

Motto:

*“Există undeva, în domeniul înalt al geometriei, un loc luminos
unde se întâlnește cu poezia.”*

Ion Barbu

PARTEA a II-a

ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU



Scriu acest capitol cu gândul la geometria înălțătoare a New York-ului ...

II.1. POLIEDRE

Un **poliedru** este un corp mărginit numai de suprafețe plane. În figura II.1 se prezintă cele 5 tipuri de poliedre regulate existente conform teoremelor lui Euler:

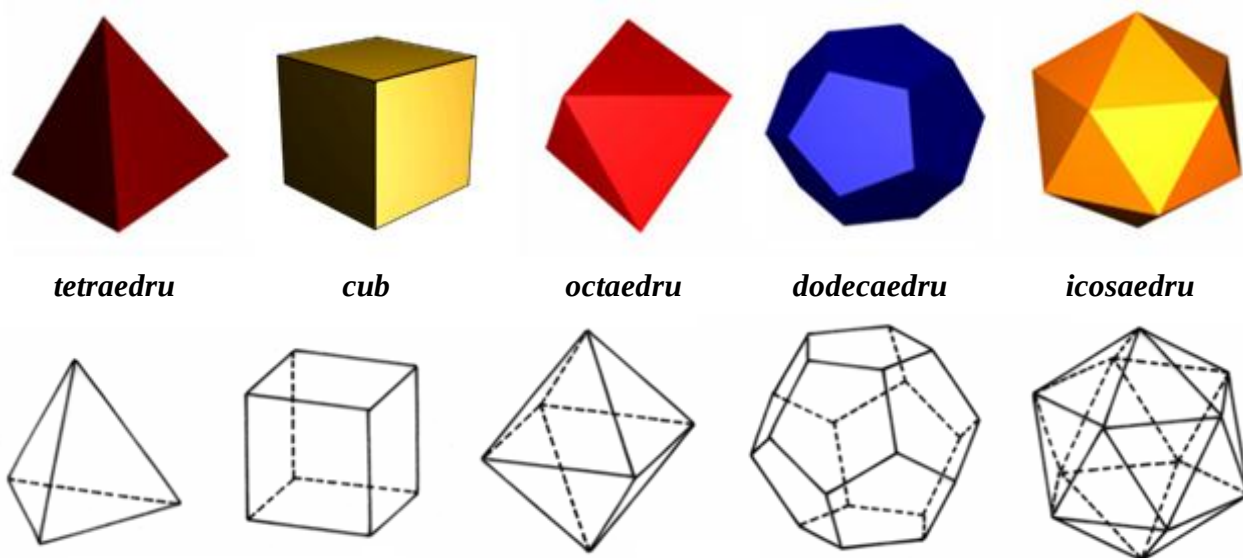


Figura II.1. Tipuri de poliedre

Poliedrele regulate au fețele poligoane regulate, cu același număr de laturi, iar unghiurile diedre și poliedre sunt egale între ele.

O bilă (sferă), neavând proprietatea de a fi mărginit doar de suprafețe plane, nu este poliedru.

1. Prisma

Noțiuni generale

Prisma este un corp limitat de o suprafață prismatică și două plane paralele care taie toate generatoarele suprafeței prismatice.

Suprafața prismatică este suprafața descrisă de o dreaptă mobilă care alunecă pe un poligon oarecare și rămâne paralelă cu o dreaptă fixă.

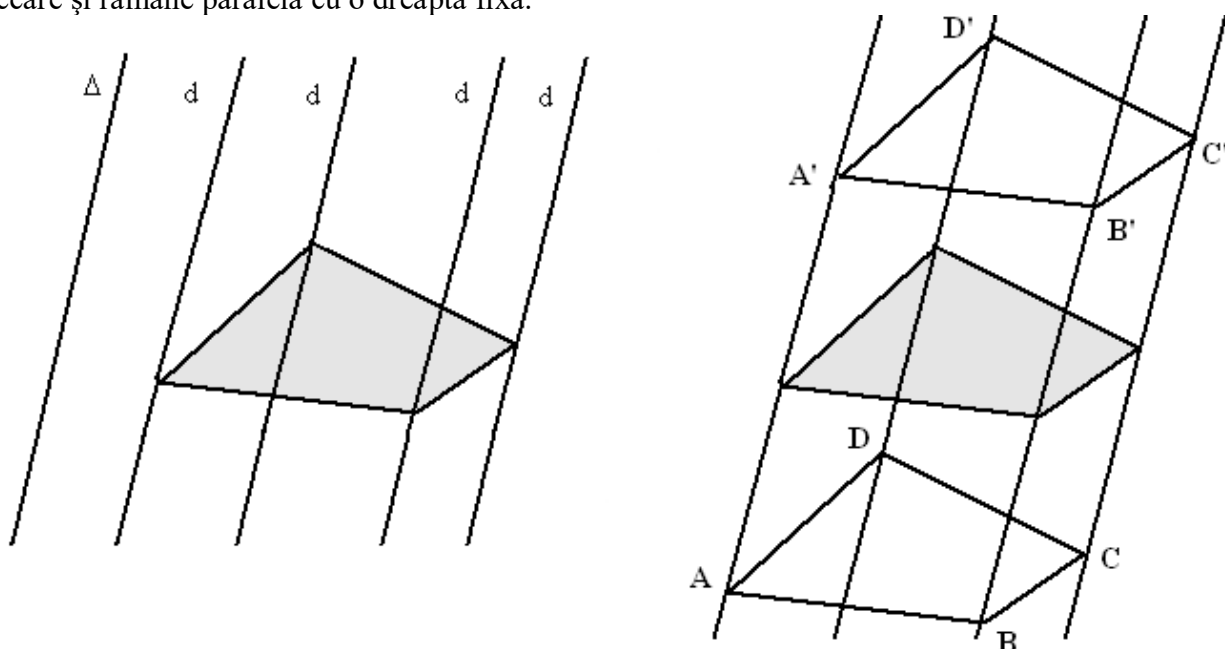


Figura II.2. Desene cu generarea suprafeței prismatice

Dreapta mobilă se numește **generatoarea** suprafeței, iar poligonul se numește **directoarea** suprafeței. Suprafața prismatică, prin tăierea cu două plane paralele determină pe cele două plane poligoane congruente, numite **bazele** prisme. Distanța dintre cele două baze ale prisme se numește **înălțimea** prisme.

Denumirea unei prisme este dată de numărul laturilor bazei: prismă triunghiulară, dacă bazele au fiecare 3 laturi, prismă patrulateră, dacă bazele au fiecare 4 laturi, etc.

Dacă generatoarea e perpendiculară pe planul poligonului director, toate fețele laterale ale prisme vor fi dreptunghiuri și prisma se numește prismă dreaptă. (1)

De exemplu, paralelipipedul dreptunghic, un caz particular al prisme patrulatere, are bazele dreptunghiuri congruente și fețele laterale patru dreptunghiuri congruente două câte două.

Dacă pe lângă condiția (1), poligonul director este un poligon regulat, obținemisme numite prisme regulate, care vor avea toate fețele laterale dreptunghiuri congruente.

De exemplu, prismă triunghiulară regulată (*figura II.3*), prismă patrulateră regulată (*figura II.4*), prismă hexagonală regulată (*figura II.5*) etc.

Cubul este o prismă patrulateră regulată cu toate fețele pătrate (*figura II.6*).

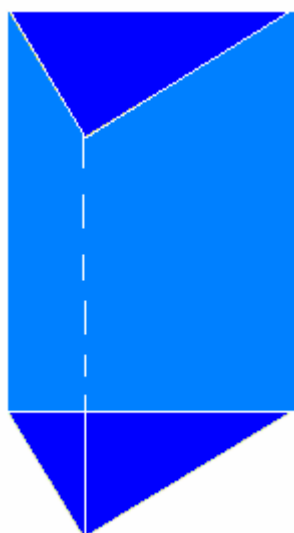


Figura II.3. Prismă triunghiulară regulată

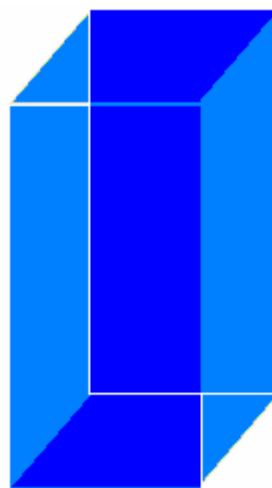


Figura II.4. Prismă patrulateră regulată

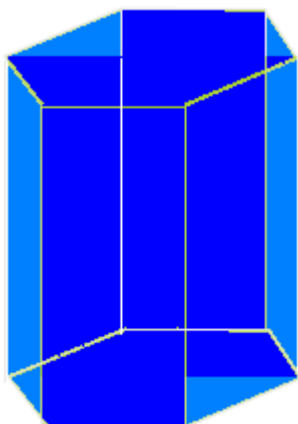


Figura II.5. Prismă hexagonală regulată

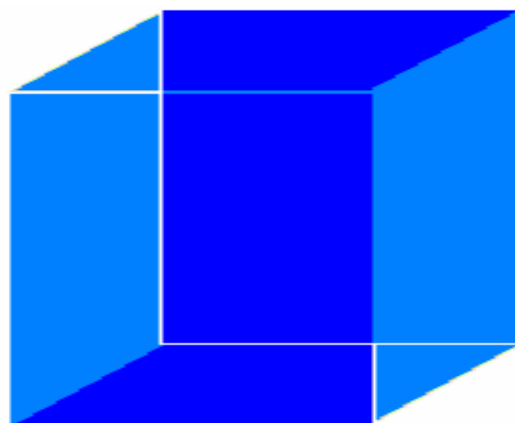


Figura II.6. Cubul

Pentru a confecționa din carton poliedre, construim întâi desfășurarea poliedrului și o îndoim astfel încât să obținem corpul.

Desfășurarea suprafeței corpului se poate realiza în moduri diferite. Unele desfășurări sunt mai des întâlnite, altele folosite mai rar.

Desfășurarea câtorva prisme

În figurile II.7÷II.11 vom prezenta tipuri de desfășurări pentru paralelipipedului dreptunghic, cub, prismă triunghiulară regulată, prismă patrulateră regulată, prismă hexagonală regulată.

