Motto:

„Matematica este ceea ce începe, ca şi Nilul,
în modestie şi se termină în magnific.”

Calvin Colton

Partea I
ARITMETICĂ, ALGEBRĂ

A.I. MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE

A.I.1. OPERAŢII CU NUMERE NATURALE. REGULI DE CALCUL CU PUTERI

Mulţimea numerelor naturale este: $N = \{0,1,2,..., n,...\}$, iar mulţimea numerelor naturale nenule este: $N^* = \{1,2,..., n,...\}$.

Se reamintesc în cadrul acestui paragraf câteva noţiuni întâlnite în clasa a V-a.

Tipuri de operaţii:

- Adunarea şi scăderea sunt considerate operaţii de ordinul I;
- Înmulţirea şi împărţirea sunt considerate operaţii de ordinul II;
- Ridicarea la putere este operaţie de ordinul III.

Reguli:

1. ***În operaţiile în care apar numai operaţii de acelaşi ordin, acestea se efectuează de la stânga la dreapta.***

2. În calcule se folosesc paranteze rotunde, drepte şi acolade. ***Ordinea de efectuare a calculului este: parantezele rotunde, apoi parantezele drepte, apoi acoladele***. După terminarea calculelor din parantezele rotunde acestea se desfiinţează, cele drepte se transformă în rotunde, acoladele în paranteze drepte şi procedeul continuă până la eliminarea tuturor parantezelor.

3. ***Eliminarea parantezelor.*** Parantezele precedate de semnul + se pot elimina scriind termenii din paranteze cu semnul lor. Parantezele precedate de semnul **-** se pot elimina scriind termenii din paranteze cu semn schimbat.

Exemplu: $\{[(7\cdot 3-5)+2\cdot 6]:4+5\}\cdot 10-[(9+7)\cdot 5-60]=\{[(21-5)+12]:4+5\}\cdot 10-(16\cdot 5-60)=$
$=[(16+12):4+5]\cdot 10-(80-60)=(28:4+5)\cdot 10-20=120-20=100$

Reguli de calcul cu puteri:

- Fie a un număr natural, a ≠ 0. ***Puterea zero*** a numărului natural a este: $a^0=1$.
- Fie a un număr natural, a ≠ 0.***Puterea întâia*** a numărului natural a este: $a^1=a$.
- 0^0 nu are sens.
- Oricare ar fi numerele naturale a, m şi n, a ≠ 0, atunci: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.
- Oricare ar fi numerele naturale a, m şi n, a ≠ 0, atunci: $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$.
- Oricare ar fi numărul natural a, dacă $m\geq n$, atunci: $a^m:a^n=a^{m-n}$.
- Oricare ar fi numerele naturale a, b şi n, a ≠ 0, b ≠ 0, atunci: $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$.
- Oricare ar fi numerele naturale a, b şi n, b ≠ 0, n ≠ 0, dacă a se împarte exact la b, atunci: $(a:b)^n=a^n:b^n$.

Exemple:

- $(2^6-2^5)\cdot(2^5-2^4)\cdot(2^4-2^3):(2^4)^3=2^5\cdot(2-1)\cdot 2^4\cdot(2-1)\cdot 2^3\cdot(2-1):2^{12}=$
  $=2^5\cdot 2^4\cdot 2^3:2^{12}=2^{12}:2^{12}=1$.
- x=?, $300-[48+6\cdot 7-(x:3+15)]:3=276$
  $300-276=[48+6\cdot 7-(x:3+15)]:3$
  $24=[48+42-(x:3+15)]:3 \Rightarrow 24=[90-(x:3+15)]:3$
  $24\cdot 3=90-(x:3+15)\Rightarrow x:3+15=90-72\Rightarrow x:3+15\Rightarrow 18=x:3+15$
  $18-15=x:3\Rightarrow 3=x:3\Rightarrow 3\cdot 3=x \Rightarrow x=9$

A.I.2. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR

Divizor, multiplu

Un număr natural ***b este divizor al unui număr natural a***, dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. Se mai spune că ***a este multiplu al lui b*** .
Notăm $\mathbf{b \mid a}$ şi se citeşte ***b divide pe a*** sau ***b este divizor al lui a*** .
b divide pe a, dacă şi numai dacă a se împarte exact la b.
Se foloseşte şi notaţia $\mathbf{a \vdots b}$ care se citeşte ***a este divizibil cu b*** sau ***a se divide cu b*** sau ***a este multiplu a lui b***.

- Se utilizează notaţiile: D_n - mulţimea divizorilor numărului n,
  M_n - mulţimea multiplilor numărului n,

Exemple:

- Mulţimea multiplilor lui 6 cuprinşi între 16 şi 50 sunt: 18, 24, 30, 36, 42, 48.
- Mulţimea divizorilor lui 14 sunt: $D_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$, în care 1 şi 14 sunt *divizori improprii,* iar 2 şi 7 sunt *divizori proprii* ai lui 14.

Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate

- Oricare ar fi numărul natural a, atunci $\mathbf{a \mid a}$;
- Oricare ar fi numărul natural a, atunci $\mathbf{a \mid 0}$ şi $\mathbf{1 \mid a}$;
- Oricare ar fi numerele naturale a şi b, dacă $\mathbf{a \mid b}$ şi $\mathbf{b \mid a}$, atunci $\mathbf{a = b}$;
- Oricare ar fi numerele naturale a şi b, $\mathbf{a \mid a \cdot b}$ şi $\mathbf{b \mid a \cdot b}$;
- Oricare ar fi numerele naturale a, b, c, dacă $\mathbf{a \mid b}$ şi $\mathbf{b \mid c}$, atunci $\mathbf{a \mid c}$;
- Oricare ar fi numerele naturale a, b, c, dacă $\mathbf{a \mid b}$ şi $\mathbf{a \mid c}$, atunci $\mathbf{a \mid (b+c)}$ şi $\mathbf{a \mid (b-c)}$;
- Oricare ar fi numerele naturale a, b, k, dacă $\mathbf{a \mid b}$, atunci $\mathbf{a \mid k \cdot b}$.

Criterii de divizibilitate

- **Criteriul de divizibilitate cu 2:** un număr natural este divizibil cu 2 , dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0 , 2, 4, 6, 8.
- **Criteriul de divizibilitate cu 3:** dacă suma cifrelor unui număr este divizibilă cu 3.
- **Criteriul de divizibilitate cu 4:** dacă ultimele două cifre ale unui număr reprezintă un număr multiplu de 4.
- **Criteriul de divizibilitate cu 5:** un număr natural este divizibil cu 5, dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5.
- **Criteriul de divizibilitate cu 9:** dacă suma cifrelor unui număr este multiplu de 9.
- **Criteriul de divizibilitate cu 10:** un număr natural este divizibil cu 10, dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0.
- **Criteriul de divizibilitate cu 25:** dacă ultimele două cifre ale unui număr reprezintă un număr multiplu de 25.
- **Criteriul de divizibilitate cu 100, 1000, 10000,** ….: un număr natural este divizibil cu 100, 1000, 10000,… dacă şi numai dacă ultimele două, trei, patru… cifre ale numărului sunt 0.

Exemple:

- Numerele naturale de forma $\overline{10x}$ divizibile cu 2 sunt: 100, 102, 104, 106, 108.
- Numerele de forma $\overline{2x4}$ divizibile cu 3 sunt: 204, 234, 264, 294.
- Numerele de forma $\overline{123x}$ divizibile cu 4 sunt: 1232, 1236.

- Numerele naturale de forma $\overline{4xy}$ divizibile cu 5 sunt: 400, 410, 420, 430, 440, 450, 460, 470, 480, 490, 415, 425, 435, 445, 455, 465, 475, 485, 495.
- Numerele naturale de forma $\overline{8xy}$ divizibile cu 10 sunt: 800, 810, 820, 830, 840, 850, 860, 870, 880, 890.
- Numerele de forma $\overline{8ab}$ divizibile cu 25 sunt: $\overline{ab} \in M_{25}$ şi $\overline{8ab} \in \{800; 825; 850; 875\}$.

Numere prime şi numere compuse

Un ***număr prim*** este un număr natural care are exact doi divizori, pe **1** şi **pe el însuşi**.
Exemplu: 7 are ca divizori pe 1 şi pe 7.

Numerele naturale care nu sunt prime se numesc ***numere compuse***, adică acele numere care au cel puţin trei divizori.

Observaţii:

- **„1”** nu este nici număr prim, nici compus.
- **„2”** este singurul număr prim par.

Exemplu: Este numărul a = 149 număr prim?
Rezolvare: Se caută dacă numărul dat este divizibil cu numerele prime de dinaintea lor.
Se observă, conform criteriilor de divizibilitate menţionate anterior că 149 nu este divizibil cu numerele prime: **2**, **3**, **5**. Fac verificarea pentru următoarele numere prime până se obţine câtul (C) mai mic decât împărţitorul (Î):
149 : **7** = 21, r = 2, rezultă că 149 nu este divizibil cu 7.
149 : **11** = 13, r = 6, rezultă că 149 nu este divizibil cu 11.
149 : **13** = 11, r = 6, rezultă că 149 nu este divizibil cu 13.
Am arătat că a = 149 nu este divizibil cu numerele prime: **2**, **3**, **5, 7, 11, 13, deci nu se divide cu nici un număr prim $\leq$ 13,** deci nu se divide nici cu multiplii M_2, M_3, M_5, M_7,M_{11}.
Se observă C > Î pentru împărţirile la 2, 3, 5, 7, 11, iar pentru împărţirea la 13, C < Î, iar restul este diferit de zero. Deci, nu mai există un număr natural mai mare decât 13, pentru care C < Î, iar restul să fie 0.
În acest caz, 149 este număr prim.

Descompunerea numerelor naturale în produs de factori primi

Orice număr natural nenul care nu este prim se poate descompune sub forma unui produs de factori primi, această descompunere fiind unică.
Exemple:

- $2420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$

2420	$2 \cdot 5$
242	2
121	11
11	11
1	

- $580 = 22 \cdot 5 \cdot 29$

580	$2 \cdot 5$
58	2
29	29
1	

Mulţimea divizorilor unui număr natural

Fie $A = a^m \cdot b^n$, $A \in N$; $a, b, m, n \in N$; a, b = numere prime.
Mulţimea divizorilor lui A va fi dată de relaţia: $A = (m+1)\cdot(n+1)$.
În mod similar, se generalizează.
Exemplu: Să se determine numărul divizorilor numărului 48.
Rezolvare: $48 = 2^4 \cdot 3$. Rezultă că mulţimea divizorilor lui 48 va fi dată de: $(4+1)\cdot(1+1) = 10$. Aceştia sunt: $\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$.

Cel mai mare divizor comun

Două numere pot avea divizori comuni.

Cel mai mare divizor comun a două numere a şi b notat c.m.m.d.c. (a,b) = (a, b) este cel mai mare număr care divide numerele date.

C.m.m.d.c al unor numere naturale nenule este produsul tuturor factorilor comuni, luaţi o singură dată, la puterea cea mai mică.
Dacă c.m.m.d.c = 1, atunci numerele se numesc ***prime între ele.***

Exemplu: c.m.m.d.c. (18, 80) = 2, deoarece $18 = 2 \cdot 3^2$, $80 = 2^4 \cdot 5$.

Exemplu: Pentru a determina 2 numere naturale a şi b, care îndeplinesc condiţiile $(a, b) = 7$ şi $a \cdot b = 588$ se procedează astfel:
Notăm: $a = 7x$, $b = 7y$, $x,y \in N^*$ şi c.m.m.d.c (x, y) = 1.
Rezultă că: $a \cdot b = 7x \cdot 7y = 588 \Rightarrow 49xy = 588 \Rightarrow xy = 12 = 1\cdot 12 = 12 \cdot 1 = 2 \cdot 6 = 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

- Pentru $\begin{cases} x = 1 \\ y = 12 \end{cases}$ rezultă: $\begin{cases} a = 7 \\ b = 84 \end{cases}$, convine c.m.m.d.c$(a, b)$ = 7;

sau

- Pentru $\begin{cases} x = 12 \\ y = 1 \end{cases}$ rezultă: $\begin{cases} a = 84 \\ b = 7 \end{cases}$, convine c.m.m.d.c$(a, b)$ = 7;

sau

- Pentru $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$ rezultă $(x, y) = 2$, nu convine;

sau

- Pentru $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ rezultă $(x, y) = 2$, nu convine;

- Pentru $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ rezultă: $\begin{cases} a = 21 \\ b = 28 \end{cases}$, convine c.m.m.d.c$(a, b)$ = 7;

sau

- Pentru $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ rezultă: $\begin{cases} a = 28 \\ b = 21 \end{cases}$, convine c.m.m.d.c$(a, b)$ = 7.

Deci, soluţiile posibile sunt: $(7, 84)$, $(84, 7)$, $(21, 28)$, $(28, 21)$.

Cel mai mic multiplu comun

Cel mai mic multiplu comun a două numere a şi b notat c.m.m.m.c (a,b) = [a, b] este cel mai mic număr natural nenul care se divide cu numerele date.

C.m.m.m.c al numerelor a şi b este produsul tuturor factorilor primi luaţi o singură dată la puterea cea mai mare.

Exemplu: c.m.m.m.c. (18, 80) = [18, 80] = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$, deoarece $18 = 2 \cdot 3^2$, $80 = 2^4 \cdot 5$.

