + 8b + 4 = 16b + 16 + 4b + 4 \Rightarrow 4b = 8 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{Numărul } A = 2^4 3^2 = 144$$

5. Avem:

$$\text{Pentru prima bucată de metal: } \begin{cases} m_1 = 6,250\text{kg} \\ T_1 = 0,725 \end{cases} \Rightarrow M_1 = \frac{m_1}{T_1} = 8,62\text{kg}$$

$$\text{Pentru a doua bucată de metal: } \begin{cases} m_2 = 9,225\text{kg} \\ T_2 = 0,800 \end{cases} \Rightarrow M_2 = \frac{m_2}{T_2} = 11,53\text{kg}$$

$$\text{Pentru a treia bucată de metal: } \begin{cases} m_3 = 15,450\text{kg} \\ T_3 = ? \end{cases} \Rightarrow M_3 = \frac{m_3}{T_3} = \frac{15,45}{T_3}$$

$$T = \frac{m}{M} \Rightarrow 0,825 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{M} \Rightarrow M = \frac{6,25 + 9,225 + 15,45}{0,825} = \frac{30,925}{0,825} = 37,4848\text{kg}$$

T = titlul aliajului

M = masa aliajului

$$\begin{cases} M = 37,4848\text{kg} \\ M = M_1 + M_2 + M_3 \end{cases} \Rightarrow 8,62 + 11,53 + \frac{15,45}{T_3} = 37,4848 \Rightarrow \frac{15,45}{T_3} = 17,3348 \Rightarrow T_3 = \frac{15,45}{17,3348} = 0,89$$

$$6. \quad A = 45 \cdot 15^{2n+1} + 9^{n+1} \cdot 5^{2n+3} + 25^{n+2} \cdot 3^{2n+1}$$

$$A = 45 \cdot 15 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} + 9 \cdot 5^3 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} + 3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 3 \cdot 25^2$$

$$A = 3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot (675 + 1125 + 1875)$$

$$A = 3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 3675$$

$$\frac{A}{3^a} = \frac{3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 3675}{3^a}$$

$$\frac{A}{3^a} = \frac{3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 3 \cdot 1225}{3^a} = \frac{3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 35^2}{3^{a-1}} = \frac{(3^n \cdot 5^n \cdot 35)^2}{3^{a-1}} \quad (*)$$

Pentru $a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, $\frac{A}{3^a}$ este număr natural pătrat perfect, avem:

$$\frac{A}{3^a} = \frac{(3^n \cdot 5^n \cdot 35)^2}{(3^k)^2} = \left(\frac{3^n \cdot 5^n \cdot 35}{3^k} \right)^2 = (3^{n-k} \cdot 5^n \cdot 35)^2$$

$$\text{Pentru } k=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow \frac{A}{3^a} = (3^n \cdot 5^n \cdot 35)^2$$

Valoarea minimă a lui a pentru care $\frac{A}{3^a}$ este număr natural pătrat perfect este $a=1$

Pentru ca $\frac{A}{3^a}$ să fie număr natural trebuie ca $n \geq k$

Valoarea maximă a lui a pentru care $\frac{A}{3^a}$ este număr natural pătrat perfect se obține când 3^{a-1} de la

numitor se simplifică cu 3^{2n} de la numărător în relația (*).

Așadar, $a-1 = 2n$, de unde rezultă $a = 2n+1$.

7. a) pentru a_i numere pare $\Rightarrow S = S_{\max} = 101$; pentru a_i numere impare $\Rightarrow S = S_{\min} = -101$
 b) deoarece S cuprinde 101 termeni, adică un număr impar de termeni, rezultă: $S \neq 0$.

$$8. \text{ Avem } (b-a) = -(a-b) \Rightarrow (b-a)^n = [-1 \cdot (a-b)]^n = \begin{cases} (a-b)^n, & \text{pentru } n = 2k \\ -(a-b)^n, & \text{pentru } n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow$$

cerințele de la punctele a și b sunt adevărate.

9. Considerăm $a < b < c < d$ și expresia $E(a, b, c, d) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{332}{abcd}$. Deoarece fracțiile

au valori maxime când numitorii au cele mai mici valori posibile, adică $a^2 = 1^2, b^2 = 2^2,$

$$c^2 = 3^2, d^2 = 4^2 \Rightarrow E(a, b, c, d) \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{332}{576} = \frac{1152}{576} = 2, \text{ echivalent cu relația}$$

$$abc + abd + acd + bcd + 332 \leq 2abcd.$$

10. $2^x \cdot 3^y \cdot 5^{2+z} \cdot 7^u = t!$ nu conține pe 11 iar cum $t!$ conține factori $\leq t \Rightarrow t < 11$.

$t!$ conține pe $5^{2+z} = 5^2 \cdot 5^z$, adică pe 5^2 .

Dar până la 11, doar numărul 5 și 10 îl conține pe 5. Rezultă: $10 \leq t < 11 \Rightarrow t = 10$.