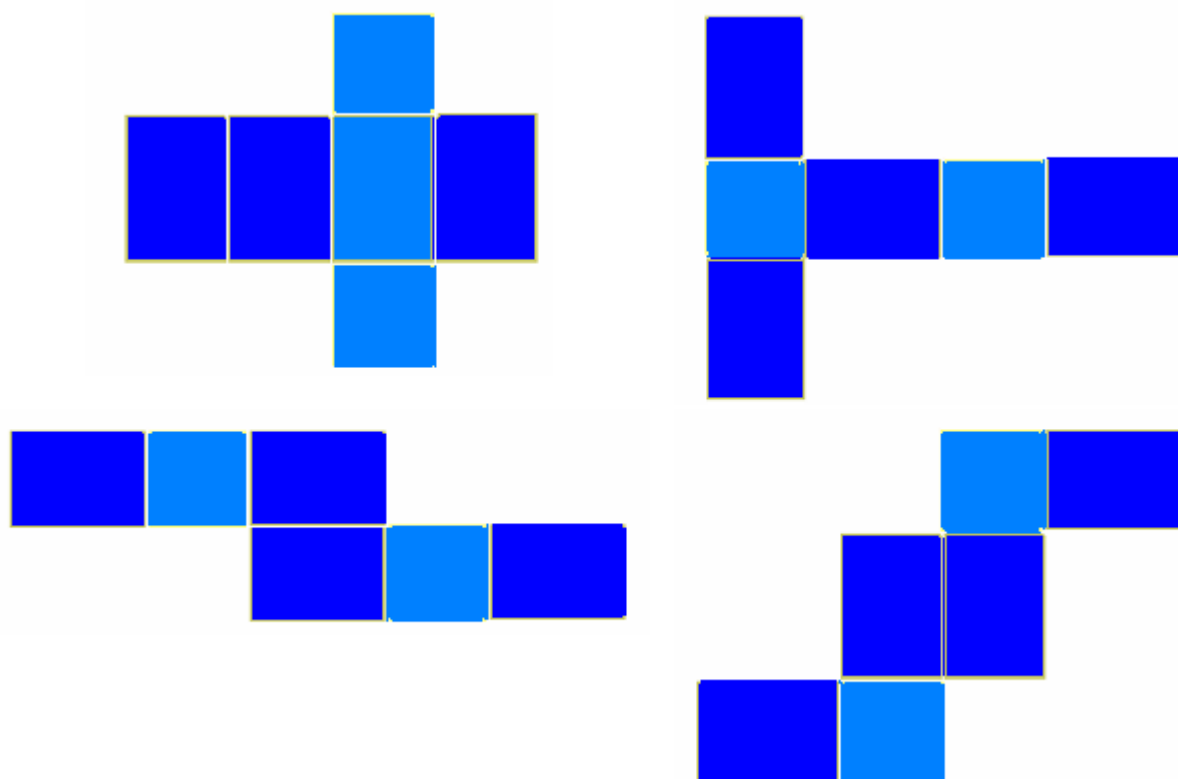


Figura II.7. Tipuri de desfășurări ale paralelipipedului dreptunghic

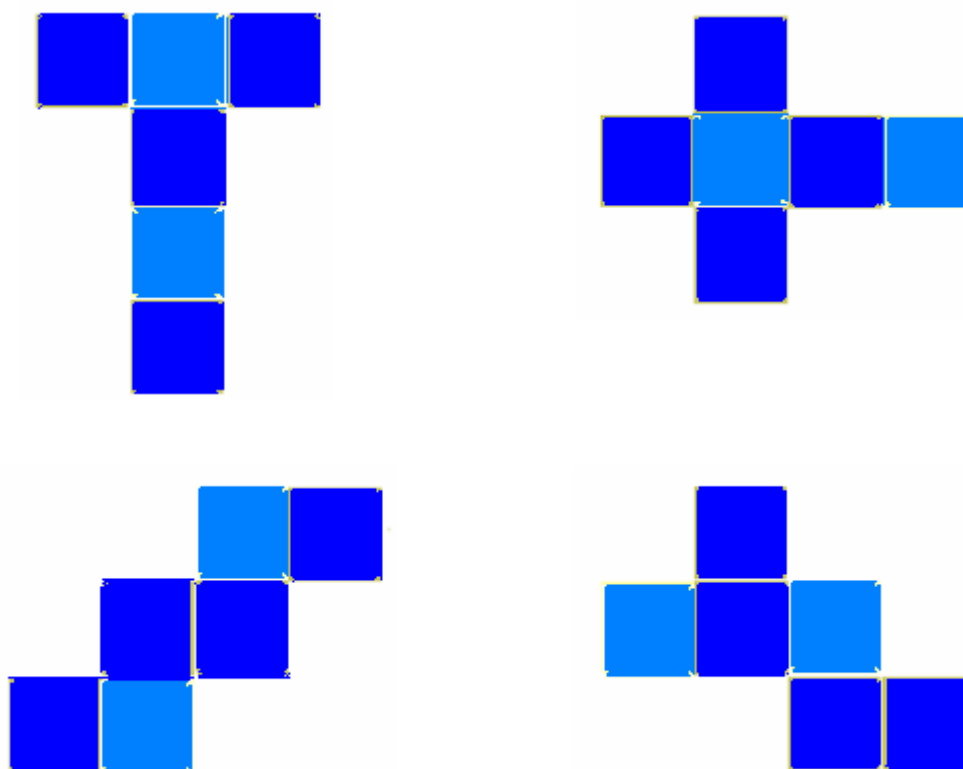


Figura II.8. Tipuri de desfășurări ale cubului

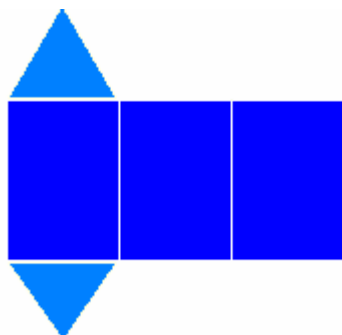


Figura II.9. Mod de desfășurare a prismei triunghiulare regulate

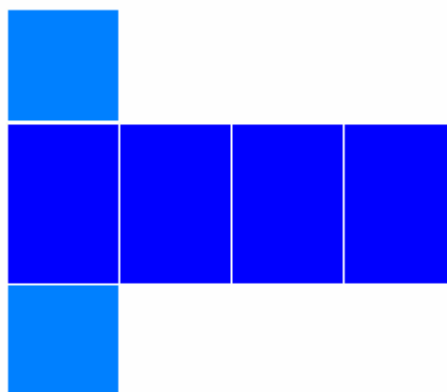


Figura II.10. Mod de desfășurare a prismei patrulatere regulate

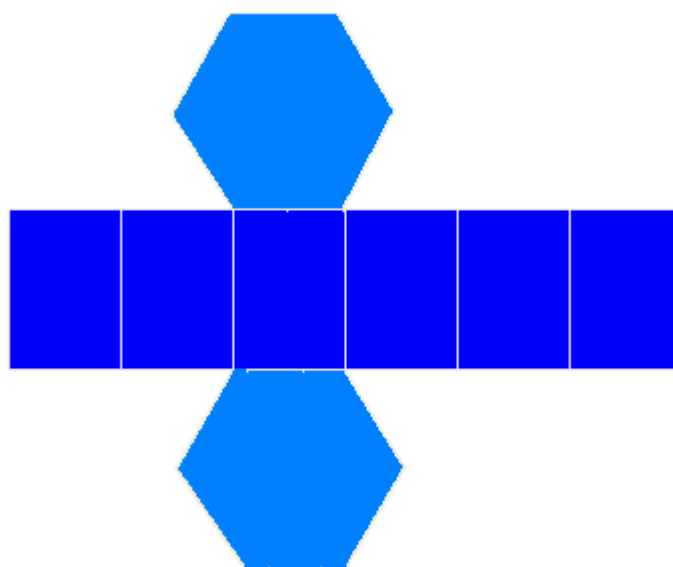


Figura II.11. Mod de desfășurare a prismei hexagonale regulate

Aria și volumul unei prisme

$A_{laterală}$ = suma ariilor fețelor laterale

Dacă **prisma este dreaptă**, se poate folosi formula:

$$A_{laterală} = P_{bazei} \cdot h_{prisma}$$

$$A_{totală} = A_{laterală} + 2 \cdot A_{bazei}$$

$$V = A_{bazei} \cdot h_{prisma}$$

Pentru **paralelipiped dreptunghic** cu dimensiunile a , b , c formulele generale devin:

$$A_{totală} = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$V = abc$$

$$\text{Diagonala} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Pentru **cubul** cu latura de lungime l formulele generale devin:

$$A_{laterală} = 4 \cdot l^2$$

$$A_{totală} = 6 \cdot l^2$$

$$V = l^3$$

$$\text{Diagonala} = l\sqrt{3}$$

Probleme cu desfășurarea prisme

1. O furnică pleacă dintr-un vârf al unui cub cu latura de 1 m, trece prin toate centrele fețelor cubului și se întoarce în vârful din care a plecat. Aflați distanța minimă pe care o poate parcurge furnica.

Rezolvare: Folosim una dintre variantele de desfășurare a suprafeței cubului:

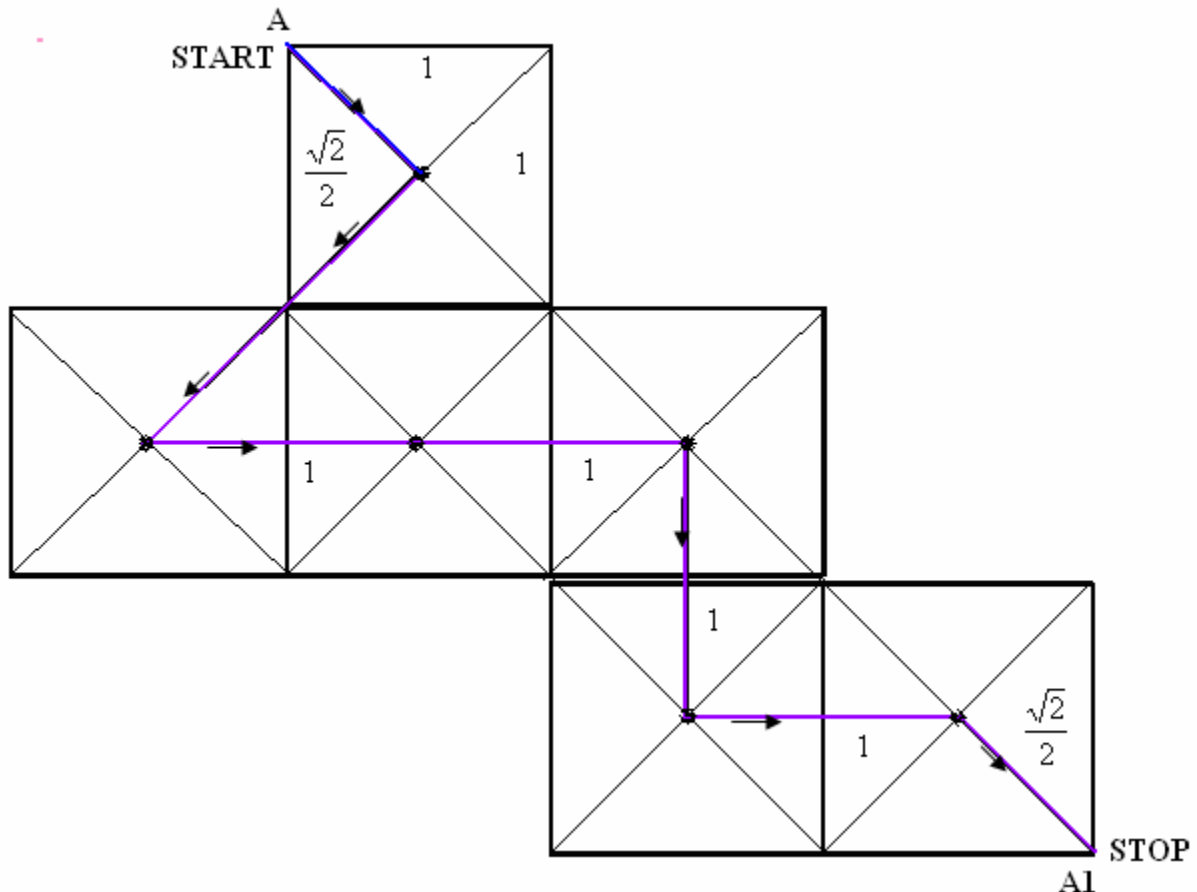


Figura II.12. Desenul problemei 1 (II.1-1)

$$AA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} + 4 = 2 \cdot (\sqrt{2} + 2) \text{ m.}$$

2. Prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ are desfășurarea suprafeței laterale un pătrat cu diagonala de $30\sqrt{2}$ cm.

a) Desenați desfășurarea prisme;

b) Calculați aria totală și volumul prisme;

c) Demonstrați că $\frac{A_{ABC}}{A_{ABC'}} = \cos \left[\widehat{(ABC), (ABC')} \right]$

Rezolvare:

a) În figura II.13 se figurează prisma $ABCA'B'C'$ și desfășurarea acesteia.

b) $l_{\text{desf}} = 30 \text{ cm}$, $l_{\text{b prismă}} = \frac{30}{3} = 10 \text{ cm}$

$$A_{\text{totală}} = 2 \cdot A_{\text{bazei}} + A_{\text{laterală}} \Rightarrow A_{\text{totală}} = 2 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 300 = (50\sqrt{3} + 900) \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h \Rightarrow V = 25\sqrt{3} \cdot 30 = 750\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

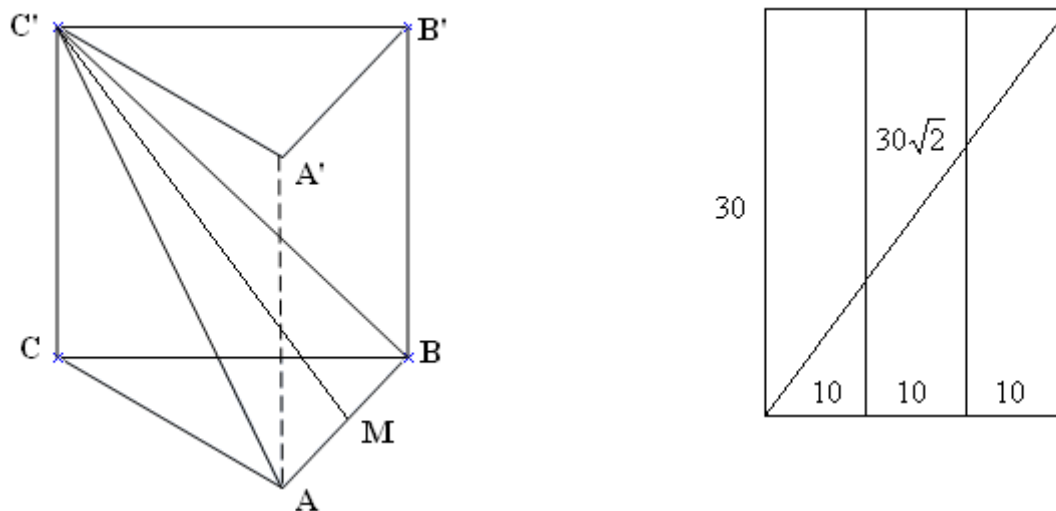


Figura II.13. Desenele problemei 2 (II.1-1)

$$\text{c) } \triangle ACC' - \text{dreptunghic} \xrightarrow{\text{T.P.}} AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 10\sqrt{10} \text{ cm}$$

$$\triangle AMC' - \text{dreptunghic} \xrightarrow{\text{T.P.}} MC' = \sqrt{AC'^2 - AM^2} = \sqrt{1000 - 25} = 5\sqrt{39} \text{ cm}$$

$$A_{\triangle C'AB} = \frac{C'M \cdot AB}{2} = \frac{5\sqrt{39} \cdot 10}{2} = 25\sqrt{39} \text{ cm}^2$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\cos \left[(\angle ABC), (\angle ABC') \right] = \cos \angle C'MC = \frac{MC}{MC'} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{39}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}} = \frac{A_{ABC}}{A_{ABC'}}$$

3. O prismă patrulateră regulată are desfășurarea suprafeței laterale un pătrat cu aria 576 cm^2 .

- Desenați desfășurarea suprafeței laterale;
- Calculați aria totală și volumul prisme;
- Calculați aria secțiunii diagonale a prisme.

Rezolvare:

a)

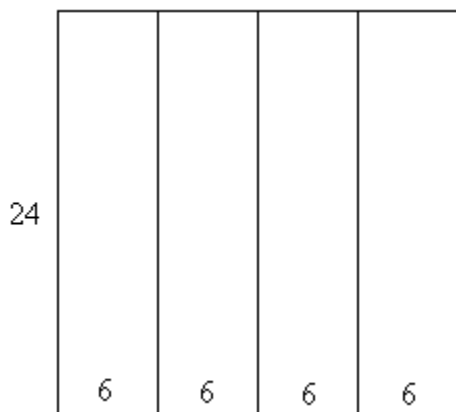


Figura II.14. Desenul problemei 3 (II.1-1)

$$\text{b) } A_{\text{desf}} = l_{\text{desf}}^2 = 576 \text{ cm}^2 \Rightarrow l_{\text{desf}} = 24 \text{ cm} \Rightarrow l_{\text{b prismă}} = \frac{l_{\text{desf}}}{4} = 6 \text{ cm} \Rightarrow h_{\text{prismă}} = 24 \text{ cm}$$

$$A_{\text{totală}} = 2 \cdot A_{\text{bazei}} + A_{\text{laterală}}$$

$$A_{\text{totală}} = 2 \cdot 36 + 576 = 648 \text{ cm}^2$$

$$V = L \cdot l \cdot h = 6 \cdot 6 \cdot 24 = 864 \text{ cm}^3$$

$$\text{c) } A_{\text{sec diag}} = \text{diag bază} \cdot h_{\text{prismă}} = 6\sqrt{2} \cdot 24 = 144\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

2. Piramida

Noțiuni generale

Piramida este un corp limitat de o suprafață piramidală și un plan care taie toate muchiile suprafeței piramidale.

Suprafața piramidală este suprafața descrisă de o semidreaptă cu originea într-un punct fix V și care alunecă pe un poligon oarecare. Punctul fix V se numește vârful, iar semidreptele cu originea în V și care trec prin vârfurile poligonului se numesc muchiile suprafeței piramidale.