Exemplu: Pentru a afla cel mai mic număr natural care împărţit la numerele 15, 30 şi 45 dă de fiecare dată câtul diferit de 0 şi restul 13, se procedează astfel:
Fie x = numărul căutat.
Rezultă că:

$$\begin{cases} (x-13) \in M_{15} \\ (x-13) \in M_{30} \\ (x-13) \in M_{45} \end{cases} \Rightarrow (x-13) \in M_{[15;30;45]} = \{0, 90, 180, 270, ...\}$$

$$\begin{cases} 15 = 3 \cdot 5 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 45 = 3^2 \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow [15;30;45] = 2 \cdot 5 \cdot 3^2 = 90,$$

deoarece câtul $\neq 0 \Rightarrow x - 13 = 90 \Rightarrow x = 103$

Legătura dintre cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun

Produsul a două numere naturale este egal cu produsul dintre c.m.m.d.c şi c.m.m.m.c.

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$$

Dacă numerele naturale a şi b sunt prime între ele, atunci $[a, b] = a \cdot b$.

Exemplu: Pentru a afla două numere a şi b, ştiind că $(a,\ b) = 231$ şi $[a, b] = 693$ se aplică relaţia $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b] = 231 \cdot 693$.
Rezultă soluţiile: $(231; 693)$, $(693; 231)$.

A.I. 3. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se determine valoarea numărului x, astfel încât $3^1 \cdot 3^2 \cdot ... \cdot 3^8$ să fie pătratul numărului 3^x.

Rezolvare: $3^1 \cdot 3^2 \cdot ... \cdot 3^8 = 3^{1+2+...+8} = 3^{\frac{8 \cdot 9}{2}} = 3^{36} = \left(3^{18}\right)^2$

$\left(3^{18}\right)^2 = \left(3^x\right)^2 \Rightarrow x = 18$

2. Împărţind numărul x la numărul y, se obţine câtul 3 şi restul 7. Calculaţi $2x - 6y + 3$.

Rezolvare: Aplicând teorema împărţirii cu rest, rezultă: $x = 3y + 7$.
Înmulţesc relaţia cu 2 şi rezultă: $2x = 6y + 14 \Rightarrow 2x - 6y - 14 = 0$
Prin urmare, $2x - 6y + 3 - 3 - 14 = 0 \Rightarrow 2x - 6y + 3 = 17$.

3. Un test are 20 de probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 5 puncte şi pentru fiecare problemă rezolvată greşit se scad 2 puncte. La acest test Andreea a obţinut 65 de puncte. Câte probleme a rezolvat corect Andreea?

Rezolvare:

Punctajul maxim pe care-l putea obţine Andreea era de 100 de puncte. I s-au scăzut 35 puncte.
Notez cu N_c – numărul de răspunsuri corecte, N_g – numărul de răspunsuri greşite.
Rezultă: $65\text{puncte} = 5 \cdot Nc - 2 \cdot Ng$

$65 \vdots 5$, deci obligatoriu $(5 \cdot Nc - 2 \cdot Ng) \vdots 5$; obligatoriu $Ng \in \{0,5,10\}$.

Singura valoare posibilă este $Ng = 5$, rezultă: $65\text{puncte} = 5 \cdot Nc - 10 \Rightarrow N_c = 15$.

4. Calculaţi $5x + 7y + 2z$, ştiind că $x + y = 123$ şi $y + z = 257$.

Rezolvare: $5x + 7y + 2z = 5x + 5y + 2y + 2z = 5 \cdot (x + y) + 2 \cdot (y + z) = 5 \cdot 123 + 2 \cdot 257 = 1129$

5. Arătaţi că diferenţa dintre jumătatea lui 4^{57} şi sfertul lui 16^{28} este divizibilă cu 7.

Rezolvare: $$\frac{^{2)}4^{57}}{2} - \frac{16^{28}}{4} = \frac{2 \cdot 2^{114} - 2^{112}}{4} = \frac{2^{115} - 2^{112}}{2^2} = \frac{2^{112} \cdot (2^3 - 1)}{2^2} = 7 \cdot 2^{110} \vdots 7$$

6. Arătaţi că numărul $N = 3^{n+2} \cdot 2^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$, $n \in N$ este divizibil cu 63.

Rezolvare: $N = 3^{n+2} \cdot 2^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2} = 3^n \cdot 3^2 \cdot 2^{2n} \cdot 2^3 + 3^n \cdot 3^3 \cdot 2^{2n} \cdot 2^4$

$N = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot (1 + 6) = 3^n \cdot 2^{2n} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 63 \cdot 8 \cdot 2^{2n} \cdot 3^n \vdots 63$.

7. Arătaţi că numărul $A = \overline{xxxyyy}$ se divide 37.

Rezolvare: $A = 100000x + 10000x + 1000x + 100y + 10y + y = 111000x + 111y = 111 \cdot (1000x + y)$

$A = 37 \cdot 3 \cdot (1000x + y) \vdots 37$.

8. Calculaţi restul împărţirii numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2011 + 4$ la 7.

Rezolvare: Se observă că $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 7 \cdot ... \cdot 2011 + 4$, deci $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 7 \cdot ... \cdot 2011$ îl conţine şi pe 7, deci $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 7 \cdot ... \cdot 2011$: 7 are restul 0.
Prin urmare restul împărţirii lui A la 7 va fi dat de 4:7 , deci r = 4.

9. Calculaţi numărul de zerouri de la sfârşitul numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 20$.

Rezolvare:

$A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (7 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 \cdot 17 \cdot (2 \cdot 9) \cdot 19 \cdot (2^2 \cdot 5)$

$A = 1 \cdot 2^{18} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 19 = (2 \cdot 5)^4 \cdot 2^{14} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

$A = 10^4 \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

Deci A are la sfârşit 4 zerouri.

10. Împărţind numerele 1243, 6532, 1817 la un acelaşi număr obţinem resturile 13, 7, 2. Aflaţi împărţitorul.

Rezolvare:

Fie Î împărţitorul nenul şi a, b, c câturile împărţirilor. Deoarece Î este acelaşi, deci este c.m.m.d.c şi $Î > 13$. Rezultă:

$$\begin{cases} 1243 = Î \cdot a + 13 \\ 6532 = Î \cdot b + 7 \\ 1817 = Î \cdot c + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1230 = Î \cdot a \\ 6525 = Î \cdot b \\ 1815 = Î \cdot c \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} 1230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41 \\ 6525 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 29 \\ 1815 = 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \end{cases} \Rightarrow Î = \text{c.m.m.d.c} = 3 \cdot 5 = 15$$

11. Arătaţi că numărul $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ se divide 37.

Rezolvare:

$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10a+b=111a+111b+111c=$
$=111\cdot(a+b+c)=37\cdot 3\cdot(a+b+c)\vdots 37$

12. Arătaţi că, dacă $5|(2a+3b)$, atunci $5|(7a+8b)$.

Rezolvare: $5|(2a+3b)\Rightarrow 5|(2a+3b+5a+5b)\Rightarrow 5|(7a+8b)$

13. Arătaţi că oricare ar fi $n\in N$, numărul $2^{2n}\cdot 5^{2n+1}+1$ nu este prim.

Rezolvare: $2^{2n}\cdot 5^{2n+1}+1=2^{2n}\cdot 5^{2n}\cdot 5+1=(10)^{2n}\cdot 5+1=\underbrace{1000...000}_{2n\ zerouri}\cdot 5+1=\underbrace{5000...001}_{(2n-1)\ zerouri}$

5 + 0 +…..+ 0 + 1 = 6, prin urmare numărul este divizibil cu 3, deci nu este prim.

14. Aflaţi numărul $n\in N$, astfel încât $n(n+1)+5n$ să fie număr prim.

Rezolvare: $n(n+1)+5n=n(n+1+5)=n(n+6)\Rightarrow n=1\Rightarrow n(n+1)+5n=7$, număr prim.

15. Demonstraţi că: $3^{80}-2^{20}$ se divide cu 5.

Rezolvare: $UC(3^{80}-2^{20})=UC(3^{80})-UC(2^{20})=UC(1-6)=5\Rightarrow 5|(3^{80}-2^{20})$

16. Arătaţi că: $2\cdot(1+2+3+...+2010)+2011$ este pătrat perfect.

Rezolvare: $2\cdot(1+2+3+...+2010)+2011=2\cdot\frac{2011\cdot 2010}{2}+2011=2011\cdot(2010+1)=2011^2$

17. Determinaţi $x\in N$, astfel încât: $\frac{15}{x+2}\in N$.

Rezolvare: $(x+2)|15$, $D_{15}=\{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$, deci $(x+2)\in\{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$

Rezultă că:

$x+2=1\Rightarrow x=-1\notin N$; $x+2=3\Rightarrow x=1\in N$; $x+2=5\Rightarrow x=3\in N$; $x+2=15\Rightarrow x=13\in N$

Deci, $x\in\{1;\ 3;\ 13\}$.

18. Determinaţi numerele prime a, b, c care verifică egalitatea: $a+38b+60c=198$.

Rezolvare: Expresia dată are un rezultat par; indiferent, dacă b şi c sunt pare sau impare, obligatoriu a trebuie să fie par. Singurul număr prim par este $a=2$.

Rezultă: $2+38b+60c=198\Rightarrow 38b+60c=196\ |:2\Rightarrow 19b+30c=98$.

În mod similar, suma rezultată e pară, c poate fi par sau impar, dar obligatoriu b trebuie să fie par şi prim, deci $b=2\Rightarrow 38+30c=98\Leftarrow 30c=60\Rightarrow c=2$. Rezultă: $a=b=c=2$.

19. Demonstraţi că: $(2n+3;5n+7)=1$.

Rezolvare: Presupun că $(2n+3;5n+7)\neq 1\Rightarrow \exists d\in N^*$, $d\neq 1$, astfel încât $d|(2n+3)$ şi $d|(5n+7)$.

Rezultă $d|\ 5\cdot(2n+3)$ şi $d|\ 2\cdot(5n+7)$, rezultă $d|\ (10n+15)$ şi $d|\ (10n+14)$, deci d divide şi diferenţa lor, adică: $d|\ (10n+15-10n-14)\Rightarrow d|1$, absurd, deoarece am presupus că $d\neq 1$.

În concluzie, presupunerea făcută iniţial este falsă.

20. Care este distanţa cea mai mică care se poate măsura simultan cu unităţi de măsură de 18 m şi 24 m?

Rezolvare: $18=3^2\cdot 2$, $24=3\cdot 2^3$, rezultă c.m.m.m.c (18; 24) = $2^3\cdot 3^2=72m$.

B.I. MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE POZITIVE

B.I.1. NOŢIUNEA DE FRACŢIE, TIPURI DE FRACŢII

Fracţia este o pereche de numere naturale a şi b , cu $b \neq 0$, notată $\frac{a}{b}$, în care **a** se numeşte **numărător**, iar **b** se numeşte **numitor**. Fracţia ne arată în câte părţi, fragmente a fost împărţit întregul.

Fracţii echivalente

Prin ***reprezentări echivalente*** înţelegem aceeaşi parte dintr-un întreg. Pentru a stabili, dacă două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt ***echivalente***, se calculează produsele $a \cdot d = b \cdot c$, având următoarele posibilităţi:

- Dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci ***fracţiile sunt echivalente***, adică $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;
- Dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$, atunci ***fracţiile nu sunt echivalente***, adică $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.

Exemple: Se doreşte să se studieze echivalenţa:

- $\frac{2}{3}$ şi $\frac{5}{6}$. Calculăm: $2 \cdot 6 = 12$ şi $3 \cdot 5 = 15$, $12 \neq 15$ $\Rightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{5}{6}$, deci fracţiile nu sunt echivalente,
- $\frac{3}{9}$ şi $\frac{9}{27}$. Calculăm: $3 \cdot 27 = 9 \cdot 9 = 81$, $\Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$, deci fracţiile sunt echivalente.

Fracţii echiunitare, subunitare, supraunitare

O fracţie $\frac{a}{b}$ este ***echiunitară***, dacă $a = b, b \neq 0$. Deci $\frac{a}{b} = 1$.

O fracţie $\frac{a}{b}$ este ***supraunitară***, dacă $a > b, b \neq 0$. Deci $\frac{a}{b} > 1$.

O fracţie $\frac{a}{b}$ este ***subunitară***, dacă $a < b, b \neq 0$. Deci $\frac{a}{b} < 1$.

Exemplu: $\frac{26}{20+x}$ este o fracţie

- subunitară, pentru $26 < 20 + x \Rightarrow x > 4$
- supraunitară, pentru $26 > 20 + x \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x \in \{0,1; 2; 3\}$
- echiunitară, pentru $26 = 20 + x \Rightarrow x = 4$

Amplificarea / simplificarea fracţiilor

A amplifica o fracţie $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu un număr natural $n \neq 0$, înseamnă a înmulţi atât numărătorul, cât şi numitorul cu numărul "n", adică $^{n)}\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$. Se observă că fracţia obţinută este o fracţie echivalentă cu cea iniţială.

Exemplu: $^{5)}\frac{6}{9} = \frac{5 \cdot 6}{5 \cdot 9} = \frac{30}{45}$.

A simplifica o fracţie $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu un număr natural $n \neq 0$, divizor comun al numerelor a şi b, înseamnă a împărţi atât numărătorul, cât şi numitorul cu numărul "n", adică $\frac{a}{b}^{(n} = \frac{a : n}{b : n}$.
Se observă că fracţia obţinută este o fracţie echivalentă cu cea iniţială.

Exemplu: $\frac{28}{48}^{(2} = \frac{14}{24}^{(2} = \frac{7}{12}$ forma finală nu se mai poate simplifica.