Rezultă: $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^{2+z} \cdot 7^u \Rightarrow$ prin identificare
 $x = 8; y = 4; z = 0; u = 1$

GEOMETRIE

$$11. \text{ a) } \widehat{DEC} \equiv \widehat{DCE}; [\widehat{DE}] \equiv [\widehat{DE}] \equiv [\widehat{DA}]$$

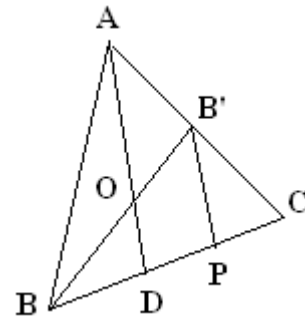
b) $\triangle ADE$ isoscel $\Rightarrow \widehat{AED} \equiv \widehat{DAE}$. Dar $\widehat{AED} \equiv \widehat{EAB}$ (alterne interne), deci (AE este bisectoare în $\triangle ABC \Rightarrow AE \perp BC$.

$\triangle BEF$ este isoscel $\Rightarrow (BE) \equiv (EC) \equiv (EF)$.

12. În $\triangle AME$ și $\triangle BMD$, se aplică teorema 30-60-90.

13.

Fie O mijlocul medianei BB' și P mijlocul lui DC . Cum $B'P$ este linie mijlocie în triunghiul $\triangle ADC$, OD este linie mijlocie în $\triangle PB'B$,
Deci $BD = DP = PC = BC/3$.



14. Se realizează desenele și se constată următoarele situații posibile:

- 5 semidrepte distincte (20 unghiuri),
- 4 semidrepte distincte și 1 confundată (12 unghiuri),
- 3 semidrepte distincte și 2 confundate (6 unghiuri),
- 2 semidrepte distincte și 3 confundate (1 unghi),
- 5 confundate (un unghi nul).

15. Sunt două cazuri posibile:

- (OB este în interiorul unghiului $\widehat{AOC} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$; $m(\widehat{BOC}) = 30^\circ$;
- (OC este în interiorul unghiului $\widehat{AOB} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 180^\circ$; $m(\widehat{BOC}) = 60^\circ$;

16. a) Se realizează desenul și se notează $m \widehat{AOB} = 2x$ și $m \widehat{BOC} = 2y$.

Avem $x + y = 70^\circ$ și $x + 2y = 100^\circ$; $y = 30^\circ$ și $x = 40^\circ$; $m \widehat{AOC} = 140^\circ$, $m \widehat{AOB} = 80^\circ$, $m \widehat{BOC} = 60^\circ$

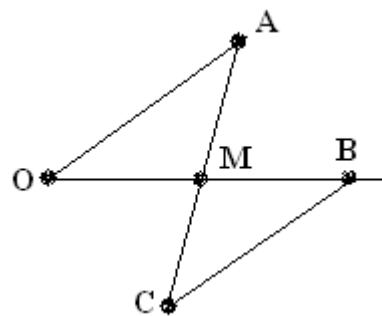
b) Aflăm $m \widehat{AOP} = 70^\circ$; unghiurile nu sunt congruente.

17.

Din $\triangle AOM$ și $\triangle CBM$ avem:

$$\begin{cases} AM = MC \\ OM = MB \end{cases} \xrightarrow{\text{LUL}} \triangle AOM \equiv \triangle CBM \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AMO} \equiv \widehat{BMC} \\ \widehat{AOM} \equiv \widehat{CBM} \end{cases} \Rightarrow OA \parallel BC$$

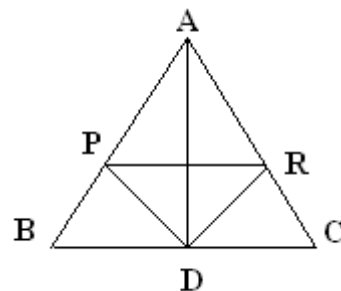
(unghiuri alterne interne)



18.

În $\triangle ABC$ isoscel, AD este înălțime
 $\Rightarrow [AD$ bisectoare.

$\xrightarrow{\text{ULU}} \triangle ADP \equiv \triangle ADR \Rightarrow AP = AR \Rightarrow \triangle APR$ isoscel
și $[AD$ bisectoare $\Rightarrow [AD$ înălțime
 $\Rightarrow AD \perp PR$.



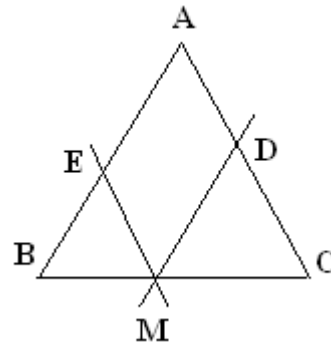
19. Presupunem prin absurd că $d_1 \parallel d_3$ și cum $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_2 \parallel d_3$ (absurd, deoarece contrazice ipoteza)

20.