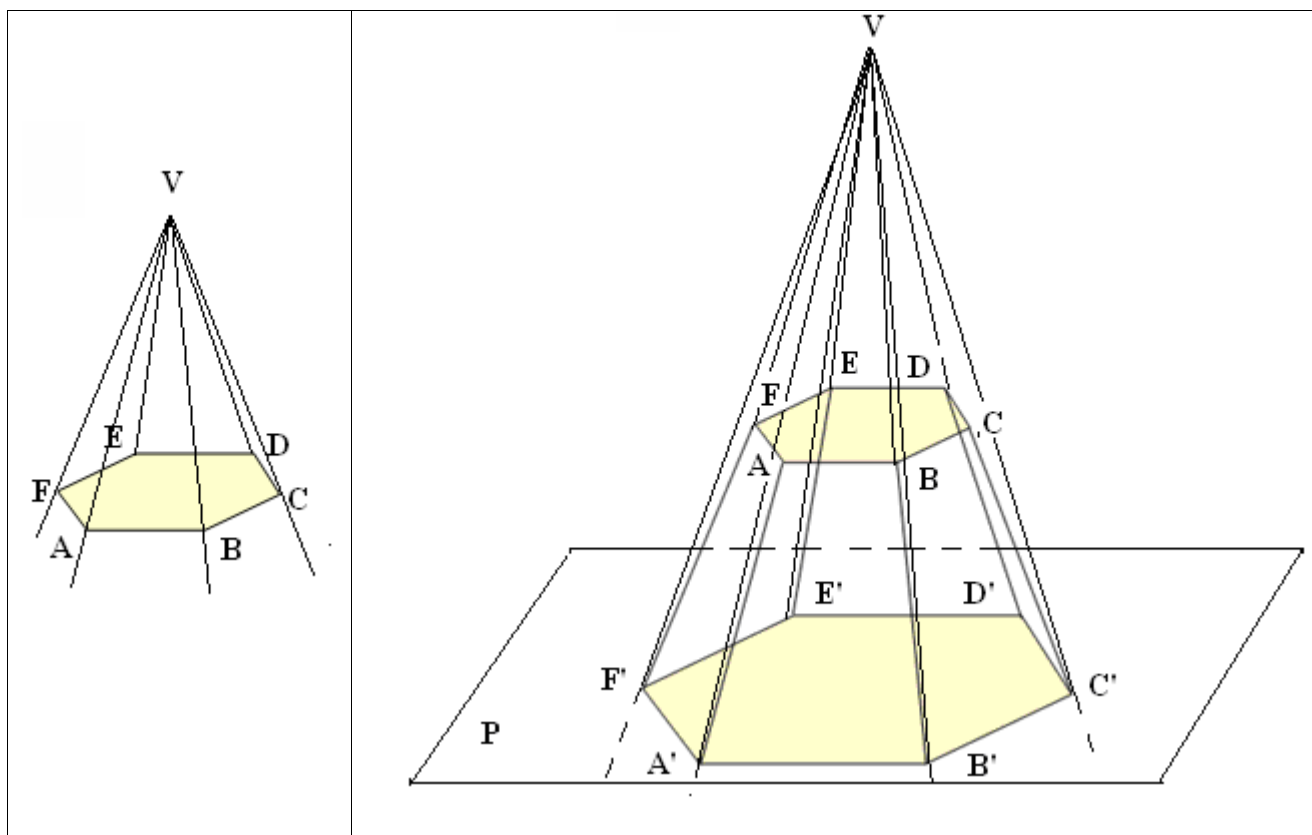


Figura II.15. Desen cu generarea suprafeței piramidale

Suprafața piramidală, prin secționarea cu un plan care taie toate muchiile determină un poligon numit **baza** piramidei. Fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri. Toate fețele laterale au comun **vârful** piramidei.

Distanța de la vârful piramidei la baza ei se numește **înălțimea** piramidei.

Denumirea unei piramide este dată de numărul laturilor bazei: piramidă triunghiulară (numită și tetraedru) dacă baza are 3 laturi, piramidă patrulateră, dacă baza are 4 laturi, etc.

Dacă baza unei piramide este un poligon regulat, iar înălțimea cade în centrul bazei, piramida se numește **piramidă regulată**.

Într-o piramidă regulată toate muchiile laterale sunt congruente și toate fețele laterale sunt triunghiuri congruente.

De exemplu, piramida triunghiulară regulată (figura II.16) are baza triunghi echilateral și trei fețe laterale triunghiuri isoscele congruente. Dacă o piramidă triunghiulară are și baza și fețele laterale triunghiuri echilaterale congruente, atunci ea se numește tetraedru regulat.

Piramida patrulateră regulată are baza pătrat și 4 fețe laterale triunghiuri isoscele congruente (*figura II.17*). Piramida hexagonală regulată are baza hexagon regulat și 6 fețe laterale triunghiuri isoscele congruente (*figura II.18*)

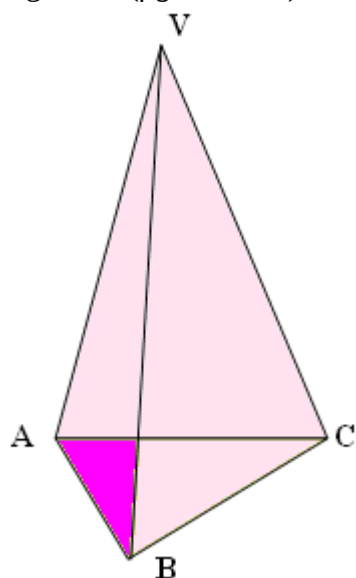


Figura II.16. Piramidă triunghiulară regulată

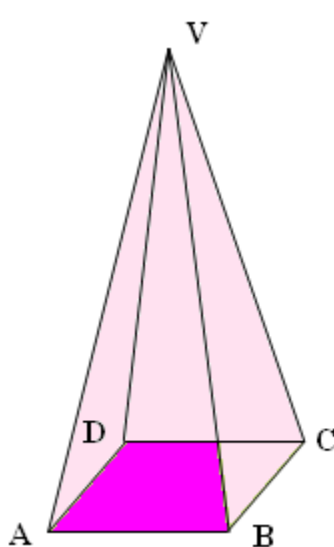


Figura II.17. Piramidă patrulateră regulată

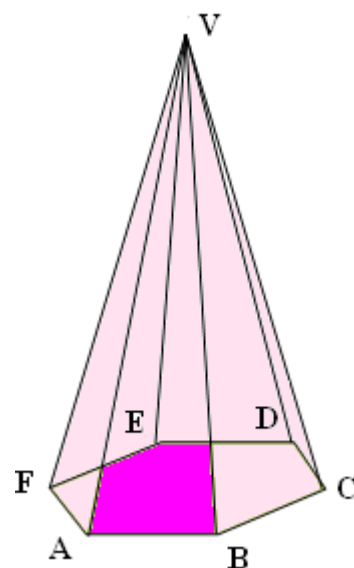


Figura II.18. Piramidă hexagonală regulată

Pentru a confecționa din carton piramide, construim întâi desfășurarea piramidei și o îndoim astfel încât să obținem corpul.

Desfășurarea suprafeței piramidei se poate realiza în moduri diferite. Unele desfășurări sunt mai des întâlnite, uzuale, altele folosite mai rar.

Desfășurarea câtorva piramide

În *figurile II.19÷II.21* vom prezenta tipuri de desfășurări pentru piramida triunghiulară regulată, piramidă patrulateră regulată și piramida hexagonală regulată.

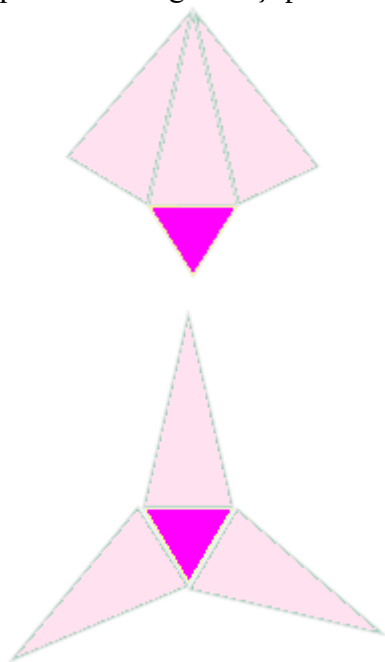


Figura II.19. Tipuri de desfășurări ale piramidei triunghiulare regulate

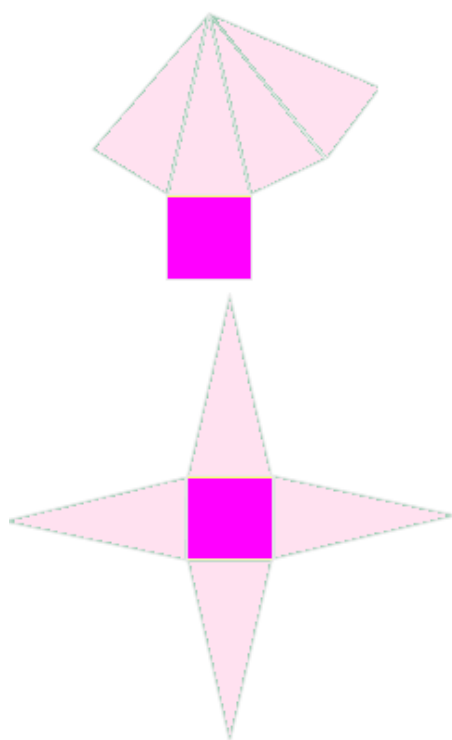


Figura II.20. Tipuri de desfășurări ale piramidei patrulaterare regulate

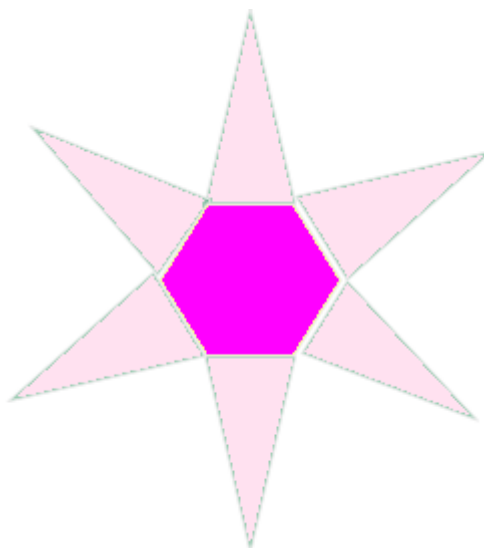
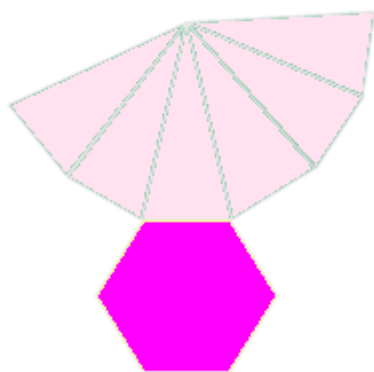


Figura II.21. Tipuri de desfășurări ale piramidei hexagonale regulate

Aria și volumul unei piramide

$A_{\text{laterală}}$ = suma ariilor fețelor laterale ale piramidei

Dacă piramida este regulată, putem calcula aria laterală cu formula: $A_{\text{laterală}} = \frac{P_{\text{bazei}} \cdot a_{\text{piramidei}}}{2}$

unde $a_{\text{piramidei}}$ = înălțimea unei fețe laterale a piramidei regulate

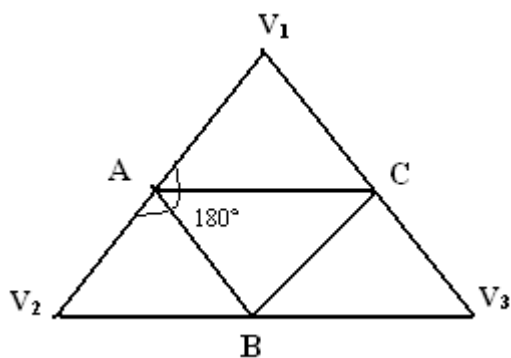
$A_{\text{totală}}$ = suma tuturor ariilor fețelor piramidei, adică $A_{\text{totală}} = A_{\text{laterală}} + 2 \cdot A_{\text{bazei}}$

$$A_{\text{totală}} = \frac{P_{\text{bazei}} \cdot (a_{\text{piramidei}} + a_{\text{bazei}})}{2}$$

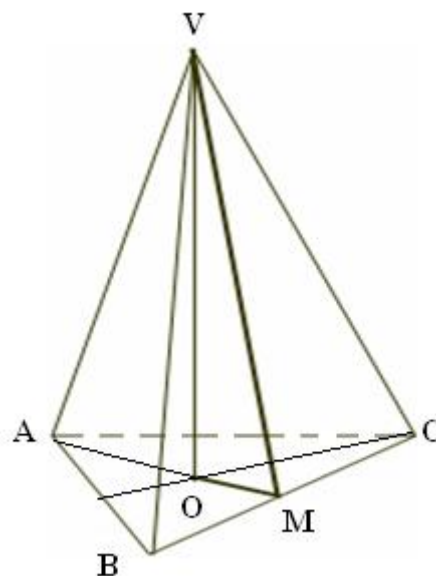
$$V = \frac{A_{\text{bazei}} \cdot h_{\text{piramidei}}}{3}$$

Probleme cu desfășurarea piramidei

1. Desfășurarea unei piramide regulate este un triunghi echilateral cu aria egală cu $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Aflați volumul piramidei.



a) Desen cu desfășurarea



b) Desen cu un tetraedru regulat VABC

Figura II.22. Desenele problemei 1 (II.1-2)

Rezolvare: Dacă desfășurarea unei piramide regulate este un triunghi echilateral, atunci piramida este un tetraedru regulat.

$$A_{\text{totala}} = 4 \cdot A_{\Delta \text{echilateral}} \Rightarrow 72\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4},$$

de unde se obține latura tetraedrului regulat = $6\sqrt{2}$ cm.

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ cm.}$$

Din ΔVOA dreptunghic, aplicând teorema lui Pitagora obținem:

$$VO = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$V_{\text{piramidei}} = \frac{A_{\text{bazei}} \cdot h_{\text{piramidei}}}{3} = \frac{18\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{3} = 72 \text{ cm}^3.$$

2. Aflați aria totală a unui tetraedru regulat a cărui desfășurare a suprafeței totale este un paralelogram cu latura mare egală cu 12 cm.

Rezolvare:

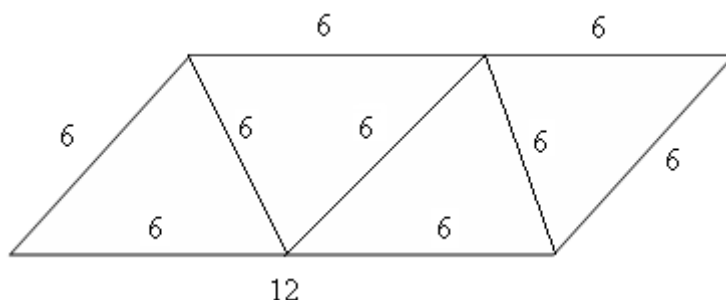
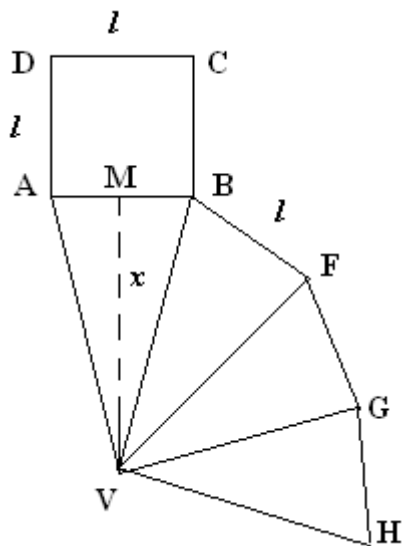


Figura II.23. Desenul cu desfășurarea paralelogram - problema 2 (II.1-2)

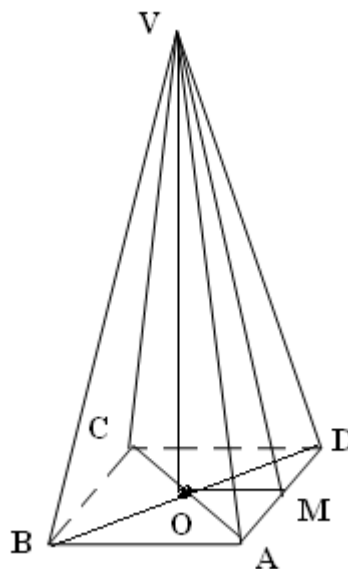
Din faptul că paralelogramul reprezintă desfășurarea unui tetraedru regulat, rezultă că paralelogramul se compune din 4 triunghiuri echilaterale.