Fracţii ireductibile / reductibile

Fracţia care nu se mai poate simplifica se numeşte ***fracţie ireductibilă*** .

O fracţie $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ este ***ireductibilă***, dacă c.m.m.d.c (a,b) =1. Se mai poate spune că fracţiile ireductibile sunt acele fracţii care au numărătorii şi numitorii numere prime între ele.

Pentru a obţine o fracţie ireductibilă, se simplifică fracţia $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu c.m.m.d.c (a,b).

Exemplu: $\frac{8}{12}^{(4} = \frac{2}{3}$ este ireductibilă, deoarece c.m.m.d.c (2, 3) =1.

Exemplu: Să se simplifice fracţia $\frac{18}{144}$**,** astfel încât să obţinem o fracţie ireductibilă.

Rezolvare: $18 = 2 \cdot 3^2$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$, rezultă c.m.m.d.c (18, 144) = $2 \cdot 3^2 = 18$.

Rezultă: $\frac{18}{144}^{(18} = \frac{1}{8}$.

Fracţia care se mai poate simplifica se numeşte ***fracţie reductibilă*** .

Exemplu: $\frac{15}{45}^{(15} = \frac{1}{3}$ forma finală nu se mai poate simplifica.

B.I.2. NOŢIUNEA ŞI FORMA DE SCRIERE A UNUI NUMĂR RAŢIONAL

Un şir de fracţii echivalente reprezintă acelaşi ***număr raţional***.
Numerele raţionale se notează prin fracţiile care le reprezintă.

Exemplu: Numărul raţional $\frac{1}{3}$ poate fi reprezentat prin oricare dintre fracţiile echivalente:

$\frac{2}{6}; \frac{3}{9}; \frac{4}{12}; \frac{n}{3n}, n \in N^*$

Numerele raţionale sunt numere reprezentate fie cu ajutorul fracţiilor ordinare, fie cu ajutorul fracţiilor zecimale finite sau periodice.

Exemple:

- ***fracţii ordinare***: $0; \frac{1}{2}; \frac{20}{8}$, etc.
- ***fracţiile zecimale finite***: 0,5; 0,235; 2,56, etc.
- ***fracţiile zecimale infinite, periodice simple***: $3,(6)$; $27,(34)$; etc
- ***fracţiile zecimale infinite, periodice mixte***: $0,2(4)$; $1,2(3)$; etc.

Reguli:

- Orice număr natural se poate scrie ca fracţie zecimală finită.

Exemplu: 7 = 7,0 = 7,00 = 7,000 = …= 7,000…0.

- Orice fracţie ordinară poate fi transformată în fracţie zecimală prin împărţirea numărătorului la numitor.

Exemplu: $\frac{20}{8} = 2,5$

- Orice fracţie zecimală finită sau periodică poate fi transformată într-o fracţie ordinară.

Exemple:

$$0,05 = \frac{5}{100} = \frac{5}{10^2};$$
$$0,(24) = \frac{24}{99} = \frac{8}{33};$$
$$0,1(5) = \frac{15-1}{90} = \frac{14}{90} = \frac{7}{45};$$
$$5,1(2) = 5\frac{12-1}{90} = \frac{5 \cdot 90 + 11}{90} = \frac{461}{90}$$

Un număr raţional pozitiv poate fi reprezentat sub forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in N$, $b \neq 0$, deci mulţimea numerelor raţionale pozitive este:

$$Q_+ = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in N,\ b \in N,\ b \neq 0 \right\}.$$

Observaţii:

- Orice număr $n \in N$ este un număr raţional pozitiv: $n = \frac{n}{1}$;

Cazuri particulare: $0 = \frac{0}{1}$ = număr raţional nul; 1 = numărul raţional unitate.

- Un număr raţional $\frac{a}{b}$, $a, b \in N,\ b \neq 0$ este natural, dacă şi numai dacă $b | a$.
- Un număr raţional pozitiv şi nenul se mai numeşte ***număr raţional strict pozitiv***. Mulţimea numerelor raţionale strict pozitive este:

$$Q_+^* = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in N^*,\ b \in N^* \right\}$$

- Opusul numărului raţional strict pozitiv este ***numărul raţional strict negativ***. Mulţimea numerelor raţionale strict negative este:

$$Q_-^* = \left\{ -\frac{a}{b} \middle| a \in N^*,\ b \in N^* \right\}$$

- ***Inversul numărului raţional*** $\frac{a}{b}$ este notat cu $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$. Deci, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.
- ***Mulţimea numerelor raţionale*** este: $Q = Q_-^* \cup \{0\} \cup Q_+^*$.

B.I.3. OPERAŢII CU NUMERE RAŢIONALE POZITIVE

Adunarea numerelor raţionale pozitive

Adunarea numerelor raţionale pozitive se face astfel:

- Dacă cele două numere raţionale au acelaşi numitor, se adună numărătorii şi se păstrează numitorul, adică $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n},\ n \neq 0$.

Exemplu: $\frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$

- Dacă numerele raţionale au numitori diferiţi, se aduc la acelaşi numitor comun şi se aplică regula anterioară,

Exemplu: $\frac{9}{3} + \frac{4}{5} = {}^{5)}\frac{9}{3} + {}^{3)}\frac{4}{5} = \frac{45+12}{15} = \frac{57}{15}$

Proprietăţile adunării numerelor raţionale sunt: comutativitate, asociativitate, element neutru (0), opus. Suma a două numere raţionale e un număr raţional.

Scăderea numerelor raţionale pozitive

Scăderea numerelor raţionale negative se face astfel:

- Dacă cele două numere raţionale au acelaşi numitor, se scad numărătorii şi se păstrează numitorul, adică $\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n},\ n \neq 0$.

Exemplu: $\frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$

- Dacă numerele raţionale au numitori diferiţi, se aduc la acelaşi numitor comun şi se aplică regula anterioară,

Exemplu: $\frac{9}{3} - \frac{4}{5} = {}^{5)}\frac{9}{3} - {}^{3)}\frac{4}{5} = \frac{45-12}{15} = \frac{33}{15}$

Scoaterea întregilor din fracţie

Regulă: Pentru a scoate întregii dintr-un număr raţional $\frac{a}{b}$, împărţim numărătorul la numitor; câtul **C** reprezintă întregii, iar restul **r** reprezintă numărătorul părţii fracţionare.

$$\frac{a}{b}, a > b,\ b \neq 0,\ \ a : b = C,\ \text{rest} = r \Rightarrow \frac{a}{b} = C\frac{r}{b} = \text{partea fracţionară.}$$

Deci, se aplică teorema împărţirii cu rest, astfel:

$$\frac{a}{b} = \frac{b \cdot C + r}{b} = C + \frac{r}{b} = C\frac{r}{b}$$

Această regulă se aplică la fracţiile supraunitare.

Exemplu: $\frac{492}{14} = 35\frac{2}{14}$**,** deoarece 495:14=35, rest =2.

Introducerea întregilor în fracţie

Regulă: $a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c},\ c \neq 0$

Exemplu: $5\frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{37}{7}$

Ordonarea numerelor raţionale pozitive

Fie două numere raţionale pozitive $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, cu $a, b, c, d \in N,\ b \neq 0,\ d \neq 0$ şi ***relaţia de ordine*** $"<"$. Avem: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d < b \cdot c$.

Proprietăţi:

- Oricare ar fi $a, b, k \in N^*$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{k}{b}$, dacă şi numai dacă $a < k$;
- Oricare ar fi $a, b, k \in N^*$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{a}{k}$, dacă şi numai dacă $b > k$.

Relaţia de ordine $"<"$ ne permite să ordonăm două numere raţionale. Dacă numitorii sunt aceeaşi se procedează ca şi în cazul anterior, dacă numitorii sunt diferiţi trebuie prima dată să aducem numerele la acelaşi numitor comun, apoi comparăm numărătorii, iar fracţia mai mică va fi cea care va avea numărătorul mai mic.

Exemplu: Vrem să comparăm numerele: $\frac{7}{5}$ şi $\frac{3}{10}$.

c.m.m.m.c (5; 10) = 10

$^{2)}\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$ şi $\frac{3}{10}$.

Rezultă: $\frac{3}{10} < \frac{14}{10}$.

Putem utiliza ca relaţie de ordonare şi $">"$.

Exemplu: $\frac{14}{10} > \frac{3}{10}$

Înmulţirea numerelor raţionale pozitive

Operaţia prin care se obţine produsul a două numere raţionale se numeşte ***înmulţire***, iar numerele se numesc ***factorii produsului***.

Înmulţirea numerelor raţionale pozitive are următoarele proprietăţi: comutativitatea, asociativitatea, elementul neutru, elementul invers $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$, distributivitatea faţă de adunare, elementul neutru (1), iar produsul a două numere raţionale este tot un număr raţional.

Înmulţirea a două numerelor raţionale se face prin înmulţirea numărătorilor între ei, respectiv a numitorilor între ei.

Exemplu: $\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 5} = \frac{8}{45}$

Ridicarea la putere cu exponent număr natural.

Dacă $a, n \in N$, $b \in N^*$, atunci: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Reguli de calcul cu puteri

Oricare ar fi numerele naturale **m** şi **n**, iar **a** şi **b** două numere raţionale pozitive, atunci:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

$a^m : a^n = a^{m-n}$, dacă $m \geq n$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a : b)^n = a^n : b^n$

$a^0 = 1,\ a \neq 0,\ \ a^1 = a$

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, \quad n \in N^*$

0^0 - nu are sens.

Exemple:

- $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+2+1+0} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$;
- $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{1}{5^6}$.

Împărţirea numerelor raţionale pozitive

Dacă a şi b sunt două numere raţionale şi $b \neq 0$, câtul lor se notează a:b sau $\frac{a}{b}$; numerele a şi b se numesc ***factorii câtului***. Deci, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. ***Operaţia de împărţire*** este operaţia prin care se obţine câtul a două numere raţionale. Câtul a două numere raţionale este tot un număr raţional.

Exemplu: $\frac{2}{7} : \frac{4}{3} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{28}^{(2} = \frac{3}{14}$.

Ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale pozitive este aceeaşi ca şi la numerele naturale, regulile fiind amintite la paragraful A.I.1.

Exemplu: $2\frac{4}{5}\cdot\left(2\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{63}-\frac{14}{15}:1\frac{3}{25}\right)=\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{27}{10}\cdot\frac{20}{63}-\frac{14}{15}:\frac{28}{25}\right)=\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{27}{10}\cdot\frac{20}{63}-\frac{14}{15}\cdot\frac{25}{28}\right)=$

$$=\frac{14}{5}\cdot\left({}^{6)}\frac{6}{7}-{}^{7)}\frac{5}{6}\right)=\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{42}=\frac{14}{5\cdot3\cdot14}\overset{(14}{=}\frac{1}{15}$$

Media aritmetică şi media aritmetică ponderată a numerelor raţionale pozitive

Fie a şi b două numere raţionale pozitive. ***Media aritmetică*** este numărul care se obţine împărţind la 2 suma lor:

$$m_a=\frac{a+b}{2}$$

Exemplu: Media aritmetică a numerelor: $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ este $m_a=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{5}{6}:2=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

Media aritmetică a **n** numere raţionale pozitive se obţine împărţind suma acestor numere la **n**.

Fie $a_1, a_2, ..., a_n$, n numere raţionale. Media lor aritmetică este numărul care se obţine împărţind la n suma lor, adică:

$$m_a=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

Exemplu: Media aritmetică a trei numere este $\frac{5}{3}$. Calculaţi suma numerelor.

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{5}{3}\Rightarrow a+b+c=5$$

Reguli:

- Media aritmetică a două numere raţionale pozitive este mai mică decât cel mai mare dintre ele şi mai mare decât cel mai mic dintre ele, dacă cele două numere sunt diferite şi este egală cu fiecare dintre ele, dacă cele două numere sunt egale.
- Media aritmetică a mai multor numere raţionale este mai mică decât cel mai mare dintre ele şi mai mare decât cel mai mic dintre ele, dacă cel puţin două dintre ele sunt diferite.
  Dacă numerele se repetă, atunci formula mediei aritmetice devine,

$$m_p=\frac{a_1\cdot p_1+a_2\cdot p_2+...+a_n\cdot p_n}{p_1+p_2+...+p_n}$$

numită ***media aritmetică ponderată***,

unde: $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere raţionale pozitive,

$p_1, p_2, ..., p_n$ sunt ponderile numerelor, adică de câte ori se repetă numerele.

Exemplu: Media aritmetică ponderată a numerelor $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ cu ponderile 4 şi 6 este:

$$m_p=\frac{\frac{1}{2}\cdot4+\frac{1}{3}\cdot6}{4+6}=\frac{4}{10}=0,4$$

Exemplu: Un elev cumpără 4 caiete cu 1 leu bucata şi 10 caiete cu 1,5 lei. Cât a costat în medie un caiet?

$$m_p=\frac{4\cdot1+10\cdot1,5}{1+1,5}=\frac{19}{2,5}=7,6$$

B.I.4. ECUAŢII ÎN MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE POZITIVE

Forma generală a unei ecuaţii în Q este: $a \cdot x + b = c,\ a, b, c \in Q,\ a \neq 0$, în care x este necunoscuta.

Paşii de rezolvare a ecuaţiei:

- Se separă termenul care conţine necunoscuta, adică: $a \cdot x = c - b$,
- Calculăm diferenţa $c - b = d$;
- Se rescrie ecuaţia: $a \cdot x = d$,
- Se pune în evidenţă factorul x, adică: $x = \frac{d}{a}$ care este soluţia căutată.