$MD \parallel AB \Rightarrow \hat{BEM} \equiv \hat{EMD}$ (alterne interne)

$EM \parallel AC \Rightarrow \hat{EMD} \equiv \hat{CDM}$ (alterne interne)

$\Rightarrow \hat{BEM} \equiv \hat{CDM}$



IV. JOCURI ȘI REBUSURI pentru clasa a VI-a propuse de Dzițac Ioana

Rebus 1

											A											
1.	D	R	E	P	T																	
					2.	P	E	R	I	M	E	T	R	U								
						3.	E	C	H	I	L	A	T	E	R	A	L					
							4.	A	S	C	U	Ț	I	T	U	N	G	H	I	C		
5.	S	C	A	L	E	N																
						6.	C	O	N	G	R	U	E	N	T	E						
7.	O	B	T	U	Z	U	N	G	H	I	C											
									8.	I	S	O	S	C	E	L						
											B											

Rebus 2

											A																			
										1	D	O	I																	
											2	T	R	E	I															
												3	D	I	V	I	D	E												
													4	C	I	N	C	I												
														5	Z	E	C	E												
															6	D	O	I	S	P	R	E	Z	E	C	E				
																7	D	I	V	I	Z	I	B	I	L					
																	8	I	M	P	R	O	P	R	I	I				
9	D	I	V	I	Z	I	B	I	L																					
										10	D	I	V	I	Z	O	R													
											11	O	P	T	S	P	R	E	Z	E	C	E								
												12	Ș	A	S	E														
													13	O	P	T														
14	Ș	A	P	T	E																									

B



BIBLIOGRAFIE

1. Andrica D., Jecan E., Vâlcău D., Bogdan I., *Probleme calitative în matematica de gimnaziu*, Editura Gil Zalău, 1998;
2. Blaga A., Pop O., Pop R., Buth G., *Matematica – Auxiliar la manualele de matematică*, Ed. Gil Zalău, 2001;
3. Bușneag C., Boboc F., Piciu D., *Aritmetică și teoria numerelor*, Editura Universitaria, Craiova, 1999;
4. Brânzei Dan, Zaharia Dan, Zaharia Maria, *Aritmetică, algebră, geometrie*, clasa a VI-a, părțile I și II, Colecția Mate 2000 +10/11, Editura Paralela 45;
5. Brânzei Dan, goloșteanu M., Ulmeanu S., Gorgotă V., Șerdean I., *Matematica în concursurile școlare*, Editura Paralela 45, 2000, 2001, 2002;
6. Drugan Gheorghe și Alina, Ghica Ion și Mihaela, *Matematica în concursurile școlare*, Editura Teora, 1998, pag. 34-38;
7. Dzițac Domnica Ioana, *Trepte matematice clasa a V-a*, Editura Focusprint, 2010;
8. George D., *Cunoștințe vechi și noi despre divizibilitate*, Editura științifică și enciclopedică, 1990;
9. Iepure Lucia, Ioan Groza, Vasile Șerdean, *Matematică pentru grupele de performanță, Exerciții și probleme clasa a VI-a*, Editura Dacia Educațional, Cluj Napoca, 2004;
10. Moroti C., Giurgiu M., Radu D., Ștefan R., Ciupitu A., Drugan G., Ghica I., *Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a VI-a*, Editura Meteor Press, 2002;
11. Năstăsescu C., Niță C., Vraciu C., *Aritmetică și algebră*, EDP, 1993;
12. Petrică Ion, Bălșeanu Victor, Chebici Iaroslav, *Manual pentru clasa a VI-a*, Editura Petron, București, 2004;
13. Popovici C., Ligor I., Alexianu V., *Matematică-Aritmetică-Algebră*, EDP București, 1996;
14. Vancea Florica, Radu Lunčan, Ovidiu Butișcă, Octavian Butișcă, *Matematica pentru gimnaziu. Ghid practic pentru elevi și părinți*, Editura Brevis, Oradea, 1998;
15. *Gazeta Matematică*, Seria B nr.10/2010;
16. *Gazeta Matematică*, Seria B nr.12/2010;
17. *Gazeta Matematică*, Seria B nr.1/2011;
18. *Revista de matematică Alpha* fondată în 1985, editată de SC Reprograph SRL, Craiova, Anul XX (seria a II-a), nr.2/2010;
19. *Revista de matematică Alpha* fondată în 1985, editată de SC Reprograph SRL, Craiova, Anul XVI (seria a II-a), nr.1/2010;
20. Concursul Național de Matematică Lumina Math, 2010: <http://www.luminamath.ro/>;
21. Evaluări Naționale în Matematică:
<http://www.evaluareineducatie.ro/disciplina-matematica/start/>
22. Olimpiada Națională de matematică, etapele locală și județeană, 2011,
<http://www.isjbihor.ro/matebh/mate/index.php>
23. Olimpiada Națională de Matematică, etapa națională, clasele V-VI, Arad, 2011:
<http://www.matearad.ro/>

Observații suplimentare:

- Realizarea cărții s-a făcut în Microsoft Word 2003;
- Desenele s-au realizat în Paint, Visio, GeoGebra Dynamic Mathematic for Everyone;
- Graficele s-au trasat în Microsoft Excel;
- Programele s-au realizat în programul C++;
- O parte dintre poze sunt realizate de către subsemnata, iar cealaltă parte au fost luate de pe iGoogle *Imagini* (<http://www.google.ro/img?hl=ro&tab=wi>).