Latura triunghiului = $12:2 = 6$ cm. $A_{\text{totala}} = l^2 \sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

3. O piramidă patrulateră regulată VABCD are desfășurarea suprafeței totale ca în **figura II.24.a**. Aria poligonului ADFGHV este de 4 ori mai mare decât aria ABCD. Dacă latura bazei piramidei este "l", aflați în funcție de "l" muchia laterală și înălțimea piramidei.



a) Desen cu desfășurarea



b) Desen cu piramida patrulateră regulată

Figura II.24. Desenele problemei 3 (II.1-2)

Rezolvare:

$A_{ADFGHV} = 4 \cdot A_{VAD} = 4 \cdot A_{ABCD} \Rightarrow A_{VAD} = A_{ABCD}$, deci fețele laterale și baza piramidei sunt echivalente.

$A_{ABCD} = l^2$, $A_{VAD} = \frac{a \cdot VM}{2}$, din egalarea lor obținem $VM = 2l$, deci apotema piramidei $= 2l$.

Din $\triangle VOM$, aplicând teorema lui Pitagora obținem $VO = \sqrt{(2l)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{15}}{2}$, deci

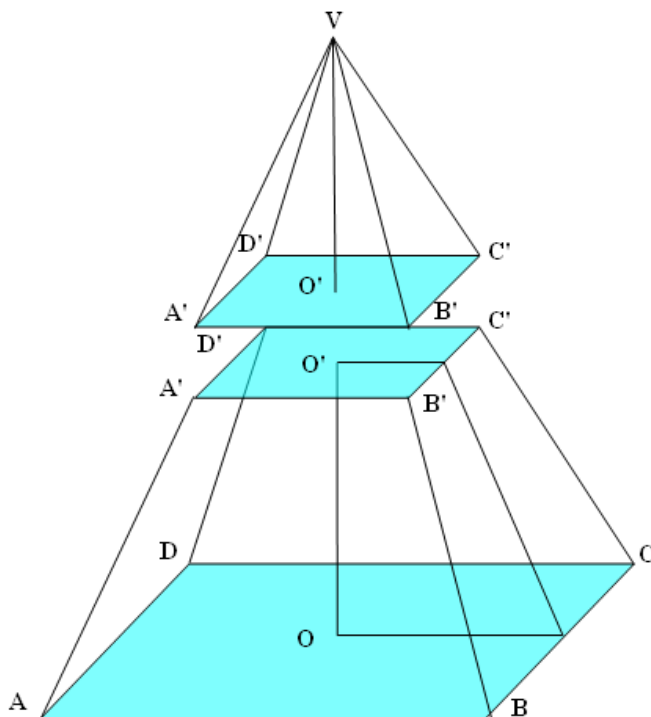
$$h_{\text{piramida}} = \frac{l\sqrt{15}}{2}$$

Din $\triangle VMD$, aplicând teorema lui Pitagora obținem $VM = \sqrt{(2l)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{17}}{2}$, deci

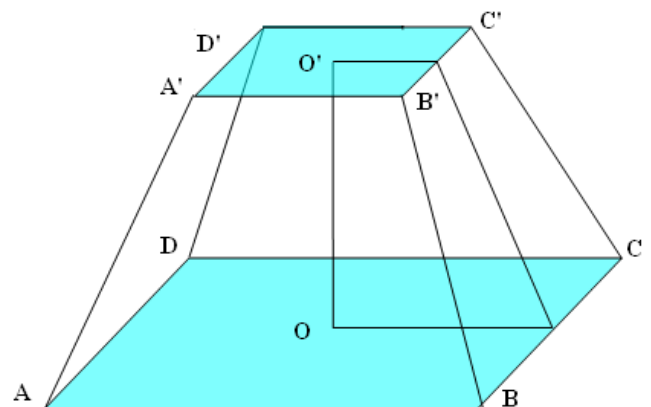
$$m_{\text{laterala}} = \frac{l\sqrt{17}}{2}.$$

3. Trunchiul de piramidă**Noțiuni generale**

Trunchiul de piramidă este corpul obținut dintr-o piramidă prin secționarea acesteia cu un plan paralel cu baza și îndepărtarea piramidei mici obținute prin secționare – *figura II.25*.



a) Secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza



b) Obținerea trunchiului de piramidă în urma îndepărtării piramidei mici

Figura II.25. Desene cu obținerea trunchiului de piramidă

Trunchiul de piramidă se numește după piramida din care provine: exemplu trunchi de piramidă triunghiulară, trunchi de piramidă patrulateră, trunchi de piramidă hexagonală, etc.

Trunchiul de piramidă are două baze: **baza mică și baza mare**.

Înălțimea trunchiului de piramidă este distanța între cele două baze.

Fețele laterale sunt trapeze.

Dacă trunchiul provine dintr-o piramidă regulată, atunci se numește trunchi de piramidă regulată.

În acest caz bazele sunt poligoane regulate asemenea și fețele laterale sunt trapeze isoscele; putem vorbi și de o **apotemă a trunchiului**, care este parte din apotema piramidei din care provine trunchiul, cuprinsă între cele două baze.

În figurile II.26÷II.28 vom prezenta tipuri de trunchiuri de piramide regulate.

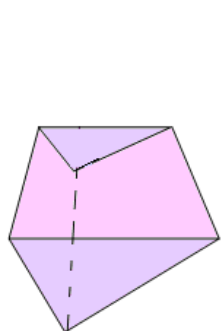


Figura II.26. Trunchi de piramidă triunghiulară

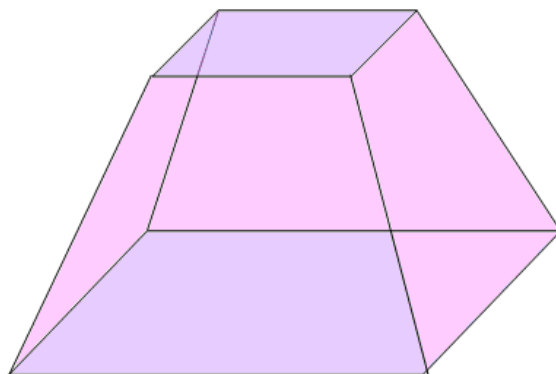


Figura II.27. Trunchi de piramidă patrulateră

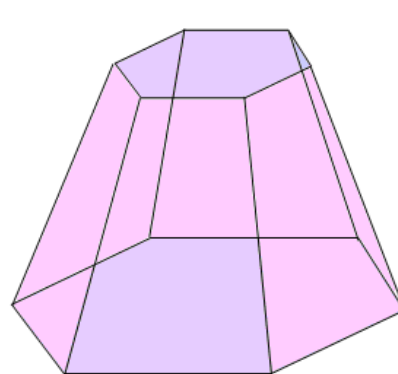


Figura II.28. Trunchi de piramidă hexagonală

Pentru a confecționa din carton trunchiuri de piramidă, construim întâi desfășurarea trunchiului și o îndoim astfel încât să obținem corpul.

Desfășurarea suprafeței trunchiului de piramidă se poate realiza în moduri diferite. Unele desfășurări sunt mai des întâlnite, altele folosite mai rar.

Desfășurarea câtorva trunchiuri de piramidă

În figurile II.29÷II.31 vom prezenta tipuri de desfășurări de trunchiuri de piramide regulate.

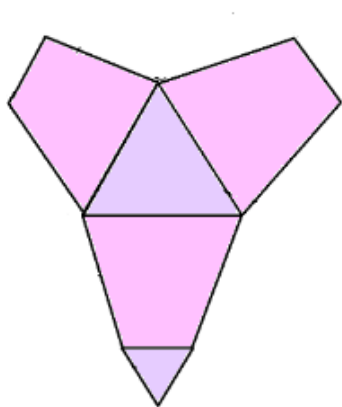


Figura II.29. Mod de desfășurare a trunchiului de piramidă triunghiulară

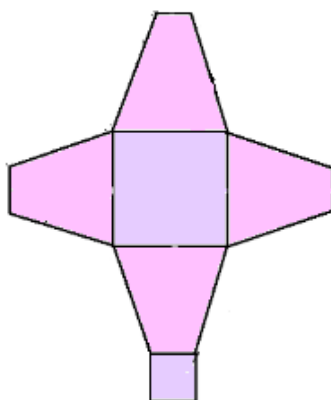


Figura II.30. Mod de desfășurare a trunchiului de piramidă patrulateră

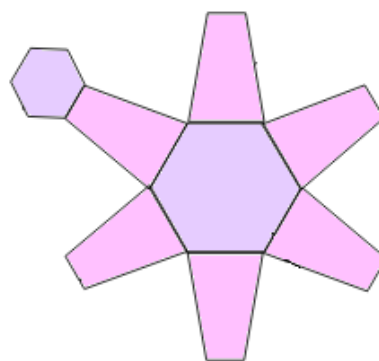
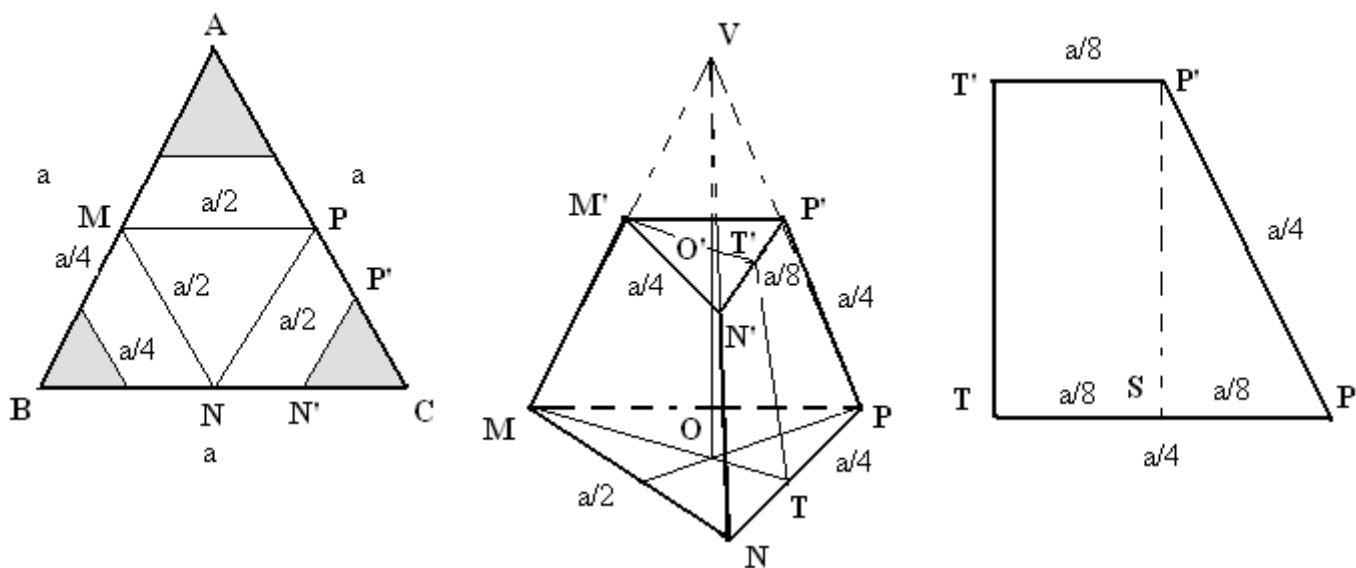


Figura II.31. Mod de desfășurare a trunchiului de piramidă hexagonală

Probleme cu desfășurarea trunchiului de piramidă

1. În figura II.32 triunghiul ABC este echilateral. Laturile lui se împart în câte patru părți egale și se înlătură părțile hașurate. Figura rămasă reprezintă desfășurarea unui trunchi de piramidă. Dacă latura triunghiului inițial este a , aflați muchia laterală și apotema trunchiului de piramidă.



a) Desen cu desfășurarea

b) Desen cu trunchiul de piramidă

c) Desen cu trapez scos în plan

Figura II.32. Desenele problemei 1 (II.1-3)

Rezolvare:

Notăm cu M , N și P mijloacele laturilor triunghiului ABC .

MN , MP și NP sunt linii mijlocii în triunghiul ABC , deci sunt egale cu $\frac{a}{2}$.

$N'P'$ este linie mijlocie în triunghiul VNP , deci $N'P' = \frac{a}{4}$.

$P'P'$ = muchia laterală a trunchiului = $\frac{a}{4}$.

În trapezul dreptunghic $TPP'T'$ ducem înălțimea $P'S$; rezultă $SP = \frac{a}{8}$

Din triunghiul dreptunghic $P'SP$, cu teorema lui Pitagora aflăm $P'S = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{8}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$

Apotema trunchiului = $\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

2. O cutie de bomboane, desfășurată pe o suprafață plană arată ca în figura II.33. Cele patru trapeze isoscele sunt congruente și au baza mare egală cu 12 cm, baza mică egală cu 8 cm și înălțimea egală cu 10 cm. Calculați înălțimea cutiei de bomboane.

Rezolvare:

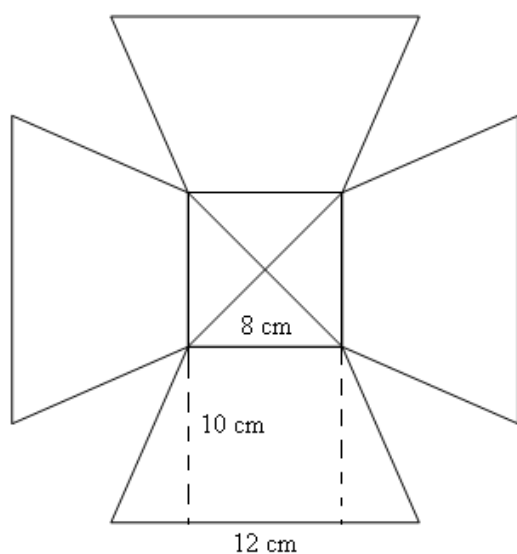
Cutia construită are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată.

În trapezul $OO'M'M$ ducem $M'T$ perpendiculară pe OM .