Exemplu: $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} \cdot x = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6} \cdot x \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{5}{6} \cdot x \Rightarrow x = \frac{2}{4} : \frac{5}{6} = \frac{2}{4} \cdot \frac{6}{5} = {}^{(4}\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

B.I.5. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Efectuaţi: $22 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)$.

Rezolvare: $22 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = 22 \cdot \frac{12+4+3}{24} = 22 \cdot \frac{19}{24} = \frac{11 \cdot 19}{12} = \frac{209}{12}$.

2. Calculaţi: $1 + 2 + 3 + ... + 100$.

Rezolvare: Se cunoaşte că: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, iar în cazul nostru $n = 100$, deci

$1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

3. Simplificaţi fracţiile:

a) $\frac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy}}$;

b) $\frac{2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+2} \cdot 3^n}{3^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+2} \cdot 5^2}$.

Rezolvare:

a) $\frac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy}} = \frac{111 \cdot a + 111 \cdot b + 111 \cdot c}{111 \cdot x + 111 \cdot y + 111 \cdot z} = \frac{111 \cdot (a+b+c)}{111 \cdot (x+y+z)} = \frac{a+b+c}{x+y+z}$

b)

$$\frac{2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+2} \cdot 3^n}{3^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+2} \cdot 5^n} = \frac{2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 2^2 \cdot 3^n}{3^n \cdot 5^n \cdot 5 + 3^n \cdot 3^2 \cdot 5^n} = \frac{2^n \cdot 3^n \cdot (3+4)}{3^n \cdot 5^n \cdot (5+9)} = \frac{2^n \cdot 3^n \cdot 7}{3^n \cdot 5^n \cdot 14} = \frac{2^n \cdot 3^n}{3^n \cdot 5^n \cdot 2} = \frac{2^{n-1}}{5^n}$$

.

4. Arătaţi că fracţia $\frac{x^2 + x}{2x + 4}$ este reductibilă oricare ar fi $x \in N^*$.

Rezolvare: $\frac{x^2 + x}{2x + 4} = \frac{x \cdot (x+1)}{2 \cdot (x+2)}$.

Se observă că: $x \cdot (x+1)$ este un produs de 2 numere consecutive, prin urmare $x \cdot (x+1) \vdots 2$, iar $2 \cdot (x+2) \vdots 2$, rezultă că

$\frac{x^2+x}{2x+4}=\frac{x\cdot(x+1)^{(2}}{2\cdot(x+2)}$ se poate simplifica cu 2, deci este reductibilă.

5. Calculaţi:

a) $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}$, $a+b+c\neq 0$,

b) $\frac{11}{13}+\frac{1111}{1313}+\frac{111111}{131313}+\frac{11111111}{13131313}$.

Rezolvare:

a) $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$;

b) $\frac{11}{13}+\frac{1111}{1313}+\frac{111111}{131313}+\frac{11111111}{13131313}=\frac{11}{13}+\frac{11\cdot 101}{13\cdot 101}+\frac{11\cdot 10101}{13\cdot 10101}+\frac{11\cdot 1010101}{13\cdot 1010101}=\frac{11}{13}\cdot 4=\frac{44}{13}$.

6. Calculaţi: $(x+y)+(z+t)$ ştiind că $x+t=\frac{3}{22}$ şi $y+z=\frac{7}{33}$.

Rezolvare: $(x+y)+(z+t)=x+y+z+t=\frac{3}{22}+\frac{7}{33}=\frac{9+14}{66}=\frac{23}{66}$.

7. Fie $M=\left\{x\in Q_+ \,\middle|\, x\leq\frac{1}{2} \text{ şi } x\geq\frac{1}{50}\right\}$. Scrieţi cinci elemente ale mulţimii M.

Rezolvare: $\frac{1}{2}=\frac{25}{50}$, deci $\frac{1}{50}\leq x\leq\frac{25}{50}$.

5 elemente ale mulţimii M sunt: $\frac{2}{50}$, $\frac{9}{50}$, $\frac{15}{50}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{22}{50}$.

8. Arătaţi că: $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}<1$.

Rezolvare: Din faptul că

$\frac{1}{200}<\frac{1}{101}$, $\frac{1}{200}<\frac{1}{102}$, $\frac{1}{200}\leq\frac{1}{200}\Rightarrow$

$\frac{1}{200}\cdot 100\leq\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}$ *

Din faptul că $\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$, $\frac{1}{102}<\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}<\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}<\frac{1}{100}\cdot 100=1$ **

Din * şi ** rezultă că

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}<1$.

9. Calculaţi: $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+...+\frac{4}{2004\cdot 2008}$.

Rezolvare: Se cunoaşte relaţia: $\frac{k}{n\cdot(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$

În cazul nostru $k=4\Rightarrow\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-....+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2008}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2008}=\frac{2007}{2008}$

10. Calculaţi:

a) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}\right):\frac{10}{625}$;

b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]:\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

Rezolvare:

a) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}\right):\frac{10}{625}=\left(\frac{5^3+5^2+5+1}{5^4}\right)\cdot\frac{625}{10}=\frac{125+25+5+1}{625}\cdot\frac{625}{10}=\frac{156}{10}=15{,}6$

b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]:\left(\frac{1}{2}\right)^5=\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right]:\left(\frac{1}{2}\right)^5=\left[\frac{2^2+2+1}{2^4}\right]\cdot 2^5=14$.

11. Calculaţi: $A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

Rezolvare: $A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$

12. Rezolvaţi ecuaţia $3\left(x+\frac{1}{2}\right)+4x=7x+1\frac{1}{2}$, în $M=\left\{x\in Q\middle|\frac{1}{3}\le x<4\right\}$.

Rezolvare: $3\left(x+\frac{1}{2}\right)+4x=7x+1\frac{1}{2}\Rightarrow 3x+\frac{3}{2}+4x=7x+\frac{3}{2}\Rightarrow 0=0$, este o relaţie adevărată pentru orice x din M.

13. Calculaţi $(B-2000)^{A+1}$, ştiind că $A=\frac{12}{48}+\frac{102}{408}+\frac{1002}{4008}+\frac{10002}{40008}$ şi

$B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{2004}{2005}$.

Rezolvare: $A=\frac{12}{48}+\frac{102}{408}+\frac{1002}{4008}+\frac{10002}{40008}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=4\cdot\frac{1}{4}=1$

$B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{2004}{2005}=2005\Rightarrow(B-2000)^{A+1}=5^2=25$

14. Calculaţi: $\left[1{,}1(6)+1\frac{1}{4}:0{,}(3)\right]\cdot\left(2-\frac{4}{3}\right)^2$.

Rezolvare: $\left[1{,}1(6)+1\frac{1}{4}:0{,}(3)\right]\cdot\left(2-\frac{4}{3}\right)^2=\left[1\frac{16-1}{90}+\frac{5}{4}:\frac{3}{9}\right]\cdot\frac{4}{9}=\left[\frac{105}{90}+\frac{15}{4}\right]\cdot\frac{4}{9}=\frac{885}{180}\cdot\frac{4}{9}=\frac{59}{27}$

15. Aflaţi valorile lui $x\in N$, astfel încât $\frac{3}{5}<\frac{7}{x}<\frac{15}{11}$.

Rezolvare: $\frac{3}{5}<\frac{7}{x}<\frac{15}{11}\Leftrightarrow\frac{105}{175}<\frac{105}{15x}<\frac{105}{77}\Leftrightarrow\begin{cases}15x>77\\15x<175\end{cases}\Rightarrow x\in\{6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11\}$

16. Determinaţi fracţia $\frac{a}{b}$ ştiind că este echivalentă cu $\frac{2}{3}$ şi $a+b=10$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{2}{3} \\ a+b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot a=2\cdot b \\ a+b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot a-2\cdot b=0 \\ a+b=10 \,|\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot a-2\cdot b=0 \\ 2\cdot a+2\cdot b=20 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 5\cdot a=20 \\ b=10-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=6 \end{cases},$$

iar $\frac{a}{b}=\frac{4}{6}^{(2}=\frac{2}{3}$

17. Calculaţi media aritmetică a numerelor:

$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2011}$ şi $b=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2010}{2011}$.

Rezolvare: $m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2010}{2011}}{2}=\frac{1+1+1+...+1}{2}=\frac{2010}{2}=1005$

18. Calculaţi media ponderată a numerelor: $1,(3)$ şi $2\frac{1}{3}$ cu ponderile 6, respectiv 3.

Rezolvare: $m_p=\frac{1,(3)\cdot 6+2\frac{1}{3}\cdot 3}{6+3}=\frac{\frac{12}{9}\cdot 6+\frac{7}{3}\cdot 3}{9}=\frac{8+7}{9}=\frac{15}{9}^{(3}=\frac{5}{3}$.

19. Determinaţi numerele raţionale necunoscute:

a) $\frac{5}{7}:x=10$;

b) $3\frac{x}{3}-\frac{7}{3}=1\frac{1}{3}$

Rezolvare:

a) $\frac{5}{7}:x=10 \Rightarrow \frac{5}{7x}=10 \Rightarrow x=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$

b) $3\frac{x}{3}-\frac{7}{3}=1\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9+x}{3}-\frac{7}{3}=\frac{4}{3} \Rightarrow 9+x-7=4 \Rightarrow x=2$.

20. Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{x+1}{2}+\frac{2x+6}{3}=\frac{3x+21}{5}$.

Rezolvare:

$\frac{x+1}{2}+\frac{2x+6}{3}=\frac{3x+21}{5} \Leftrightarrow \frac{15\cdot(x+1)+10\cdot(2x+6)}{30}=\frac{6\cdot(3x+21)}{30}$

$15\cdot(x+1)+10\cdot(2x+6)=6\cdot(3x+21)$

$15x+15+20x+60-18x-126=0$

$17x=126-75$

$17x=51$

$x=3$

C.I. RAPOARTE ŞI PROPORŢII

C.I.1. RAPOARTE

Raportul

Raportul a două numere a şi b cu $b \neq 0$ este câtul a:b şi se notează $\frac{a}{b}$. Numerele a şi b se numesc ***termenii raportului***.

Observaţii:

- Dacă mărimile au aceleaşi unităţi de măsură, ele se vor simplifica şi astfel raportul nu va avea unitate de măsură;

Exemplu: Dacă dorim să calculăm raportul dintre doi timpi, $t_1 = 10s$ şi $t_2 = 4s$, vom avea $\frac{10s}{4s} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, deci s = secunda s-a simplificat.

- Dacă mărimile nu au aceleaşi unităţi de măsură, ele nu se vor simplifica şi astfel raportul va avea unitate de măsură;

Exemplu: $\rho = \frac{m}{V}$, densitatea este raportul dintre masa şi volumul unui corp şi are unitate de măsură $\langle \rho \rangle_{S.I.} = 1\frac{kg}{m^3}$

Probabilitate

Putem asocia unui eveniment un număr, aşa-zisa ***probabilitate*** a sa. Probabilitatea unui eveniment A este un număr notat $P(A) \in [0,1]$ care reprezintă şansa pe care o are evenimentul de a se produce. Dacă un experiment aleator are un *număr finit de realizări* şi acestea au *şanse egale de a se realiza*, atunci se defineşte probabilitatea unui eveniment P(E) ca fiind raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor posibile:

$$P = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr.cazurilor posibile}}$$

Exemplu: La aruncarea unui zar, avem şase realizări posibile, adică apariţia feţei cu numărul 1, 2, 3, 4, 5, 6. Probabilitatea de apariţie a unei feţe cu număr par este $P_p(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5 \in [0,1]$, deoarece evenimentul de apariţie a unei feţe cu număr par este: $A = \{2, 4, 6\}$.

Titlul unui aliaj

Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului preţios şi masa aliajului:

$$T = \frac{m}{M}.$$

Exemplu: Un aliaj conţine 614 g de aur şi 1000 g de cupru. Rezultă că $T = \frac{m}{M} = \frac{614}{1000} = 0{,}614$.

Scara unui desen

Scara unui desen este raportul dintre distanţa din desen şi distanţa din teren.

Concentraţia unei soluţii

Concentraţia unei soluţii este raportul dintre masa substanţei care se dizolvă şi masa soluţiei.

C.I.2. PROCENTE

Procent

Se numeşte ***raport procentual*** un raport de forma $\frac{p}{100}\left(p \in Q,\ p \geq 0\right)$. Se mai scrie p% şi citeşte ***p la sută*** sau ***p procente***.

Exemplu: $\frac{17}{100} = 17\%$, citim 17 la sută.

Aflarea a p% dintr-un număr

Pentru a calcula p% dintr-un număr a scriem: $a \cdot \frac{p}{100}$.

Exemplu: 15% din 60 este: $60 \cdot \frac{15}{100} = \frac{900}{100} = 9$.

Aflarea unui număr când cunoaştem p% din el

Dacă p% dintr-un număr necunoscut x este b, atunci scriem $\frac{p}{100} \cdot x = b \Rightarrow x = \frac{b \cdot 100}{p}$.

Exemplu: 18% din x este 90. Rezultă că $\frac{18}{100} \cdot x = 90, \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 100}{18} = 500$.

Calculul raportului procentual

Raportul $\frac{a}{b} = p = \frac{100p}{100} = \left(100p\right)\%$ a fost scris sub forma unui raport procentual.

Exemplu: $\frac{25}{125} = 0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$, adică 20% din 125 este 25.

C.I.3. PROPORŢII

Proporţie

Egalitatea a două rapoarte se numeşte ***proporţie***. Dată fiind proporţia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, numim **a**, **b**, **c**, **d** ***termenii proporţiei***, **a** şi **d** ***extremii proporţiei*** , iar **b** şi **c** ***mezii proporţiei***.