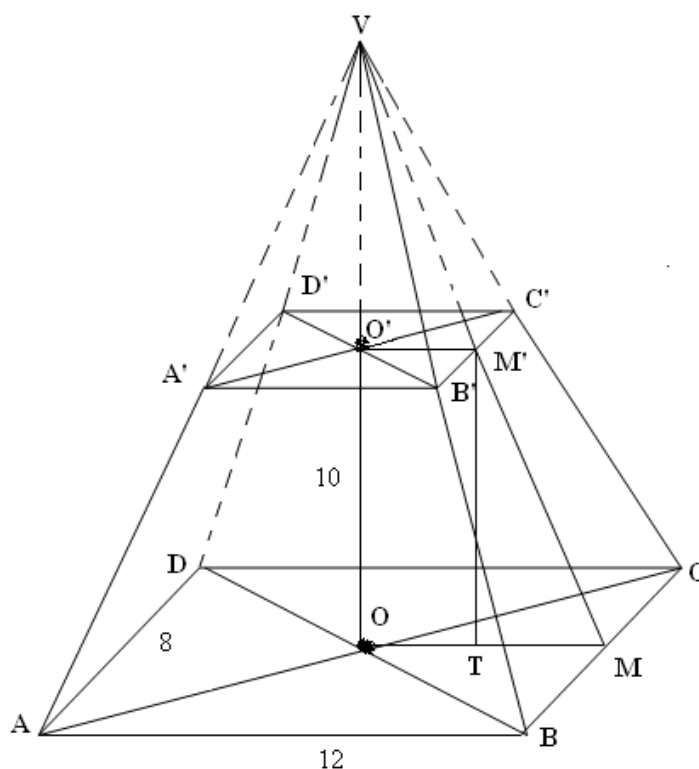
$O'M' = 4$ cm, $OM = 6$ cm, rezultă $TM = 2$ cm; $M'M = 10$ cm.

Din triunghiul dreptunghic $M'TM$, cu teorema lui Pitagora aflăm $M'T = \sqrt{10^2 - 2^2} = 4\sqrt{6}$.

Înălțimea cutiei = $4\sqrt{6}$ cm $\cong 9,8$ cm.



a) Desen cu desfășurarea



b) Desen cu trunchiul de piramidă patrulateră

Figura II.33. Desenele problemei 2 (II.1-3)

3. Pe un carton se desenează două cercuri concentrice în O cu raza $R = 20$ cm și $r = 10$ cm. Se construiesc 12 unghiuri congruente cu centrul în O. Notăm cu $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ punctele de intersecție ale laturilor acestor unghiuri cu cercul mare și cu $B_1, B_2, \dots, B_6$ mijloacele arcelor de cerc determinate de laturile a trei unghiuri la centru consecutive, pe cercul mic, ca în figura II.34. Se decupează cartonul astfel încât prin îndoire să obținem o cutie cu baza $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$.

Stabiliți prin calcul care dintre variante este adevărată:

a) cutia va avea formă de prismă hexagonală regulată;

b) cutia va avea formă de trunchi de piramidă hexagonală regulată cu baza mare

$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$;

c) cutia va avea formă de trunchi de piramidă hexagonală regulată cu baza mare $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Rezolvare:

Pentru a stabili care propoziție este adevărată trebuie să comparăm lungimea laturilor A_1A_2 cu B_1B_2 .

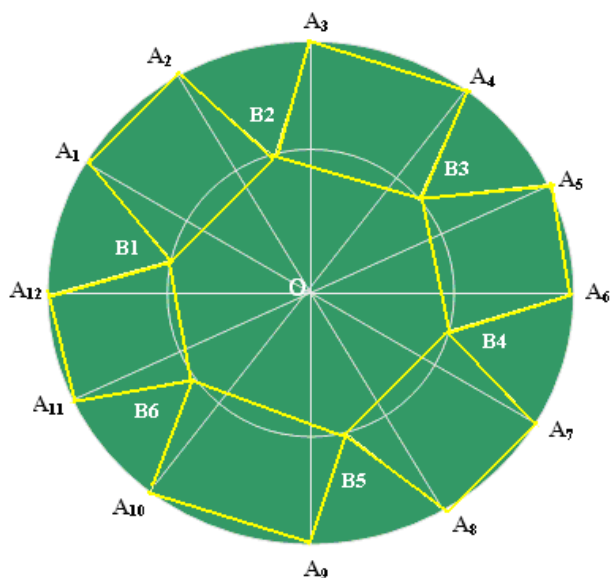
$m(\angle A_1OA_2) = 360^\circ : 12 = 30^\circ$. Ducem $AT \perp OA_2$.

Triunghiul dreptunghic OA_1T cateta care se opune unghiului de 30° este A_1T și este egală cu 10 cm. În triunghiul dreptunghic A_1TA_2 ipotenuza A_1A_2 este mai lungă decât cateta A_1T , deci $A_1A_2 > 10$ cm.

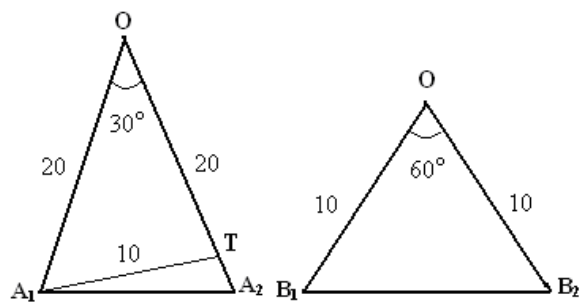
$m(\angle B_1OB_2) = 360^\circ : 6 = 60^\circ$, rezultă că $\triangle B_1OB_2$ este echilateral, deci $B_1B_2 = 10$ cm.

Rezultă că $A_1A_2 > B_1B_2$.

Cutia va avea formă de trunchi de piramidă hexagonală regulată cu baza mare $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, deci este adevărată varianta c).



Desen cu desfășurarea



Două desene mici ajutătoare

Figura II.34. Desenele problemei 3 (II.1-3)

II.2. CORPURI ROTUNDE

1. Cilindrul

Noțiuni generale

Cilindrul este corpul limitat de o suprafață cilindrică și două plane paralele care taie toate generatoarele suprafeței cilindrice.

Suprafața cilindrică este suprafața descrisă de o dreaptă mobilă care alunecă pe o curbă oarecare și rămâne paralelă cu o dreaptă fixă.

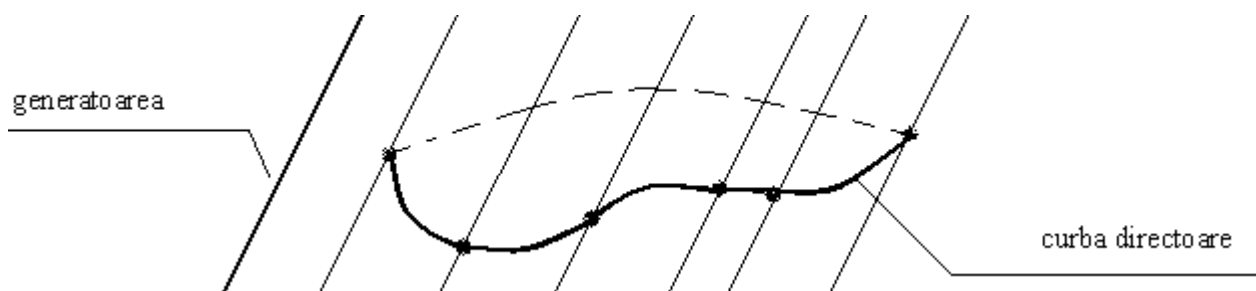


Figura II.35. Desen cu generarea suprafeței cilindrice

Dreapta mobilă se numește **generatoarea suprafeței.**, iar curba se numește **directoarea suprafeței.**

Suprafața cilindrică, prin tăierea cu două plane paralele determină pe cele două plane două curbe congruente, numite **bazele cilindrului.**

Distanța dintre cele două baze ale cilindrului se numește **înălțimea cilindrului.**

Porțiunea din generatoare cuprinsă între cele două baze se va numi simplu **generatoarea cilindrului.**

Suprafața curbă care mărginește cilindrul se numește **suprafața laterală a cilindrului.**

Dacă bazele cilindrului sunt cercuri, atunci cilindrul se numește **cilindru circular.** (1)

Raza fiecăruia dintre cercuri se numește **raza cilindrului.**

Dacă pe lângă condiția (1), generatoarea este perpendiculară pe planul bazei cilindrului, atunci cilindrul se numește **cilindru circular drept** – figura II.36.

Într-un cilindru circular drept lungimea înălțimii este egală cu lungimea generatoarei cilindrului.

În gimnaziu se studiază numai cilindrul circular drept, de aceea va fi numit în continuare simplu cilindru.

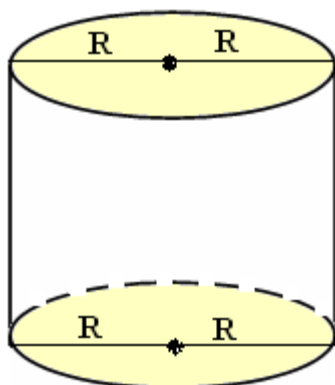


Figura II.36. Desen cu cilindru circular drept

Desfășurarea cilindrului

Pentru a confecționa din carton un cilindru, construim întâi desfășurarea suprafeței laterale a cilindrului, care are forma unui dreptunghi, apoi bazele și rulăm dreptunghiul.

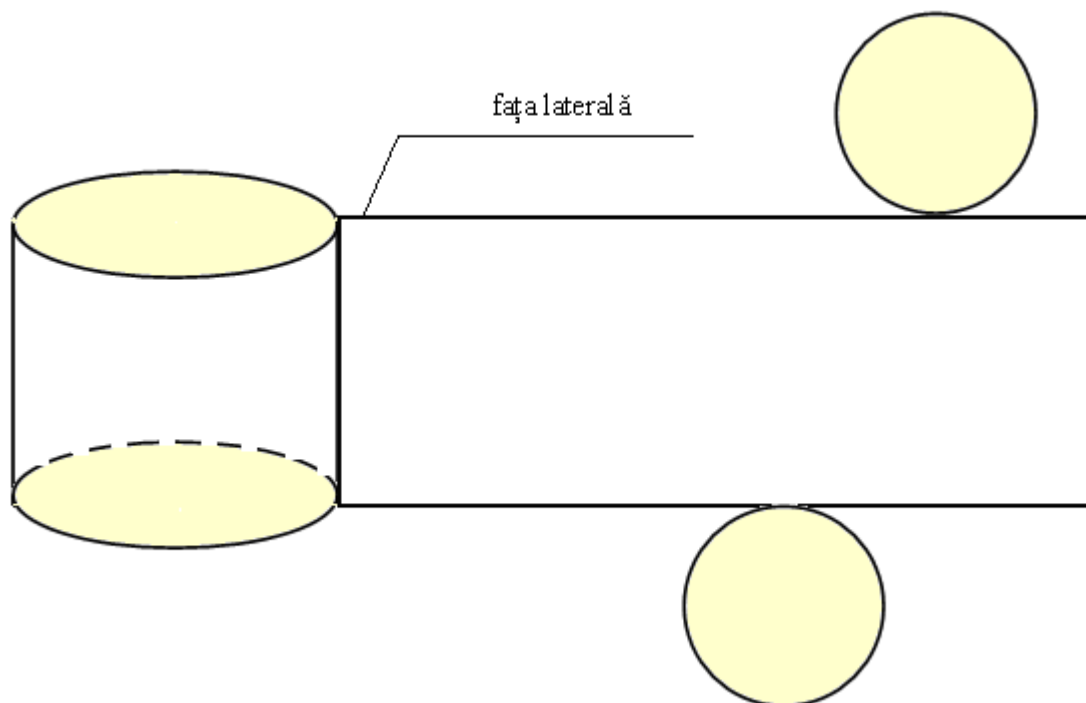


Figura II.37. Desen cu desfășurarea cilindrului

Aria și volumul cilindrului

$$A_{\text{laterală}} = 2\pi R G$$

$$A_{\text{totală}} = A_{\text{laterală}} + 2 \cdot A_{\text{bazei}}$$

$$A_{\text{totală}} = 2\pi R \cdot (G + R)$$

$$V = \pi R^2 \cdot H$$

unde R = raza, G = generatoarea, H = înălțimea cilindrului.

2. Conul

Noțiuni generale

Conul este corpul limitat de o suprafață conică și un plan care taie toate generatoarele suprafeței conice.

Suprafața conică este suprafața descrisă de o semidreaptă cu originea într-un punct fix V și care alunecă pe o curbă oarecare. Punctul fix V se numește **vârf**, semidreptele cu originea în V și care se sprijină pe curbă se numesc **generatoarele suprafeței conice**, iar curba se numește **directoarea suprafeței conice**.

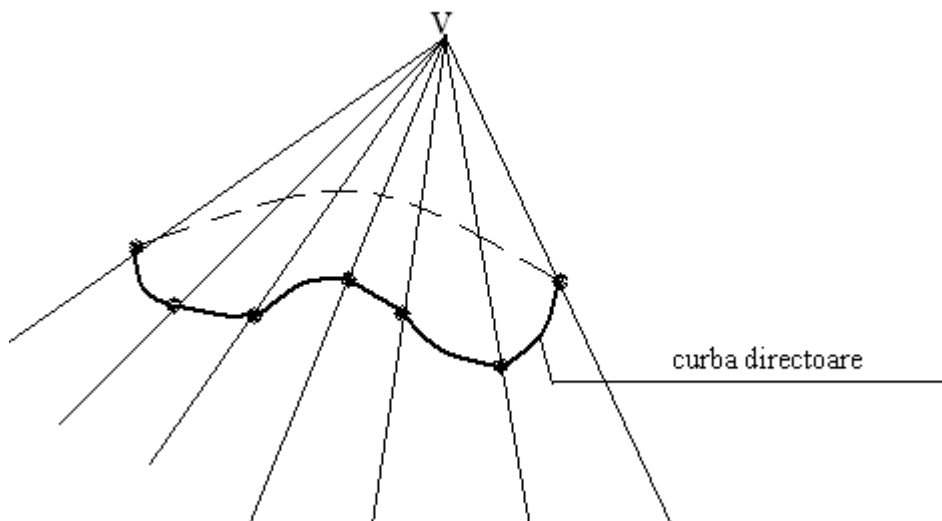


Figura II.38. Desen cu suprafața conică

Suprafața conică, prin secționarea cu un plan care taie toate generatoarele, determină o curbă numită **baza conului**.

Distanța de la vârful conului la baza lui se numește **înălțimea conului**.

Porțiunea din generatoare cuprinsă între vârf și bază se numește simplu **generatoarea conului**.

Suprafața curbă care mărginește conul se numește **suprafața laterală a conului**.

Dacă baza conului este cerc, atunci conul se numește **con circular**. (1)

Raza cercului se numește **raza conului**.

Dacă pe lângă condiția (1), înălțimea conului cade în centrul bazei, atunci conul se numește **con circular drept** – figura II.39.

În gimnaziu se studiază numai conul circular drept, de aceea va fi numit în continuare simplu con.