Produsul extremilor este egal cu produsul mezilor, în orice proporţie, adică $a \cdot d = b \cdot c$.

Exemplu: $\frac{10}{6} = \frac{30}{18} \Rightarrow 10 \cdot 18 = 30 \cdot 6 = 180$

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporţii

$$\frac{\text{Extremul}\,1}{\text{Mezul}\,1} = \frac{\text{Mezul}\,2}{\text{Extremul}\,2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Extremul}\,1 = \dfrac{\text{Mezul}\,1 \cdot \text{Mezul}\,2}{\text{Extremul}\,2} \ \text{ sau } \ \text{Extremul}\,2 = \dfrac{\text{Mezul}\,1 \cdot \text{Mezul}\,2}{\text{Extremul}\,1} \\ \text{Mezul}\,1 = \dfrac{\text{Extremul}\,1 \cdot \text{Extremul}\,2}{\text{Mezul}\,2} \ \text{ sau } \ \text{Mezul}\,2 = \dfrac{\text{Extremul}\,1 \cdot \text{Extremul}\,2}{\text{Mezul}\,1} \end{cases}$$

Exemple:

- $\frac{x}{2}=\frac{7}{3}\Rightarrow x=\frac{7\cdot 2}{3}=\frac{14}{3}$;
- $\frac{2}{x}=\frac{9}{4}\Rightarrow x=\frac{2\cdot 4}{9}=\frac{8}{9}$;
- $\frac{12}{5}=\frac{x}{6}\Rightarrow x=\frac{12\cdot 6}{5}=\frac{72}{5}$;
- $\frac{2}{5}=\frac{13}{x}\Rightarrow x=\frac{13\cdot 5}{2}=\frac{65}{2}$.

Proporţii derivate

Dată fiind proporţia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0$, din ea se pot obţine:

- ***Proporţii derivate cu aceiaşi termeni***:
  - prin schimbarea mezilor între ei: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,
  - prin schimbarea extremilor între ei: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$,
  - inversând rapoartele: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.
- ***Proporţii derivate cu termeni schimbaţi***, prin efectuarea dintre suma (diferenţa) numărătorilor şi suma (diferenţa) numitorilor; va rezulta un raport egal cu fiecare dintre cele două rapoarte ale proporţiei date.

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d};\ \frac{a}{a+d}=\frac{c}{c+d};\ \frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d};\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Şir de rapoarte egale

$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=...=\frac{x_n}{a_n}$ este ***un şir de rapoarte egale***.

Într-un şir de rapoarte egale fiecare raport este egal cu raportul dintre suma numărătorilor şi suma numitorilor, adică:

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=...=\frac{x_n}{a_n}=\frac{x_1+x_2+x_n+...+x_n}{a_1+a_2+a_n+...+a_n}.$$

Exemplu: Dorim să aflăm x, y, z din şirul de rapoarte $\frac{x}{5}=\frac{y}{11}=\frac{z}{9}$, ştiind că $x+y+z=75$.

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{11}=\frac{z}{9}=\frac{x+y+z}{5+11+9}=\frac{75}{25}=3\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{5}=3\\ \frac{y}{11}=3\\ \frac{z}{9}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=15\\ y=33.\\ z=27\end{cases}$$

C.I.4. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Raportul dintre diametrul Lunii şi diametrul Pământului este $\frac{3}{11}$. Raportul dintre diametrul Soarelui şi diametrul Pământului este $\frac{108}{1}$. Aflaţi raportul dintre diametrul Lunii şi diametrul Soarelui.

Rezolvare: Notăm: diametrul Lunii = d_L,
diametrul Soarelui = d_S,
diametrul Pământului = d_P.

$$\begin{cases} \frac{d_L}{d_P} = \frac{3}{11} \\ \frac{d_S}{d_P} = \frac{108}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_L = \frac{3 \cdot d_P}{11} \\ d_S = \frac{108 \cdot d_P}{1} \end{cases} \Rightarrow \frac{d_L}{d_S} = \frac{\frac{3 \cdot d_P}{11}}{\frac{108 \cdot d_P}{1}} = \frac{3 \cdot d_P}{11} \cdot \frac{1}{108 \cdot d_P} = \frac{3}{1188} = \frac{1}{396}.$$

2. Calculaţi valoarea raportului dintre : 26 m şi 13 km.

Rezolvare: $\frac{26\text{m}}{13\text{km}} = \frac{26\text{m}}{13000\text{m}} = 0{,}002$.

3. Într-un vas se află o soluţie de sare în apă. Masa soluţiei este de 140 g, iar cea a sării este de 9,6 g. Care este concentraţia soluţiei?

Rezolvare: Concentraţia = masa substanţei : masa soluţiei = $\frac{9{,}6\text{g}}{140\text{g}} = 0{,}0685$.

4. Numărul a este de 3 ori mai mare decât numărul b şi $\frac{1}{4}$ din numărul c. Aflaţi:

a) raportul dintre a şi b;

b) raportul dintre 3 şi $\frac{1}{4}$;

Rezolvare:

Cunoaştem că $\begin{cases} a = 3 \cdot b \\ a = \frac{1}{4} \cdot c \end{cases}$

a) $a = 3 \cdot b \Rightarrow \frac{a}{b} = 3$.

b) $\begin{cases} a = 3 \cdot b \\ a = \frac{1}{4} \cdot c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{a}{b} \\ \frac{1}{4} = \frac{a}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c}{b}$.

5. Lungimea unui teren dreptunghiular este de 20 m şi lăţimea de 10 m. Calculaţi raportul dintre lungimea şi lăţimea terenului şi invers, dintre lăţimea şi lungimea terenului.

Rezolvare: Notăm L = lungimea terenului, l = lăţimea terenului.

$\frac{L}{l} = \frac{20\text{m}}{10\text{m}} = 2$ şi $\frac{l}{L} = \frac{10\text{m}}{20\text{m}} = \frac{1}{2}$

6. Într-o cutie sunt 4 bile albe şi 6 bile negre. Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă? Dar o bilă neagră? Dar o bilă neagră?
Rezolvare:

- probabilitatea de a extrage o bilă albă $=P_a(A)=\frac{4}{10}=0{,}4$,
- probabilitatea de a extrage o bilă neagră $=P_n(A)=\frac{6}{10}=0{,}6$,
- probabilitatea de a extrage o bilă roşie $=P_r(A)=\frac{0}{10}=0$.

7. Care este probabilitatea ca aruncând două zaruri să obţinem o dublă?
Rezolvare: Numărul cazurilor posibile sunt $6\cdot 6=36$
Pentru a obţine dublă avem 6 cazuri: $\{(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\}$.

Deci, probabilitatea ca aruncând două zaruri să obţinem o dublă este: $P_d(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

8. Se topesc la un loc 20 g de aliaj cu titlul 0,825, 15 g aliaj cu titlul de 0,620 şi 12 g aliaj cu titlul 0,900. Ce titlu va avea noul aliaj?
Rezolvare: Masa aliajului este $M=20+15+12=47\text{g}$.
Masa primului metal: $m_1=T_1\cdot M_1=20\cdot 0{,}825=16{,}5\text{g}$.
Masa celui de-al doilea metal: $m_2=T_2\cdot M_2=15\cdot 0{,}62=9{,}3\text{g}$.
Masa celui de-al treilea metal: $m_3=T_3\cdot M_3=12\cdot 0{,}900=10{,}8\text{g}$.

Titlul noul aliaj este: $T=\frac{m_1+m_2+m_3}{M}=\frac{36{,}6}{47}=0{,}778$.

9. Într-un top de hârtie sunt 25 de coli de matematică, 15 coli de dictando şi 20 de coli albe. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o coală ea să fie albă?
Rezolvare:

Probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o coală albă este: $P_a(A)=\frac{20}{25+15+20}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

10. Scara unui desen este 1:500.Care este distanţa pe desen ce reprezintă distanţa reală de 12m?
Rezolvare: S = distanţa din desen / distanţa din teren = d_d/d_t

$\frac{1}{500}=\frac{d_d}{12}\Rightarrow d_d=\frac{12}{500}=0{,}024\text{m}$.

11. Aflaţi un număr ştiind că:
a) 18% din el este 120;
b) 23% din el este 2400.

Rezolvare: $\frac{p}{100}\cdot x=b\Rightarrow x=\frac{b\cdot 100}{p}$

a) $\frac{18}{100}\cdot x=120\Rightarrow x=\frac{120\cdot 100}{18}=\frac{12000}{18}\cong 666{,}66$;

b) $\frac{23}{100}\cdot x=2400\Rightarrow x=\frac{2400\cdot 100}{23}=\frac{240000}{23}\cong 10434{,}7826$.

12. 85% din elevii unei şcoli participă la un concurs. Câţi elevi are şcoala, dacă la concurs au participat 1700 de elevi?

Rezolvare: Notez cu x numărul total de elevi ai şcolii.

$$\frac{85}{100}\cdot x = 1700 \Rightarrow x = \frac{1700\cdot 100}{85} = \frac{170000}{85} = 2000 \text{elevi}$$

13. Un kilogram de portocale costă 2,5 fără TVA, iar cu TVA costă 2,95 lei. Cât la sută reprezintă TVA?

Rezolvare: Valoarea TVA este 2,95 – 2,5 = 0,45 lei.

$$\text{Val}_{\text{TVA}} = \frac{0{,}45\cdot 100}{2{,}5} = 18\%$$

14. Suma a patru numere este 345. Aflaţi numerele ştiind că al doilea este 80% din primul, al treilea este 75% din al doilea, iar al patrulea este 60% din al treilea.

Rezolvare: Fie a, b, c şi d cele 4 numere.

$$\begin{cases} a+b+c+d=345 \\ b=\frac{80}{100}\cdot a \\ c=\frac{75}{100}\cdot b \\ d=\frac{60}{100}\cdot c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=345 \\ b=\frac{80}{100}\cdot a \\ c=\frac{75}{100}\cdot b=\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a \\ d=\frac{60}{100}\cdot c=\frac{60}{100}\cdot\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a \end{cases}$$

Din $a+b+c+d=345$, prin înlocuire rezultă:

$$\begin{cases} a+\frac{80}{100}\cdot a+\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a+\frac{60}{100}\cdot\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a=345 \\ b=\frac{80}{100}\cdot a \\ c=\frac{75}{100}\cdot b=\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a \\ d=\frac{60}{100}\cdot c=\frac{60}{100}\cdot\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot\left(1+\frac{80}{100}+\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}+\frac{60}{100}\cdot\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\right)=345 \\ b=\frac{80}{100}\cdot a \\ c=\frac{75}{100}\cdot b=\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a \\ d=\frac{60}{100}\cdot c=\frac{60}{100}\cdot\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\cdot\frac{276}{100}=345 \Rightarrow a=\frac{34500}{276} \\ b=\frac{80}{100}\cdot a \\ c=\frac{75}{100}\cdot b=\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a \\ d=\frac{60}{100}\cdot c=\frac{60}{100}\cdot\frac{75}{100}\cdot\frac{80}{100}\cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=125 \\ b=\frac{80}{100}\cdot 125=100 \\ c=\frac{75}{100}\cdot 100=75 \\ d=\frac{60}{100}\cdot 75=45 \end{cases}.$$

15. Stabiliţi, dacă perechea de numere $\frac{3}{7}$ şi $\frac{5}{9}$ poate forma o proporţie.

Rezolvare: Calculăm $3\cdot 9=27$ şi $7\cdot 5=35$, cum produsul mezilor nu este egal cu produsul extremilor, perechea de numere date nu poate forma o proporţie.

16. O bancă oferă o dobândă de 11% pe an. Ce sumă primeşte o persoană care depune la bancă o sumă de 2000 lei pentru 3 luni?

Rezolvare: $\frac{11}{100}\cdot 2000 = 220$ lei/an, iar anul are 4 semestre,

deci la 3 luni primeşte: $220 : 4 = 55$ lei.

17. Aflaţi x din: $\frac{x}{1,2} = \frac{\left(2,5 - 1\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{5}{24}}$.

Rezolvare: $\frac{x}{1,2} = \frac{\left(2,5 - 1\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{5}{24}} \Rightarrow \frac{5}{24}x = 1,2\cdot\left(2,5 - 1\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{24}x = 1,2\cdot\left(\frac{25}{10} - \frac{5}{3}\right)^2$

$$\frac{5}{24}x = \left(\frac{75-50}{30}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{24}x = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{24}x = \frac{25}{36} \Rightarrow x = \frac{25\cdot 24}{36\cdot 5} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

18. Se dă numărul $a = 2^{1990} - 2^{1989} - 2^{1998}$. Aflaţi x din proporţia: $\frac{a}{x} = \frac{4^{993}}{0,25}$.

Rezolvare: $a = 2^{1990} - 2^{1989} - 2^{1998} = 2^{1998}\cdot(4-2-1) = 2^{1998}$

$$\frac{a}{x} = \frac{4^{993}}{0,25} \Rightarrow \frac{25}{100}\cdot a = x\cdot 2^{1986} \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot 2^{1988} = x\cdot 2^{1986} \Rightarrow 2^{1986} = x\cdot 2^{1986} \Rightarrow x = 1$$

19. Aflaţi numerele a, b, c, ştiind că $\frac{2a}{3} = \frac{3b}{5} = \frac{5c}{4}$ şi $a + b + c = 119$.

Rezolvare:

Fie $\frac{2a}{3} = \frac{3b}{5} = \frac{5c}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}k \\ b = \frac{5}{3}k \\ c = \frac{4}{5}k \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}k + \frac{5}{3}k + \frac{4}{5}k = 119 \Rightarrow \frac{45k + 50k + 24k}{30} = 119 \Rightarrow k = 30$,

Deci: $a = 45;\ b = 50;\ c = 24$.