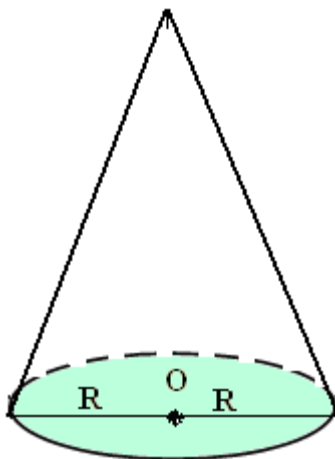


Figura II.39. Desen cu conul circular drept

Desfășurarea conului

Pentru a confecționa din carton un con, construim întâi desfășurarea suprafeței laterale a conului, care are forma unui sector de cerc, apoi baza și rulăm sectorul.

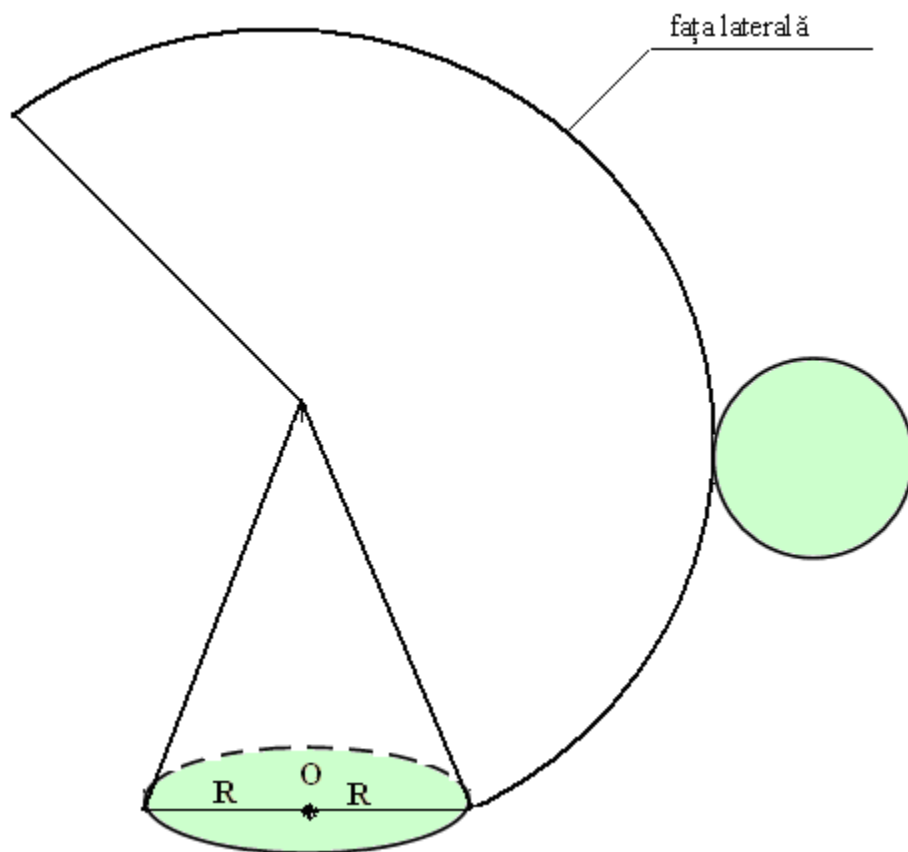


Figura II.40. Desen cu desfășurarea conului

Aria și volumul conului

$$A_{\text{laterală}} = \pi \cdot R \cdot G$$

$$A_{\text{totală}} = A_{\text{laterală}} + A_{\text{bazei}}$$

$$A_{\text{totală}} = \pi \cdot R \cdot (G + R)$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3}$$

unde R = raza, G = generatoarea, H = înălțimea conului.

3. Trunchiul de con

Noțiuni generale

Trunchiul de con este corpul obținut dintr-un con prin secționarea acestuia cu un plan paralel cu baza și îndepărtarea conului mic obținut prin secționare – figura II.41.

Dacă trunchiul de con provine dintr-un con circular drept se va numi **trunchi de con circular drept** - figura II.42, sau simplu, trunchi de con. În acest caz bazele sunt cercuri și se vor numi **baza mare**, respectiv **baza mică a trunchiului de con**. Razele celor două cercuri se numesc **razele trunchiului de con**. **Înălțimea trunchiului de con** este distanța între cele două baze.

Porțiunea din generatoarea conului din care provine trunchiul, cuprinsă între bazele conului, se numește **generatoarea trunchiului de con**.

Suprafața curbă care mărginește trunchiul de con se numește **suprafața laterală a trunchiului de con**.

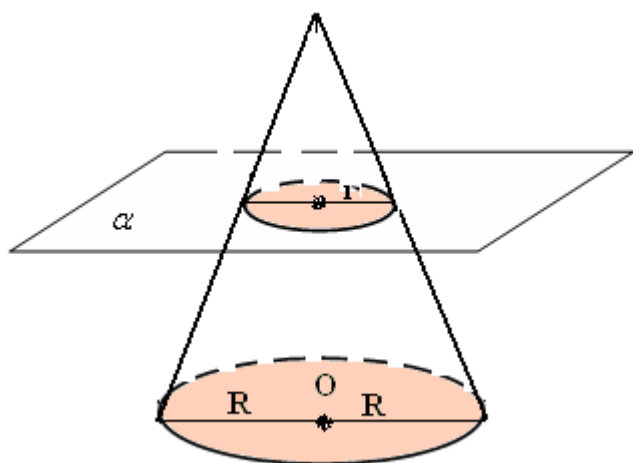


Figura II.41. Desen cu obținerea trunchiului de con

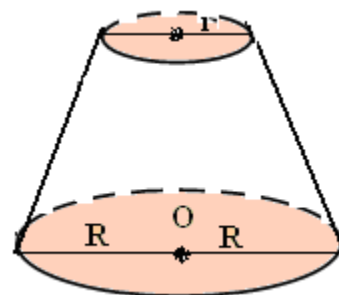


Figura II.42. Desen cu trunchiul de con

Desfășurarea trunchiului de con

Pentru a confecționa din carton trunchi de con, construim întâi o porțiune de coroană circulară, apoi cele două baze și rulăm coroana circulară – figura II.43.

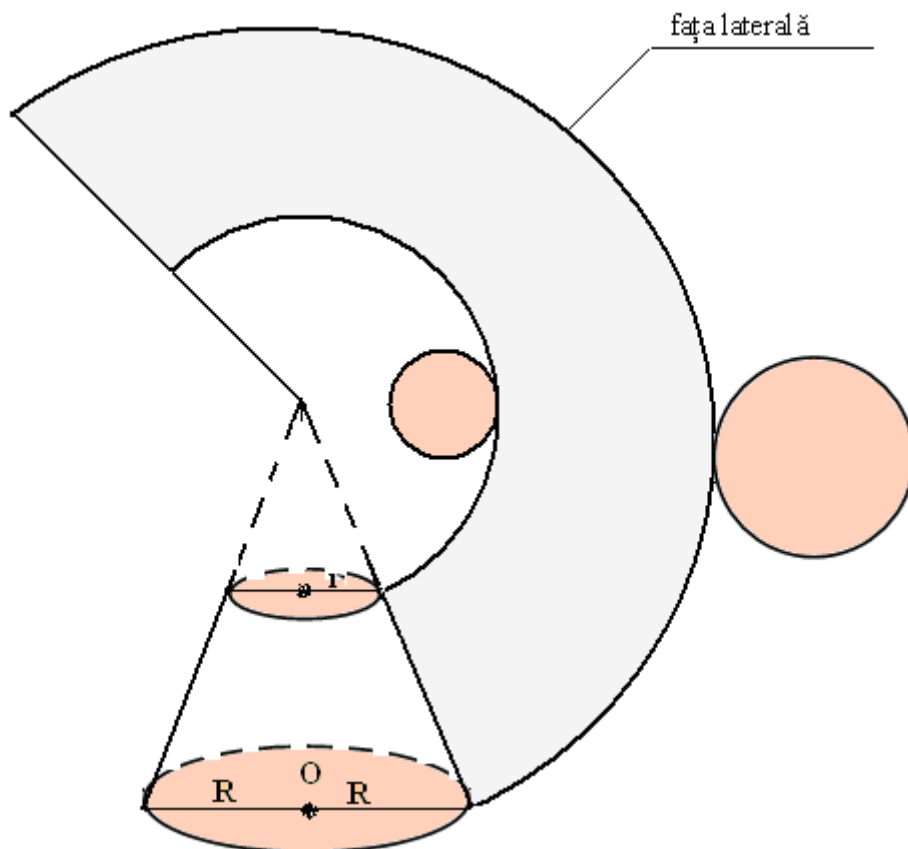


Figura II.43. Desen cu desfășurarea trunchiului de con

Aria și volumul unui trunchiului de con

$$A_{\text{laterală}} = \pi G(R + r)$$

$$A_{\text{totală}} = A_{\text{laterală}} + A_{\text{bazei mari}} + A_{\text{bazei mici}}$$

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

unde G = generatoarea, R = raza bazei mari, r = raza bazei mici, H = înălțimea trunchiului de con.

4. Sfera

Sfera este corpul format din toate punctele egal depărtate de un punct fix.

Punctul fix se numește **centrul sferei** și distanța constantă de la centrul sferei la orice punct de pe sferă se numește **raza sferei**.

Suprafața unei sfere nu poate fi transformată într-o suprafață plană, ca suprafața unui cilindru sau a unui con. Nu putem împacheta o sferă într-o hârtie fără să încrețim hârtia, deci nu putem vorbi despre desfășurarea unei sfere.

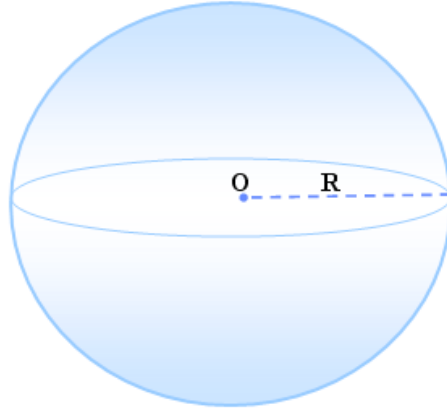


Figura II.44. Desen cu sferă

Așezată pe un plan, sau lângă un cilindru, sau lângă o altă sferă, ea le atinge într-un singur punct, deci frecarea este foarte mică. Sfera se deplasează ușor în toate direcțiile. Datorită acestor proprietăți sfera are numeroase aplicații în tehnică și în sport.

Când secționăm o sferă cu un plan, secțiunea are formă de cerc. Dacă planul trece prin centrul sferei, cercul are raza egală cu raza sferei și se numește **cerc mare al sferei**.

Corpurile cerești mari au aproximativ formă de sferă. De exemplu, Pământul. Pământul se rotește în jurul unei drepte numită **axa de rotație a Pământului**. Punctele în care această axă intersectează suprafața Pământului se numesc **polii Pământului**. Oamenii au trasat imaginar pe suprafața Pământului cercuri. Cercul mare al Pământului, al cărui plan este perpendicular pe axa Pământului se numește **ecuator**. Cercuri de pe suprafața Pământului, paralele cu planul ecuatorului se numesc **latitudini**. Semicercuri mari ale Pământului, al căror plan trece prin axa Pământului se numesc **meridiane sau longitudini**. Orice punct de pe globul pământesc poate fi localizat dacă i se dau cele două coordonate: latitudinea și longitudinea.



Figura II.45. Desen cu glob pământesc

Aria și volumul sferei

$$A_{\text{sferii}} = 4\pi R^2$$

$$V_{\text{sferii}} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Rotația în jurul unei axe

Când o dreaptă se rotește în jurul unei drepte din același plan cu ea, aceasta descrie o **suprafață de rotație**.

Corpurile rotunde se pot obține prin rotirea unor figuri plane în jurul unei drepte, numită **axă de rotație**.

De exemplu:

Când rotim un dreptunghi în jurul unei laturi, el descrie un cilindru.

Când rotim un triunghi dreptunghic în jurul unei catete, el descrie un con.

Când rotim un trapez dreptunghic se rotește în jurul laturii perpendiculare pe bază, el un trunchi de con.

Când rotim un semicerc în jurul diametrului său, el descrie o sferă.

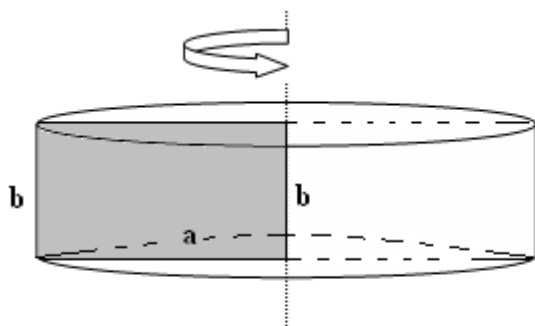
A. Probleme cu rotiri

1. Calculați aria și volumul corpului rezultat prin rotirea unui dreptunghi de dimensiuni a , respectiv b , în jurul laturilor sale.

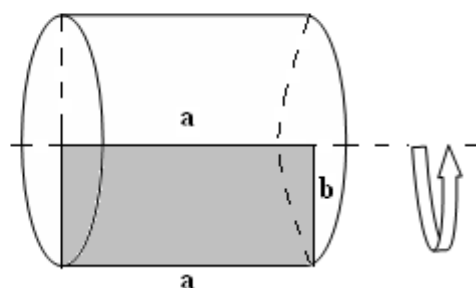
Rezolvare: Când rotim un dreptunghi în jurul unei laturi, el descrie un cilindru.

Fie a = lungimea dreptunghiului și b = lățimea dreptunghiului.

Construim desenele din figura II.46.



Rotire în jurul lui b



Rotire în jurul lui a

Figura II.46. Desenele problemei 1 (II.2-A)

- Rotirea în jurul lui b presupune: $R = a$ și $G = b$

$$A_{\text{bazei}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot a^2$$

$$A_{\text{laterală}} = 2\pi \cdot R \cdot G = 2\pi \cdot ab$$

$$A_{\text{totală}} = 2\pi \cdot R \cdot (G + R) = 2\pi \cdot a \cdot (a + b)$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot G = \pi \cdot a^2 b$$

- Rotirea în jurul lui a presupune: $R = b$ și $G = a$

$$A_{\text{bazei}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot b^2$$

$$A_{\text{laterală}} = 2\pi \cdot R \cdot G = 2\pi \cdot ab$$

$$A_{\text{totală}} = 2\pi \cdot R \cdot (G + R) = 2\pi \cdot b \cdot (a + b)$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot G = \pi \cdot b^2 a$$



2. Calculați aria și volumul corpului rezultat prin rotirea unui triunghi dreptunghic cu catetele b, c și ipotenuza a în jurul laturilor sale.

Rezolvare: Când rotim un triunghi dreptunghic în jurul unei catete, el descrie un con. Construiam desenele din figura II.47.