20. Se dă $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d} = 100$. Calculaţi $10^3 - \frac{x+y+z+t}{a+b+c+d}$.

Rezolvare:

Se ştie că $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d} = \frac{x+y+z+t}{a+b+c+d} = 100 \Rightarrow \frac{x+y+z+t}{a+b+c+d} = 100$

Deci,

$$10^3 - \frac{x+y+z+t}{a+b+c+d} = 10^3 - 10^2 = 1000 - 100 = 900.$$

D.I. MĂRIMI PROPORŢIONALE

D.I.1. MĂRIMI DIRECT PROPORŢIONALE

Două mărimi y şi x sunt ***direct proporţionale*** atunci când depind una de alta, astfel încât, dacă una se măreşte (se micşorează) de un număr de ori şi cealaltă se măreşte (se micşorează) de acelaşi număr de ori, adică $y = k \cdot x,\ k \neq 0$. Numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ sunt ***direct proporţionale*** respectiv cu numerele $b_1, b_2, ..., b_n$, dacă există un număr *k*, nenul, astfel încât $a_1 = k \cdot b_1,\ a_2 = k \cdot b_2, ..., a_n = k \cdot b_n$, numărul ***k*** numindu-se ***coeficient de proporţionalitate***.

Observaţii:
- Pentru $k = 1$ avem $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$;
- Dacă numerele $b_1, b_2, ..., b_n$ nu sunt nule, atunci definiţia se reduce la un şir de rapoarte egale: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Regula de trei simplă

Exemplu: Din 45 l de lapte se obţin 4,5 kg de unt. Ce cantitate de unt se obţine din 120 l de lapte?

Se foloseşte următoarea aşezare:

d

45 l de lapte ……………………….4,5 kg de unt

120 l de lapte……………………….x kg de unt

Se compară mărimea necunoscută cu cealaltă mărime, deasupra căreia scriem **d** şi astfel punem în evidenţă că mărimea necunoscută e direct proporţională cu cealaltă mărime. Necunoscuta se obţine înmulţind numărul corespunzător lui x cu numărul în diagonală cu el şi împărţind la numărul rămas.

$$\frac{45}{120} = \frac{4{,}5}{x} \Rightarrow x = \frac{4{,}5 \cdot 120}{45} = 12 \text{ kg de unt}$$

D.I.2. MĂRIMI INVERS PROPORŢIONALE

Două mărimi y şi $x \neq 0$ sunt ***invers proporţionale*** atunci când depind una de alta, astfel încât, dacă una se măreşte (se micşorează) de un număr de ori, atunci cealaltă se micşorează (se măreşte) de acelaşi număr de ori, adică $y = k \cdot \frac{1}{x},\ k \neq 0$. Numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ sunt ***invers proporţionale*** respectiv cu numerele $b_1, b_2, ..., b_n$, dacă $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = ... = a_n \cdot b_n$.

Observaţie: Dacă numerele $b_1, b_2, ..., b_n$ nu sunt nule, atunci numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ sunt invers proporţionale respectiv cu numerele $b_1, b_2, ..., b_n$, dacă: $\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = ... = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}}$.

Regula de trei simplă

Exemplu: 4 robinete umplu un rezervor în 9 ore. În cât timp vor umple 12 robinete acelaşi rezervor, presupunând că toate robinetele au acelaşi debit?

i

4 robinete…………………………9 ore

12 robinete…………………….....x ore

Deoarece timpul , adică necunoscuta, este invers proporţională cu numărul de robinete, deasupra scriem **i**. Necunoscuta se obţine înmulţind numărul corespunzător lui x cu numărul de pe aceeaşi linie cu el şi împărţind produsul la numărul rămas:

$x=\frac{4\cdot 9}{12}=3$ ore.

D.I.3. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Numerele naturale x, y, z sunt direct proporţionale cu 0,1; 0,2; 0,3, iar 3x+2y+5z=110. Aflaţi x, y, z.

Rezolvare:

$$\frac{x}{\frac{1}{10}}=\frac{y}{\frac{2}{10}}=\frac{z}{\frac{3}{10}}=k\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{10}\cdot k\\ y=\frac{2}{10}\cdot k\Rightarrow 3\cdot\frac{1}{10}\cdot k+2\cdot\frac{2}{10}\cdot k+5\cdot\frac{3}{10}\cdot k=110\Rightarrow 22k=1100\Rightarrow k=50\\ z=\frac{3}{10}\cdot k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=5\\ y=10.\\ z=15\end{cases}$$

2. 25 m de pânză costă 175 de lei. Cât costă 57 m de pânză de acelaşi fel?

Rezolvare:

d

25m……………………….175 lei

57 m……………………….x lei

$x=\frac{57\cdot 175}{25}=399$ lei.

3. Aflaţi numerele x, y, z ştiind că sunt direct proporţionale cu 2, 5, 7 şi că produsul lor este 560.

Rezolvare:

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=k\\ x\cdot y\cdot z=560\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\\ y=5k\\ z=7k\\ 2k\cdot 5k\cdot 7k=560\Rightarrow 70k^3=560\Rightarrow k^3=2^3\Rightarrow k=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=10\\ z=14\end{cases}$$

4. Determinaţi numerele a, b, $c\in Q$ ştiind că sunt invers proporţionale cu 2, 5, 6 şi a-b=15.

Rezolvare:

$$\begin{cases}\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{6}}=k\\ a-b=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\cdot k\\ b=\frac{1}{5}\cdot k\\ c=\frac{1}{6}\cdot k\\ a-b=15\Rightarrow k/2-k/5=15\Rightarrow k=50\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=25\\ b=10\\ c=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}\end{cases}$$

5. O pompă de benzină dispune de o rezervă care îi ajunge 36 de zile, dacă vinde zilnic 1200 *l*. Cât timp îi ajunge rezerva, dacă zilnic se vând 600 *l*?

Rezolvare:

i

36 zile…………………………1200 *l*

x………………………………600 *l*

$$x = \frac{36 \cdot 1200}{600} = 72 \text{ zile}$$

6. Ştiind că numerele a şi b sunt direct proporţionale cu 2 şi 3, calculaţi: $\frac{3a^2 - 2ab + 4b^2}{2a^2 + 3ab + b^2}$.

Rezolvare:

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \end{cases}$, rezultă expresia devine:

$$\frac{3a^2 - 2ab + 4b^2}{2a^2 + 3ab + b^2} = \frac{3 \cdot 4k^2 - 2 \cdot 2k \cdot 3k + 4 \cdot 9k^2}{2 \cdot 4k^2 + 3 \cdot 2k \cdot 3k + 9k^2} = \frac{36k^2}{35k^2} = \frac{36}{35}.$$

7. Fie numerele a,b, c, d, e, astfel încât a, b, c sunt direct proporţionale cu $2^k, 2^{k+1}, 2^{k+2}$, iar c, d, e sunt invers proporţionale cu aceleaşi nume $k \in N^*)$.

Calculaţi: $E = \frac{0{,}2a + 0{,}04b + 0{,}01c + 0{,}003d + 0{,}0555e}{c - 2a}$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} \frac{a}{2^k} = \frac{b}{2^{k+1}} = \frac{c}{2^{k+2}} = m \\ \frac{c}{\frac{1}{2^k}} = \frac{d}{\frac{1}{2^{k+1}}} = \frac{e}{\frac{1}{2^{k+2}}} = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = m \cdot 2^k \\ b = 2m \cdot 2^k \\ c = 4m \cdot 2^k \\ c = \frac{n}{2^k} \\ d = \frac{n}{2 \cdot 2^k} \\ e = \frac{n}{4 \cdot 2^k} \end{cases}.$$

Din $\begin{cases} c = 4m \cdot 2^k \\ c = \frac{n}{2^k} \end{cases} \Rightarrow n = 4m \cdot 2^{2k} \Rightarrow \begin{cases} d = 2m \cdot 2^k \\ e = m \cdot 2^k \end{cases}$

Rezultă: $E = \frac{0{,}2 \cdot m \cdot 2^k + 0{,}04 \cdot 2m \cdot 2^k + 0{,}01 \cdot 4m \cdot 2^k + 0{,}003 \cdot 2m \cdot 2^k + 0{,}0555 \cdot m \cdot 2^k}{4m \cdot 2^k - 2m \cdot 2^k}$

$$E = \frac{m \cdot 2^k \cdot (0{,}2 + 0{,}008 + 0{,}04 + 0{,}006 + 0{,}0555)}{2m \cdot 2^k} = \frac{0{,}3095}{2} = 0{,}15475.$$

8. Calculaţi trei numere x, y, z a căror sumă este S, ştiind că x şi y sunt direct proporţionale cu 1/3 şi 1/6, iar y şi z sunt invers proporţionale cu 15 şi 9. Care este cea mai mică sumă S pentru care x, y, z să fie numere naturale?

Rezolvare:

Din $\dfrac{x}{\frac{1}{3}} = \dfrac{y}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{3} \\ y = \dfrac{k}{6} \end{cases}$, iar din $\dfrac{y}{\frac{1}{15}} = \dfrac{z}{\frac{1}{9}} = q \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{q}{15} \\ z = \dfrac{q}{9} \end{cases}$.

Avem $y = \dfrac{k}{6} = \dfrac{q}{15} \Rightarrow q = \dfrac{15k}{6} = \dfrac{5k}{2}$

$$S = \frac{k}{3} + \frac{k}{6} + \frac{q}{9} = \frac{k}{3} + \frac{k}{6} + \frac{5k}{18} = \frac{14}{18}k = \frac{7}{9}k \Rightarrow k = \frac{9}{7}S \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{7}S \\ y = \dfrac{9}{42}S = \dfrac{3}{14}S \\ z = \dfrac{45}{14}S \end{cases}$$

Pentru ca $x, y, z \in N \Rightarrow S_{\min im} = 14$.

9. Aflaţi a şi b direct proporţionale cu 2 şi 3, ştiind că c.m.m.m.c. =36.

Rezolvare:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \end{cases} \Rightarrow k = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}.$$

10. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c $(0 < a < b < c)$ şi $d \in N$, ştiind că a, b, c sunt direct proporţionale cu 3, 4 şi d, iar $3a + 4b + dc \le 50$.

Rezolvare:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \cdot k \\ b = 4 \cdot k \\ c = d \cdot k \end{cases}$$

$$9 \cdot k + 16 \cdot k + d^2 \cdot k \le 50 \Rightarrow 25 \cdot k + d^2 \cdot k \le 50 \Rightarrow k \cdot \left(25 + d^2\right) \le 50$$

$$k \le \frac{50}{25 + d^2} \Rightarrow k \le \frac{50}{25 + d^2} < \frac{50}{25} = 2$$

$k < 2 \Rightarrow k = 1$.

Rezultă:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = d \end{cases}$$

$9 + 16 + dc \le 50 \Rightarrow dc \le 25 \Rightarrow c^2 \le 25 \Rightarrow c = 5$

$c = d = 5$

E.I. NUMERE ÎNTREGI

E.I.1. CONSIDERAŢII GENERALE PRIVIND NUMERELE ÎNTREGI. REPREZENTAREA NUMERELOR ÎNTREGI PE AXĂ ŞI ÎNTR-UN SISTEM DE AXE ORTOGONALE

Se numeşte ***număr întreg*** numărul natural 0 sau orice număr natural diferit de 0 precedat fie de semnul "+", fie de semnul "-".

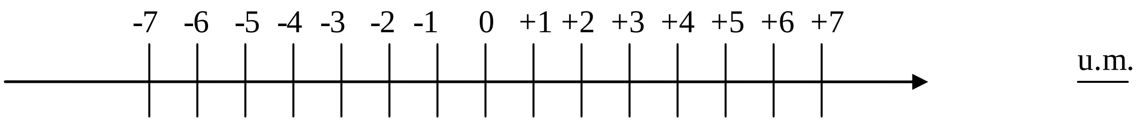
Observaţii:

- ***Mulţimea numerelor întregi*** se notează cu **Z**;
- ***Mulţimea numerelor întregi pozitive*** este o submulţime a lui Z, notată $Z_{+}^{*}=\{+1;+2;+3;...\}$;
- ***Mulţimea numerelor întregi negative*** este o submulţime a lui Z, notată $Z_{-}^{*}=\{-1;-2;-3;...\}$;
- Avem: $Z=Z_{-}^{*}\cup\{0\}\cup Z_{+}^{*}$;
- $Z^{*}=Z/\{0\}$;
- ***Mulţimea numerelor întregi nenegative*** este: $\{0;+1;+2;+3;...\}$;
- ***Opusul unui număr întreg diferit de zero*** este acel număr întreg care se obţine din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0.

Exemple: Opusul numărului 10 este -10
Opusul numărului -5 este 5.
Se scrie: -(-16) = 16.

Reprezentarea pe axă a numerelor întregi

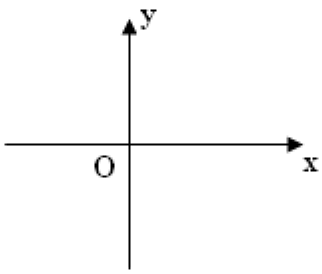
Numerele pot fi reprezentate pe axa numerelor care este o dreaptă pe care se fixează originea, un sens pozitiv şi o unitate de măsură.



Exemplu: $-4<-1$; $2>-3$.

Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a punctelor cu coordonate întregi

Sistem de axe ortogonale = figura formată din două axe a numerelor, care sunt perpendiculare.



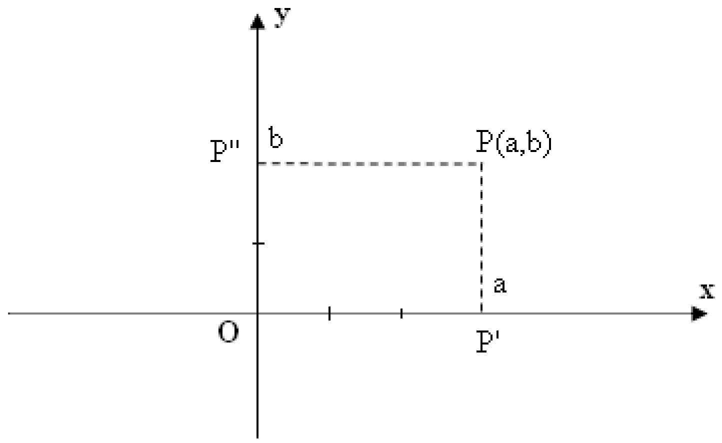
axa Ox – axa absciselor
axa Oy – axa ordonatelor
O – originea sistemului

Asociem fiecărei perechi de numere întregi (a,b) un punct în plan obţinut astfel:

- pe axa Ox reprezentăm punctul P' de coordonată a;
- pe axa Oy reprezentăm punctul P'' de coordonată b;
- prin punctul P' ducem o paralelă la axa Oy, iar prin punctul P'' ducem o paralelă la axa Ox;

- la intersecţia paralelelor este punctul P (a,b).

Citim: punctul P de abscisă a şi ordonată b.



Produsul cartezian a două mulţimi A şi B

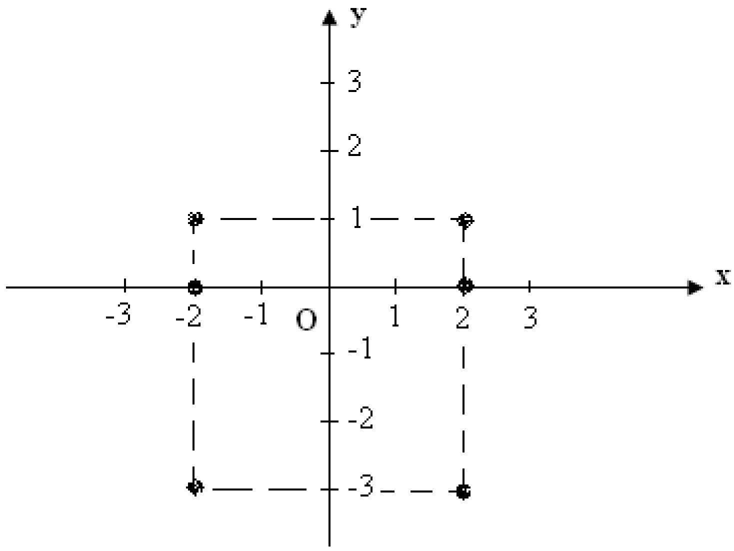
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$

Dacă A şi B sunt mulţimi de numere întregi, atunci $A \times B \subset Z \times Z$.

Exemplu: $A = \{-2; 2\}$ şi $B = \{-3;\ 0;\ 1\}$.

$A \times B = \{(-2;-3), (-2;0), (-2;1), (2;-3), (2;0), (2;1)\}$.

Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale este:



E.I.2. MODULUL UNUI NUMĂR ÎNTREG

Modulul sau valoarea absolută a unui număr întreg pozitiv este acel număr; modulul numărului întreg 0 este 0; modulul unui număr întreg negativ este opusul acelui număr.

Aceste afirmaţii se pot scrie astfel: $|z| = \begin{cases} z, & \text{pentru } z > 0 \\ 0, & \text{pentru } z = 0 \\ -z, & \text{pentru } z < 0 \end{cases}$.

Exemple: $|+15| = +15$; $|0| = 0$; $|-7| = -(-7) = +7$

Exemplu: Determinaţi cardinalul mulţimii: $A = \{x \in Z \text{ şi } |x| \le 3\}$.

Rezultă că $A = \{-3;-2;-1;0;+1;+2;+3\} \Rightarrow \text{card } A = 7$.

Exemplu: $|x| \le 0 \Rightarrow x = 0$.

Proprietăţi:

- Modulul oricărui număr întreg nenul este mai mare decât zero: $|z| > 0, \forall z \in Z^*$;
- Modulul unui număr întreg este egal cu zero, dacă şi numai dacă numărul este egal cu zero: $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- Modulul oricărui număr întreg este un număr natural: $|z| \in N, \forall z \in Z$;
- Două numere opuse au module egale: $|z| = |-z|, \forall z \in Z$;
- Dacă o sumă de module este egală cu zero, atunci fiecare modul este egal cu zero:
  Dacă $|z_1| + |z_2| + ... + |z_n| = 0$, atunci $|z_1| = 0$, $|z_2| = 0, \ldots, |z_n| = 0$.

Exemple:

- $|-16| = 16 > 0$; $|10| = 10 > 0$;
- $|x-4| = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$, deci $x = 4$;
- $|-25| = 25 \in N$;
- $|-15| = |15| = 15$;
- $|x-2| + |2x-4| = 0 \Rightarrow x - 2 = 0,\ 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Ordonarea numerelor întregi

- $a \in Z_- \Rightarrow a < 0$
- $a \in Z_+ \Rightarrow a > 0$
- $a \in Z_-$ şi $b \in Z_+ \Rightarrow a < b$
- $a \in Z_+$, $b \in Z_+$ şi $|a| < |b| \Rightarrow a < b$
- $a \in Z_-$, $b \in Z_-$ şi $|a| < |b| \Rightarrow a > b$

Exemplu: $|5| < |10| \Rightarrow 5 < 10$; $|-8| < |-9| \Rightarrow -8 > -9$.

Exemplu: Se cere ordonarea crescătoare a numerelor: $-|-7|$; $|-2011|^0$; $-|5|$; $|-4|$.

$-|-7| = -7$

$|-2011|^0 = 1$

$-|5| = -5$

$|-4| = 4$

Ordonarea crescătoare: $-|-7|$, $-|5|$, $|-2011|^0$, $|-4|$.

E.I.3. OPERAŢII CU NUMERE ÎNTREGI

Adunarea numerelor întregi

Adunarea numerelor întregi se defineşte cu ajutorul operaţiei de adunare a numerelor naturale.

Se numeşte ***suma*** a două numere întregi diferite de zero un număr întreg care este:

- *suma modulelor* celor două numere întregi precedată de semnul "+", dacă cele două numere întregi sunt pozitive;

Exemplu: $(+3)+(+5)=+8$.

- *suma modulelor* celor două numere întregi precedată de semnul "-", dacă cele două numere întregi sunt negative;

Exemplu: $(-7)+(-3)=-10$.

- *diferenţa modulelor* celor două numere întregi precedată de semnul numărului cu modulul mai mare, dacă cele două numere întregi au semne diferite şi module diferite;

Exemple: $(2)+(-7)=-5;\ 10+(-6)=4;\ -25+(+55)=+30.$

- *numărul întreg* 0, dacă cele două numere întregi au semne diferite şi module egale.

Exemple: $6+(-6)=0;\ 0+0=0;\ -9+9=0$.

Proprietăţile adunării numerelor întregi:

- comutativitatea: $\forall a,b\in Z,\ a+b=b+a$;
- asociativitatea: $\forall a,b,c\in Z,\ (a+b)+c=a+(b+c)$;
- elementul neutru la adunare este 0: $\forall a\in Z, \exists\ 0\in Z$, a.î. $a+0=0+a=a$;
- opusul numărului a este -a: $\forall a\in Z,\ \exists -a\in Z$, a.î. $a+(-a)=0$.

Scăderea numerelor întregi

Dacă a şi b sunt numere întregi, se consideră: a-b=a+(-b), a-b numindu-se ***diferenţa*** dintre a şi b.

Altfel, ***diferenţa dintre a şi b*** este suma dintre a şi opusul lui b.

Exemplu: $29-10=29+(-10)=+19$

Observaţii:

- semnul "+" în faţa unei paranteze nu schimbă semnul numărului din paranteză.

Exemple: $+(-5)=-5;\ +(-3-4)=+(-7)=-7$.

- semnul "-" în faţa unei paranteze schimbă semnul numărului din paranteză, obţinându-se opusul numărului.

Exemple: $-(-10)=+10;\ -(-3+9)=-6$.

Observaţie: Adunarea şi scăderea numerelor întregi sunt operaţii de ordinul întâi.

Înmulţirea numerelor întregi

Produsul a două numere întregi a şi b, numite ***factorii produsului***, este un număr întreg, notat $a\cdot b$ care:

- are semnul "+" , dacă cei doi factori au acelaşi semn, adică dacă a>0 şi b>0 sau a<0 şi b<0, atunci $a\cdot b=|a|\cdot|b|$;

- are semnul “-” , dacă cei doi factori au semne diferite, adică dacă a>0 şi b<0 sau a<0 şi b>0, atunci $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$;
- este egal cu 0, adică $a \cdot b = 0$, dacă a=0 sau b=0.

Exemple:
- $2 \cdot 5 = 10$; $(-7) \cdot (-3) = +21$;
- $3 \cdot (-5) = -15$; $(-4) \cdot 2 = -8$;
- $0 \cdot 5 = 0$; $(-3) \cdot 0 = 0$.

Regula semnelor sintetizată tabelar

·	+	-
+	+	-
-	-	+

Reguli de calcul:
- $\forall a \in Z,\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
- $\forall a \in Z,\ a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$;
- $\forall a, b \in Z,\ (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b;\ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ (*regula semnelor*).

Proprietăţile înmulţirii numerelor întregi:
- comutativitatea: $\forall a, b \in Z,\ a \cdot b = b \cdot a$;
- asociativitatea: $\forall a, b, c \in Z,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- distributivitatea înmulţirii faţă de adunare şi scădere: $\forall a, b, c \in Z,\ a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$;
- elementul neutru la înmulţire este 1: $\forall a \in Z, \exists 1 \in Z$, a.î. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Proprietăţi:
- $\forall a, b, c \in Z$, dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$;
- $\forall a, b, c \in Z$, dacă $c \neq 0$ şi $a \cdot c = b \cdot c$, atunci $a = b$;
- $\forall a, b, c \in Z$, dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$;
- Dacă într-un produs de numere întregi numărul factorilor negativi este impar, atunci produsul este negativ, iar dacă numărul factorilor negativi este par, atunci produsul este pozitiv;

Exemple:
- $\underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{2011 \text{ factori}} = -1$;
- $\underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{1000 \text{ factori}} = +1$.

Factor comun
Exemple:
- $16 \cdot 47 - 16 \cdot 46 - 16 \cdot (+1) = 16 \cdot (47 - 46 - 1) = 16 \cdot 0 = 0$;
- $2008 + 2009 \cdot 2008 - 2011 \cdot 2008 = 2008 \cdot (1 + 2009) - 2011 \cdot 2008 =$
  $= 2008 \cdot 2010 - 2011 \cdot 2008 = 2008 \cdot (2010 - 2011) = 2008 \cdot (-1) = -2008$;
- Dacă $ab + ac = 15$ şi $b + c = 5 \Rightarrow a \cdot (b + c) = 15 \Rightarrow 5 \cdot a = 15 \Rightarrow a = 3$.

Împărţirea numerelor întregi

Dacă a şi b $\in Z$ şi $b \neq 0$, câtul dintre a şi b, notat a:b sau $\frac{a}{b}$ este un număr $c \in Z$, dacă există, pentru care $a = b \cdot c$. Numărul a se numeşte deîmpărţit, iar b împărţitor.

Împărţirea numerelor întregi este operaţia prin care se obţine câtul a două numere întregi.

Regula semnelor sintetizată tabelar

:	+	-
+	+	-
-	-	+

Exemple: $\frac{24}{8} = 3$; $\frac{-25}{5} = -5$; $\frac{-36}{-4} = 9$; $\frac{48}{-6} = -8$

Observaţii:

- $\forall a \in Z$, operaţia $\frac{a}{0}$ nu are sens;
- $\forall a, b, c, d \in Z$, a.î. $a = b$, $c = d$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ şi există câtul dintre a şi c, respectiv b şi d, atunci $a : c = b : d$.

Observaţie: Înmulţirea şi împărţirea numerelor întregi sunt operaţii de ordinul al doilea.
Dacă avem într-un exerciţiu înmulţiri şi împărţiri, ele se efectuează în ordinea scrisă.

Exemplu: $[-2 \cdot (-3) \cdot (-7)] : (-2) = (-42) : (-2) = 21$.

Puterea unui număr întreg cu exponent natural

Dacă $a \in Z$ şi $n \in N$, $n \geq 2$, atunci puterea *n* a lui *a* este: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ factori}}$, în care *a* se numeşte *bază*, iar *n* se numeşte *exponent*.

Prin definiţie:

- $a^0 = 1, \ a \neq 0$
- $a^1 = a$
- 0^0 - nu are sens.