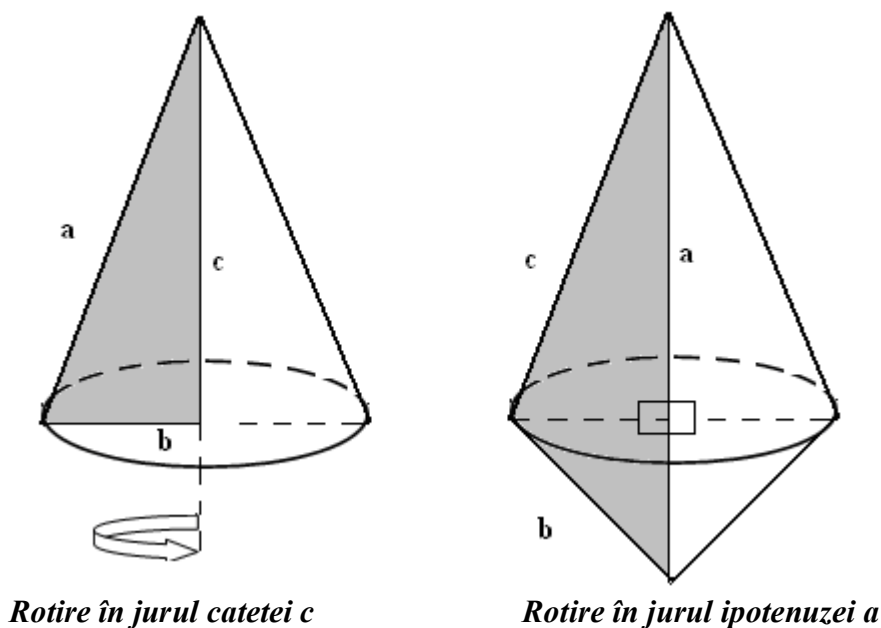


Figura II.47. Desenele problemei 2 (II.2-A)

- Pentru cazul în care $R = b$; $h = c$; $G = a$, avem:

$$A_{\text{bazei}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot b^2$$

$$A_{\text{laterală}} = \pi \cdot RG = \pi \cdot ba$$

$$A_{\text{totală}} = \pi \cdot R \cdot (G + R) = \pi b \cdot (a + b)$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot b^2 c}{3}$$

- Pentru cazul în care $b \leftrightarrow c \Rightarrow R = c$; $h = b$; $G = a$, avem:

$$A_{\text{bazei}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot c^2$$

$$A_{\text{laterală}} = \pi \cdot RG = \pi \cdot ca$$

$$A_{\text{totală}} = \pi \cdot R \cdot (G + R) = \pi \cdot c \cdot (a + c)$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot c^2 b}{3}$$

- Pentru cazul $r = \frac{bc}{a}$ (înălțime în triunghiul dreptunghic)

$$A_{\text{totală}} = A_{\text{laterală Con1}} + A_{\text{laterală Con 2}} = \pi \cdot r \cdot (b + c) = \pi \cdot \frac{bc}{a} \cdot (b + c)$$

$$V = V_{\text{con 1}} + V_{\text{con 2}} = \frac{\pi \cdot c^2 b^2}{3a}$$



3. Calculați aria și volumul corpului rezultat prin rotirea unui semicerc de diametru egal cu 12 cm în jurul său.

Rezolvare: Când rotim un semicerc în jurul diametrului său, el descrie o sferă. Construim desenul din figura II.48.

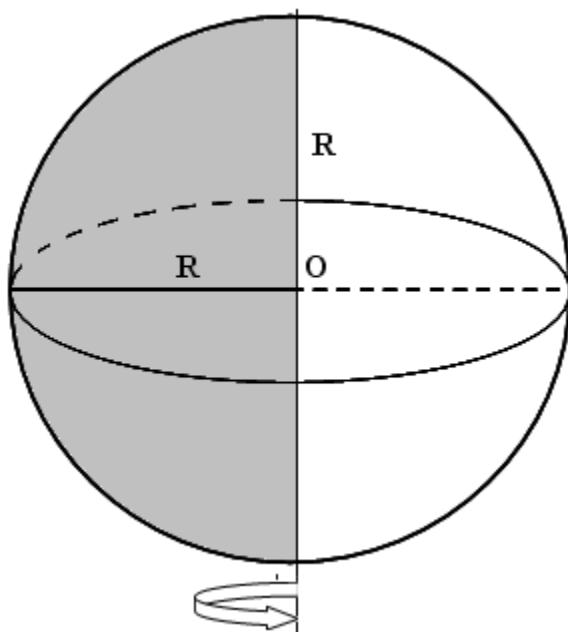


Figura II.48. Desenul problemei 3 (II.2-A)

$$D = 12 \text{ cm} \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

$$A_{\text{sferii}} = 4\pi R^2$$

$$V_{\text{sferii}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi 6^3}{3} = 288\pi \text{ cm}^3$$

4. Să se calculeze aria și volumul corpului rezultat prin rotirea unui trapez isoscel ABCD cu baza mare egală cu $2a$, baza mică egală cu $2b$ și latura oblică egală cu $a + b$, în jurul:

a) medietoarei bazelor;

b) bazei mici;

c) bazei mari.

Rezolvare:

a) Prin rotirea trapezului în jurul medietoarei bazelor se obține un trunchi de con cu $R = a$, $r = b$, $G = a + b$ și $h = 2\sqrt{ab}$. Construim desenele din figurile II.49 ÷ II.51.

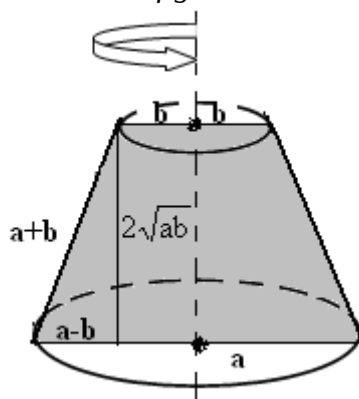


Figura II.49. Desenul problemei 4a) (II.2-A)

$$A_{\text{totală}} = \pi(a+b)(a+b) + \pi a^2 + \pi b^2 = 2\pi(a^2 + b^2 + ab)$$

$$V = \frac{2\sqrt{ab}\pi}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

b) Prin rotirea trapezului în jurul bazei mici se obține un cilindru cu înălțimea $2a$ și două conuri congruente scobite în cilindru, cu înălțimea egală cu $a - b$ și generatoarea egală cu $a + b$.
Toate cele trei corpuri au raza egală cu $2\sqrt{ab}$.

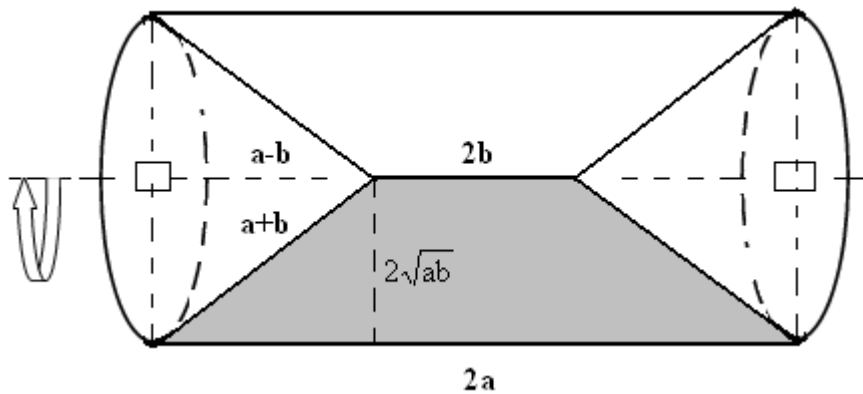


Figura II.50. Desenul problemei 4b) (II.2-A)

$$A_{\text{totala}} = A_{\text{laterală cilindru}} + 2A_{\text{laterală con}}$$

$$A_{\text{totala}} = 2\pi \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2a + 2\pi \cdot 2\sqrt{ab} \cdot (a + b) = 4\pi\sqrt{ab} \cdot (3a + b)$$

$$V = V_{\text{cilindru}} - 2 \cdot V_{\text{con}}$$

$$V = \pi \cdot 4ab \cdot 2a - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 4ab \cdot (a - b)}{3} = \frac{8\pi \cdot ab \cdot (2a + b)}{3}$$

c) Prin rotirea trapezului în jurul bazei mari se obține un cilindru cu înălțimea $2b$ și două conuri congruente în prelungirea cilindrului, cu înălțimea egală cu $a - b$ și generatoarea egală cu $a + b$.
Toate cele trei corpuri au raza egală cu $2\sqrt{ab}$.

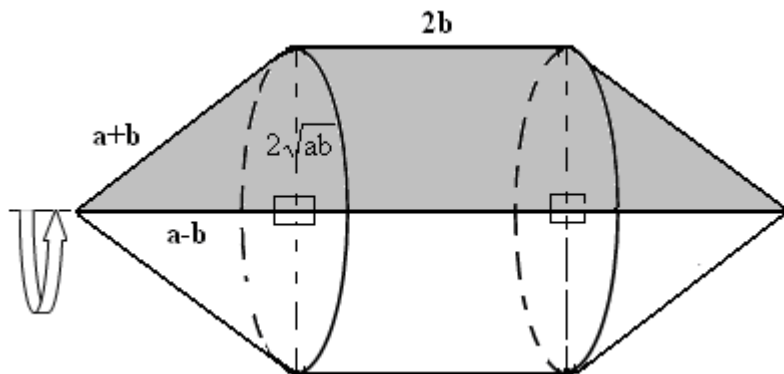


Figura II.51. Desenul problemei 4c) (II.2-A)

$$A_{\text{totala}} = A_{\text{laterală cilindru}} + 2A_{\text{laterală con}}$$

$$A_{\text{totala}} = 2\pi \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2b + 2\pi \cdot 2\sqrt{ab} \cdot (a + b) = 4\pi\sqrt{ab} \cdot (3b + a)$$

$$V = V_{\text{cilindru}} + 2 \cdot V_{\text{con}}$$

$$V = \pi \cdot 4ab \cdot 2b + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 4ab \cdot (a - b)}{3} = \frac{8\pi \cdot ab \cdot (2b + a)}{3}$$



5. Calculați aria și volumul corpului rezultat prin rotirea unui trapez dreptunghic ABCD cu baza mare egală cu 9 cm, baza mică egală cu 3 cm și înălțimea egală cu 8 cm, în jurul unei axe situate la distanța 2 cm de latura perpendiculară pe baze.

Rezolvare: Prin rotirea trapezului se obține un trunchi de con și un cilindru scobit în trunchi. Construiți desenul din figura II.52.

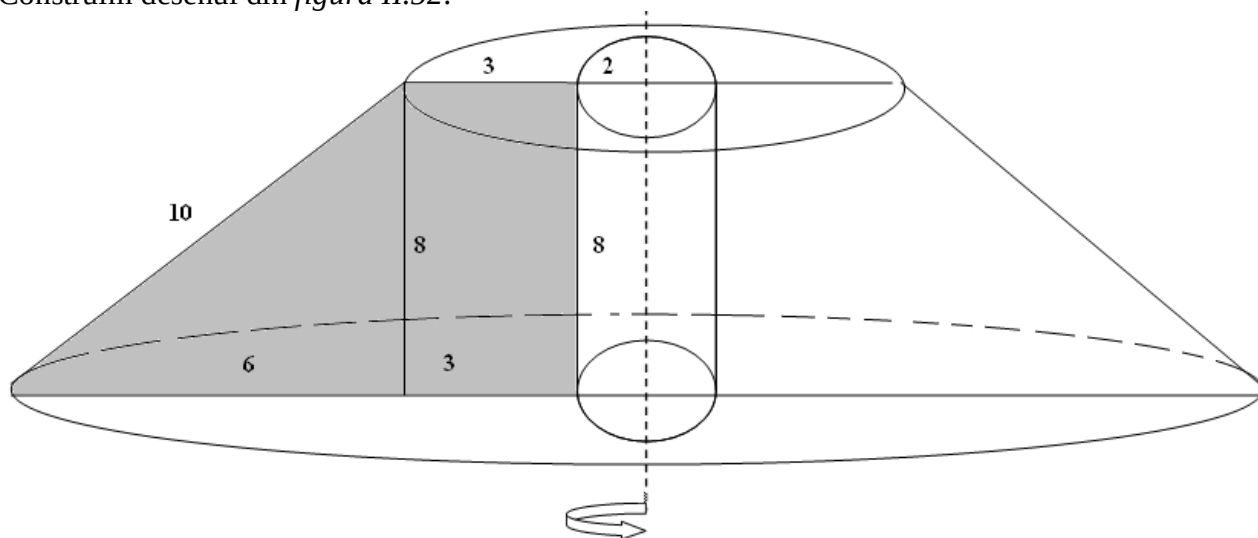


Figura II.52. Desenul problemei 5 (II.2-A)

$$A_{\text{totala}} = A_{\text{totala trunchi con}} - 2 \cdot A_{\text{baza cilindru}} + A_{\text{laterală cilindru}}$$

$$A_{\text{totala}} = \pi \cdot 10 \cdot (5 + 11) + \pi \cdot 11^2 + \pi \cdot 5^2 - 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8$$

$$A_{\text{totala}} = 330\pi$$

$$V = V_{\text{trunchi con}} - V_{\text{cilindru}}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 8}{3} (11^2 + 5^2 + 11 \cdot 5) - \pi \cdot 2^2 \cdot 8$$

$$V = 504\pi$$

6. Calculați aria și volumul corpului obținut prin rotirea unui hexagon regulat de latură a în jurul uneia dintre laturile sale.

Rezolvare: Prin rotirea hexagonului se obține un cilindru și două trunchiuri de con congruente în care sunt scobite două conuri congruente.

Construiți desenul din figura II.53.

$$A_{\text{totala}} = A_{\text{laterală cilindru}} + 2 \cdot A_{\text{laterală trunchi con}} + 2 \cdot A_{\text{lateral con}}$$

$$A_{\text{totala}} = 2 \cdot \pi \cdot a\sqrt{3} \cdot a + 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \left(a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$A_{\text{totala}} = 6\pi a^2 \sqrt{3}$$

$$V = V_{\text{cilindru}} + 2 \cdot V_{\text{trunchi con}} - 2 \cdot V_{\text{con}}$$

$$V = \pi \cdot 3a^2 \cdot a + 2 \cdot \frac{\pi \cdot \frac{a}{2}}{3} \cdot \left(3a^2 + \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{2} \right) - 2 \cdot \frac{\pi \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{a}{2}}{3}$$

$$V = \frac{39\pi a^3}{4}$$



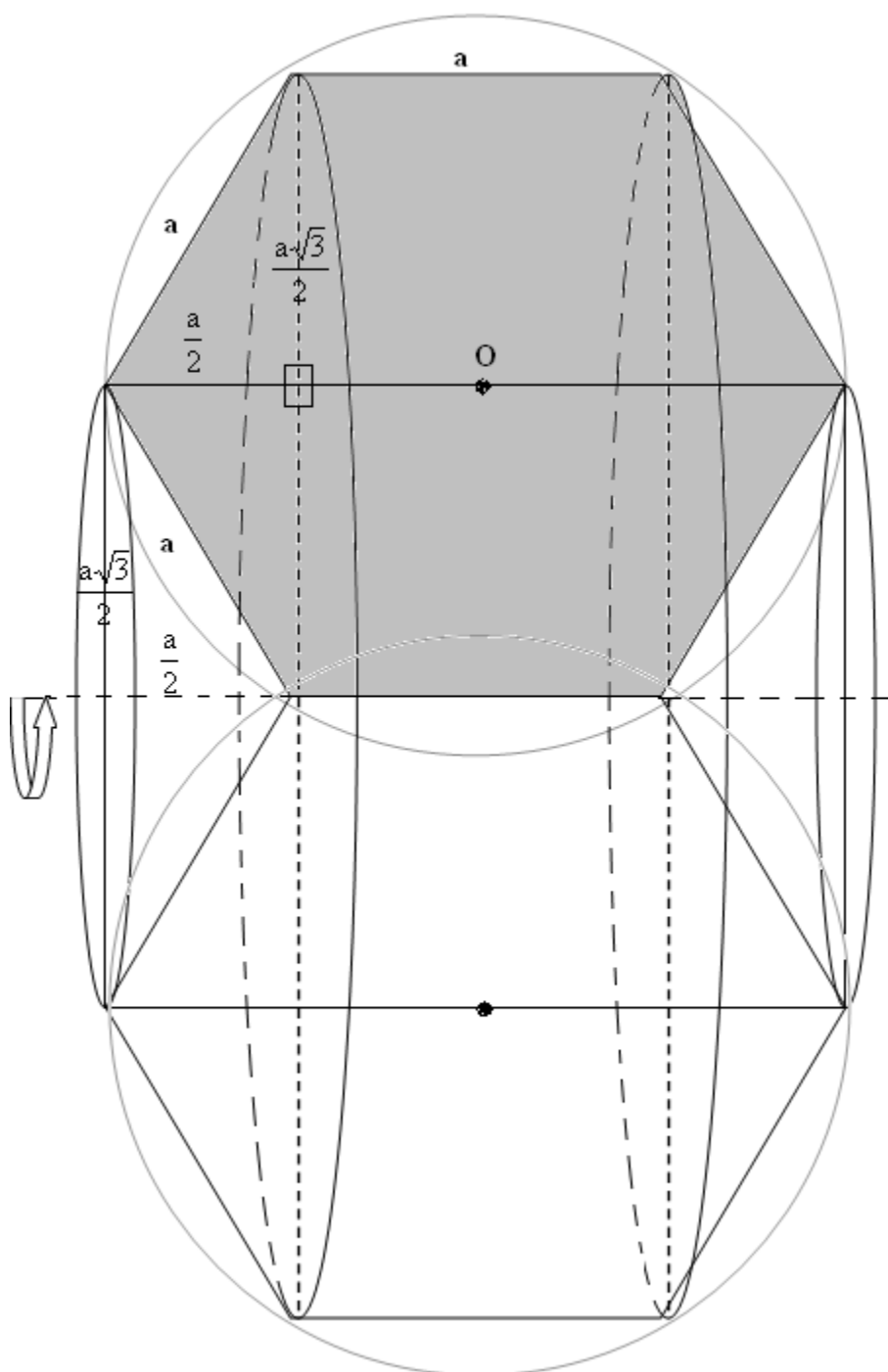


Figura II.53. Desenul problemei 6 (II.2-A)



Corpuri înscrise în sferă

Poliedrele înscrise în sferă sunt poliedrele care au toate vârfurile pe sferă. Fețele acestor poliedre sunt poligoane înscrise în cercuri ale sferei.

Cilindrul înscris în sferă este cilindrul circular drept ale cărui baze sunt cercuri ale sferei.

Conul înscris în sferă este conul care are baza un cerc al sferei și vârful pe sferă.

Trunchiul de con înscris în sferă este trunchiul de con ale cărui baze sunt cercuri ale sferei.

La fel ca în geometria plană, putem spune că sfera este circumscrisă corpului respectiv.

Sfere înscrise în corpuri

Sfera înscrisă în poliedre este sfera tangentă la toate planele fețelor poliedrului.

Sfera înscrisă în cilindru este sfera tangentă la planele bazelor și la generatoarele cilindrului.

Sfera înscrisă în con este sfera tangentă la planul bazei și la generatoarele conului.

Sfera înscrisă în trunchi de con este sfera tangentă la planele bazelor și la generatoarele trunchiului de con.

B. Probleme cu sfere înscrise sau circumscrise

1. Figura II.54 reprezintă un cilindru în care sunt înscrise o sferă și un con. Demonstrați că $V_{\text{cilindru}} = V_{\text{sfera}} + V_{\text{con}}$ (relație descoperită de Arhimede).

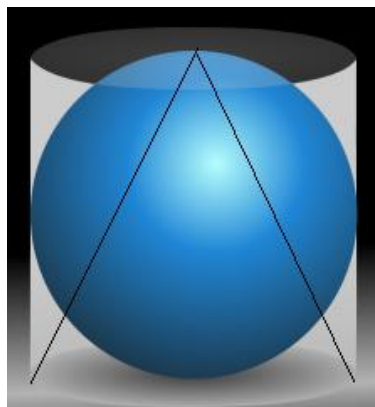


Figura II.54. Desenul problemei 1 (II.2-B)

Rezolvare:

Notăm cu R raza bazei cilindrului $\Rightarrow R_{\text{sfera}} = R_{\text{con}} = R$ și $h_{\text{cilindru}} = h_{\text{con}} = 2R$.

Demonstrăm că $\pi R^2 \cdot 2R = \frac{4\pi R^3}{3} + \frac{\pi R^2 \cdot 2R}{3}$ "A".

2. Calculați aria laterală și volumul unui cilindru circular drept cu înălțimea de 10 cm, înscris într-o sferă cu raza de 13 cm.

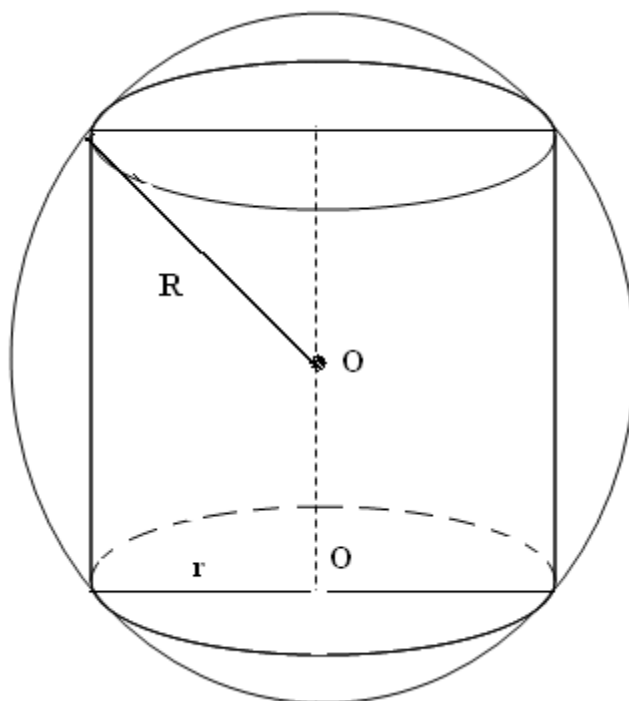


Figura II.55. Desenul problemei 2 (II.2-B)

Rezolvare: Fie r = raza cilindrului

$$\text{Avem: } r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow r = 12$$

$$A_{\text{laterală}} = 2\pi \cdot rh = 120 \cdot \pi, \text{ iar } V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1440\pi$$

3. Calculați lungimea laturii unui cub înscris într-o sferă cu raza R .

Rezolvare: Diagonala cubului = $2R \Rightarrow l\sqrt{3} = 2R$, de unde latura cubului = $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

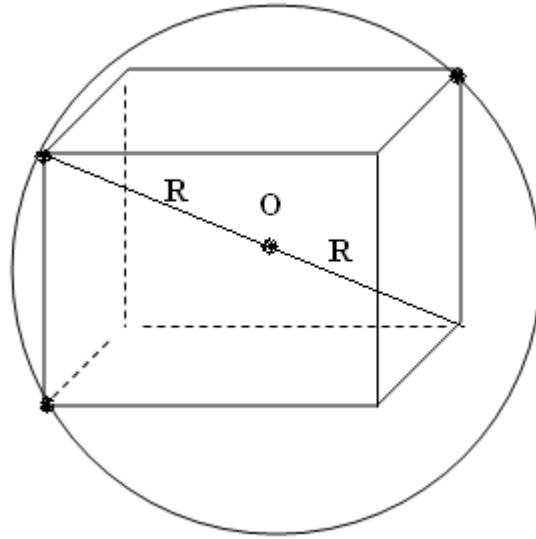


Figura II.56. Desenul problemei 3 (II.2-B)

4. Calculați muchia unui tetraedru regulat înscris într-o sferă cu raza R .

Rezolvare: Notăm cu O centrul sferei și cu Q centrul bazei ABC a tetraedrului regulat.

$$VO = h_{\text{tetraedru regulat}} = \frac{l\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OQ = \frac{l\sqrt{6}}{3} - R; \quad QC = \frac{l\sqrt{3}}{3};$$

În $\triangle OQC$ dreptunghic, din teorema lui Pitagora $\Rightarrow OC^2 = OQ^2 + QC^2$

$$R^2 = \left(\frac{l\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2, \text{ de unde } l = \frac{2\sqrt{6}R}{3}.$$

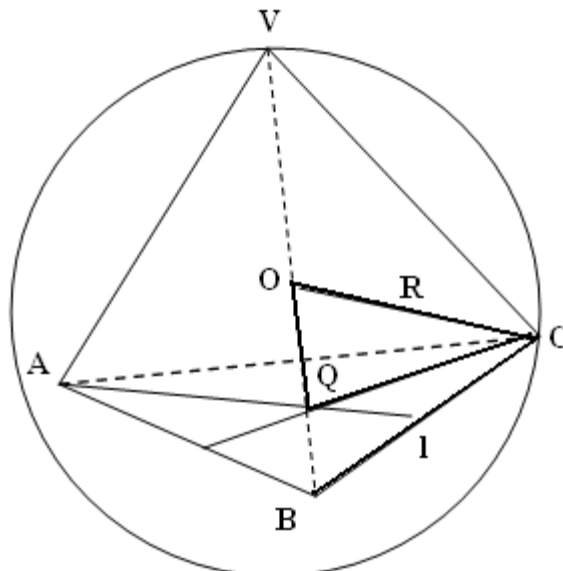


Figura II.57. Desenul problemei 4 (II.2-B)

5. Calculați raza sferei înscrisă într-un con circular drept cu raza bazei egală cu a și înălțimea egală cu h .

Rezolvare:

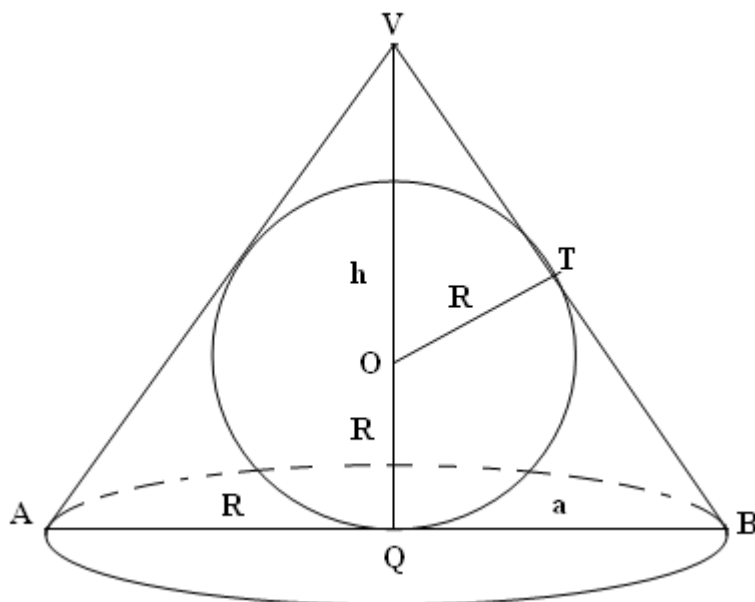


Figura II.58. Desenul problemei 5 (II.2-B)

Notăm cu O centrul sferei și cu Q centrul bazei conului.

$OQ = OT = R =$ raza sferei; $OT \perp VB$.

$$\text{Din } \triangle VQB \text{ asemenea cu } \triangle VTO \Rightarrow \frac{VO}{VB} = \frac{TO}{QB} \Rightarrow \frac{h-R}{\sqrt{h^2+a^2}} = \frac{R}{a} \Rightarrow R = \frac{a(\sqrt{a^2+h^2}-a)}{h}.$$

6. Calculați raza sferei circumscrise conului cu raza bazei egală cu a și înălțimea egală cu h .

Rezolvare:

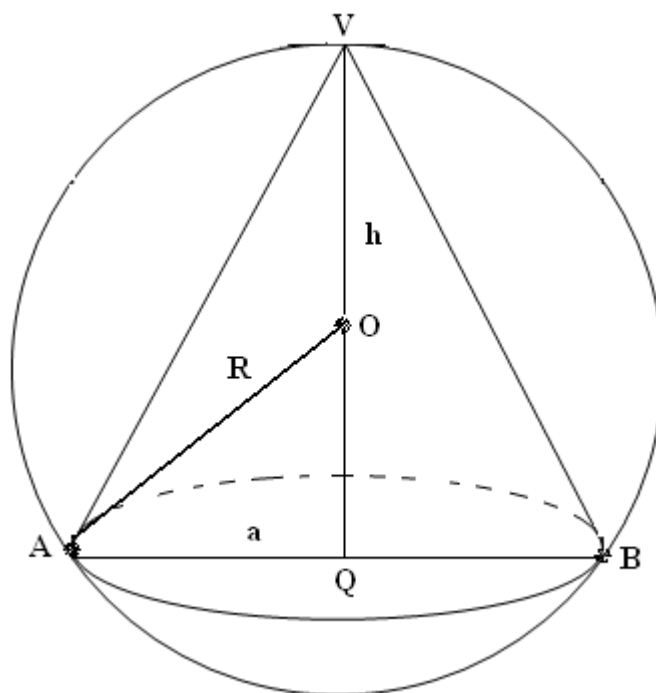


Figura II.59. Desenul problemei 6 (II.2-B)

Notăm cu O centrul sferei și cu Q centrul bazei conului. $OV = OA = R =$ raza sferei

În $\triangle OQA$ dreptunghic, din teorema lui Pitagora $\Rightarrow OA^2 = OQ^2 + QA^2$

$$R^2 = (h-R)^2 + a^2 \Rightarrow R = (h^2 + a^2) / 2h$$