Proprietate:

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, \text{ pentru } n = 2k, \ k \in N \\ -a^n, \text{ pentru } n = 2k+1, \ k \in N \end{cases}$$

Pentru a=1, obţinem:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ pentru } n = 2k, \ k \in N \\ -1, \text{ pentru } n = 2k+1, \ k \in N \end{cases}$$

Exemple:

- $(-2)^4 = 2^2 = 16$;
- $2^0 = 1$;
- $(-1)^{101} + (-1)^{100} = -1 + 1 = 0$;

Reguli de calcul cu puteri

Oricare ar fi **m** şi **n** $\in N$, iar **a** şi **b** $\in Z$, atunci:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a : b)^n = a^n : b^n$

Exemple:

- $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5$;
- $(6^2)^4 = 6^8$;
- $13^6 : 13^2 = 13^4$;
- $[(-2) \cdot 7]^5 = (-2)^5 \cdot 7^5$;
- $(11 : 2)^7 = 11^7 : 2^7$.

Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor

Într-un şir de operaţii cu numere întregi se efectuează operaţiile de ordinul trei, apoi doi, apoi întâi, în ordinea în care apar.

În exerciţiile în care apar paranteze se efectuează mai întâi calculele din parantezele rotunde, apoi dintre cele pătrate, apoi cele dintre acolade.

Exemple:

- $8^4 : (-4)^6 + (-2) : (-2)^0 = 2^{12} : 2^{12} + (-2) : 1 = 1 - 2 = -1$;
- $\{[4500 : (-100) - 90 : 2 - (-90)] : 1996\} \cdot 25 = \{[-45 - 45 - (-90)] : 1996\} \cdot 25 = 0$.

Mulţimea multiplilor unui număr întreg

Numărul întreg a este ***multiplul*** numărului întreg nenul b (*a se divide la b*), dacă există un număr întreg c, astfel încât a = b · c.

Se mai spune că b este *divizorul* lui a şi se folosesc notaţiile: $a \vdots b$ (citim *a se divide la b* sau *a este divizibil cu b*).

Se utilizează notaţia:

$M_a = \{\ldots, -3a; -2a; -a; 0; +a; +2a; +3a; \ldots\}$ - mulţimea multiplilor numărului a.

Exemple:

- -36$\vdots$9, deoarece $\exists -4 \in Z$, astfel încât $-36 = 9 \cdot (-4)$;
- Mulţimea multiplilor întregi ai numărului +3 este:
  $M_3 = \{\ldots, -12; -9; -6; -3; 0; +3; +6; +9; +12; \ldots\}$

Fie a şi b două numere întregi. Un număr întreg m se numeşte ***cel mai mic multiplu comun*** (notat c.m.m.m.c (a,b) = [a, b]) al numerelor a şi b, dacă:

- m este multiplu comun al lui a şi b ($m \vdots a$, $m \vdots b$);
- orice alt multiplu comun m* al lui a şi b este multiplu al lui m (adică $m^* \vdots a$ şi $m^* \vdots b \Rightarrow m^* \vdots m$).

Observaţii:

- Numărul întreg 0 este multiplul oricărui număr întreg;
- Orice număr întreg este multiplu al numerelor -1 şi +1;
- $[a;b]=[|a|;\ |b|]$.

Exemplu: $[-24;\ 48]=[24;\ 48]$

$24=2^3\cdot 3;\quad 48=2^4\cdot 3$

Rezultă: $[24;\ 48]=2^4\cdot 3=48$

Mulţimea divizorilor unui număr întreg

Un număr întreg *a*, $a\neq 0$, ***divide*** numărul întreg *b*, dacă există un număr întreg *c*, astfel încât b = a · c.

Notăm **a | b** şi se citeşte *a divide pe b* sau *a este divizor al lui b*.

Uneori se foloseşte şi notaţia $b\vdots a$ care se citeşte *b este divizibil cu a* sau *b se divide cu a* sau *b este multiplu a lui a*.

Se utilizează notaţia: D_a - mulţimea divizorilor numărului a.

Exemple:

- $-4|36$, deoarece există $-9\in Z$, astfel încât $36=(-4)\cdot(-9)$,
- Mulţimea divizorilor întregi ai lui 6 sunt: $D_6=\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$.
- Mulţimea divizorilor întregi ai lui -25 sunt: $D_{-25}=\{-25;-5;-1;1;5;25\}$.

Proprietăţi:

- Oricare ar fi numărul întreg **a**, atunci **a | a** ;
- Oricare ar fi numărul întreg **a**, atunci **a | 0** şi **1 | a** ;
- Oricare ar fi numărul întreg **a**, dacă **a | 1** şi **a | (-1)**, atunci **a=** ± **1**;
- Oricare ar fi numerele întregi **a** şi **b**, dacă **a | b** şi **b | a** , atunci **a** = ± **b**;
- Oricare ar fi numerele întregi **a**, **b**, **c**
  - dacă **a | b** şi **a | c**, atunci **a | b·c**;
  - dacă **a | b** şi **a | c**, atunci **a | (b + c)** şi **a | (b - c)**;
  - dacă **a | c**, **b | c** şi $(a;b)=1$, atunci **a·b | c** .

Un număr întreg **c** se numeşte ***divizor comun*** al numerelor întregi a şi b, dacă c | a şi c | b.

Un număr întreg **d** se numeşte ***cel mai mare divizor comun*** al numerelor a şi b (notat c.m.m.d.c (a,b) = (a, b)) , dacă:

- d este divizor comun al lui a şi b (d | a şi d | b);
- orice alt divizor comun d* al lui a şi b divide neaparat pe d (adică d* | a şi d* | b $\Rightarrow d^*|d$).

Observaţii:

- $(a;\ b)=(|a|;\ |b|)$;
- Există două numere întregi întotdeauna care au proprietatea c.m.m.d.c al numerelor a şi b. Aceste numere sunt egale în modul şi de semn contrar. Cel pozitiv se notează $(a;\ b)$.

Exemple:

- $(-24;\ 48)=(24;\ 48)$; $24=2^3\cdot 3$; $48=2^4\cdot 3$. Rezultă: $(24;\ 48)=2^3\cdot 3=24$;

- Mulţimea divizorilor întregi ai numărului 16 sunt: $D_{16} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16\}$;
- Mulţimea divizorilor întregi pozitivi ai lui 14 sunt: $D_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$, în care 1 şi 14 sunt *divizori improprii*, iar 2 şi 7 sunt *divizori proprii* ai lui 14;
- Mulţimea divizorilor negativi ai lui 22 sunt: $D_{22} = \{-22; -11; -1\}$;
- Suma divizorilor întregi ai numărului 2009 este 0, deoarece $D_{2009} = \{0; \pm 1; \pm 7; \pm 41; \pm 49; \pm 287; \pm 2009\}$

Din acest ultim exemplu se poate observa că suma divizorilor oricărui $a \in Z$ este 0.

E.I.4. REZOLVAREA UNOR ECUAŢII, INECUAŢII ÎN MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Etapele rezolvării în Z a ecuaţiei $a \cdot x + b = c,\ a \in Z^*,\ b, c \in Z$

Paşii de rezolvare a ecuaţiei:

- Se separă termenul care conţine necunoscuta, adică: $a \cdot x = c - b$,
- Împărţim ecuaţia cu $a \neq 0$ şi rezultă: $x = \frac{c-b}{a}$:
  - dacă $\frac{c-b}{a} = k \in Z$, atunci ecuaţia are soluţii în mulţimea Z şi soluţia $S = \{k\}$;
  - dacă $\frac{c-b}{a} \notin Z$, atunci ecuaţia nu are soluţii în mulţimea Z.

Exemplu:

$$5 \cdot (x-1) = 2x + 7 \Rightarrow 5x - 5 = 2x + 7 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4 \in Z$$

Proba: $5 \cdot (4-1) = 2 \cdot 4 + 7 \Rightarrow 5 \cdot 3 = 8 + 7 \Rightarrow 15 = 15$ adevărat.

Etapele rezolvării în Z a inecuaţiei $a \cdot x + b < 0,\ a, b \in Z,\ a \neq 0,\ a | b$

- Adunăm în ambii membri –b şi obţinem $a \cdot x + b - b < -b$, de unde $ax < -b$;
- Împărţim inecuaţia $a \cdot x < -b$ cu a;
  - dacă $a > 0$, obţinem $x < -\frac{b}{a}$;
  - dacă $a < 0$, obţinem $x > -\frac{b}{a}$.

Interpretarea soluţiei: $-\frac{b}{a} \in Z$.

- pentru $a > 0 \Rightarrow x < k \Rightarrow S$ este mulţimea numerelor întregi situate pe axa numerelor în stânga numărului întreg k;
- pentru $a < 0 \Rightarrow x > k \Rightarrow S$ este mulţimea numerelor întregi situate pe axa numerelor în dreapta numărului întreg k;

În mod similar se rezolvă inecuaţiile: $a \cdot x + b \leq 0$, $a \cdot x + b > 0$, $a \cdot x + b \geq 0$, unde $a, b \in Z,\ a \neq 0,\ a | b$.

Exemplu:

$$2x - 6 > -30 \Rightarrow 2x - 6 + 6 > -30 + 6 \Rightarrow 2x > -30 + 6 \Rightarrow 2x > -24 \Rightarrow x > -\frac{24}{2} \Rightarrow x > -12$$

E.I.5. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Se consideră 6 numere întregi consecutive. Cel mai mare dintre ele este 2. Care sunt celelalte?
Rezolvare: $M = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

2. Scrieţi elementele mulţimilor:
a) $M = \{x \in Z | -2 \le x < 6\}$;
b) $N = \{x \in Z | -3 < x \le 2\}$.
Rezolvare:
a) $M = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;
b) $N = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

3. Calculaţi:
a) -100-99-98-…-2-1+0+1+2+…+98+99;
b) 2-4+6-8+10-12+…+98-100.
Rezolvare:
a) -100-99-98-…-2-1+0+1+2+…+98+99 = -100;
b) 2-4+6-8+10-12+…+98-100 = -2-2-…-2 = $(-2) \cdot 25 = -50$.

4. Fie $A = \left\{ x \in Z \middle| \frac{5}{x+2} \in Z \right\}$ şi $B = \{x \in Z | -1 < 2x + 1 \le 3\}$. Arătaţi că A şi B sunt mulţimi disjuncte.
Rezolvare:
$x + 2 \in D_5 = \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow A = \{-7; -3; -1; 3\}$.
$B = \{x \in Z | -1 < 2x + 1 \le 3\} = \{x \in Z | -2 < 2x \le 2\} = \{x \in Z | -1 < x \le 1\} = \{0; 1\}$
Rezultă că $A \cap B = \varnothing$, deci A şi B sunt mulţimi disjuncte.

5. Efectuaţi: $(4 + 44 + 444 + 4444 + 44444) : 2 + 24 : 12 \cdot (-1 - 11 - 111 - 1111 - 11111)$.
Rezolvare:
$(4 + 44 + 444 + 4444 + 44444) : 2 + 24 : 12 \cdot (-1 - 11 - 111 - 1111 - 11111) =$
$= 4 \cdot (1 + 11 + 111 + 1111 + 11111) : 2 + 24 : 12 \cdot (-1) \cdot (1 + 11 + 111 + 1111 + 11111) =$
$= (1 + 11 + 111 + 1111 + 11111) \cdot (2 - 2) = 0$

6. Calculaţi: $|-2| \cdot (-36) : |-18| + |-2|^{|-7| \cdot 0} - |-[(-84) : (-12)]|^{|-2|}$.
Rezolvare:
$|-2| \cdot (-36) : |-18| + |-2|^{|-7| \cdot 0} - |-[(-84) : (-12)]|^{|-2|} = 2 \cdot (-36) : 18 + 2^0 - 7^2 = -72 : 18 + 1 - 49 =$
$= -4 + 1 - 49 = -52$

7. Aflaţi că numărul $N = 2^{2n+1} \cdot 5^{n+2} - 4^{n+1} \cdot 5^n \cdot 10 - 2^{2n+4} \cdot 5^n$ este divizibil cu 24, $\forall n \in N^*$.
Rezolvare: $N = 2^{2n} \cdot 2 \cdot 5^n \cdot 5^2 - 2^{2n} \cdot 2^2 \cdot 5^n \cdot 2 \cdot 5 - 2^{2n} \cdot 2^4 \cdot 5^n$
$N = 2^{2n} \cdot 5^n \cdot (2 \cdot 5^2 - 2^3 \cdot 5 - 2^4)$
$N = 2^{2n} \cdot 5^n \cdot (50 - 40 - 16) = (-6) \cdot 2^{2n} \cdot 5^n = (-6) \cdot 2^2 \cdot 2^{2n-2} \cdot 5^n = (-24) \cdot 2^{2n-2} \cdot 5^n \Rightarrow 24 | N$

8. Determinaţi numerele întregi x şi y, astfel încât să aibă loc egalitatea: $x\cdot(y-2)=23$.

Rezolvare: $x\cdot(y-2)=1\cdot 23=23\cdot 1=(-1)\cdot(-23)=(-23)\cdot(-1)$.

Cazul I. $\begin{cases} x=1 \\ y-2=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=25 \end{cases}$

Cazul II. $\begin{cases} x=23 \\ y-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=23 \\ y=3 \end{cases}$

Cazul III. $\begin{cases} x=-1 \\ y-2=-23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-21 \end{cases}$

Cazul IV. $\begin{cases} x=-23 \\ y-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-23 \\ y=1 \end{cases}$

9. Fie $A=\{x\in Z \mid |x|<7\}$. Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare un element din această mulţime, el să fie prim?

Rezolvare: $A=\{0;\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 4;\pm 5;\pm 6\}$.

Avem: $\text{card}A=13$ cazuri posibile şi $\{\pm 2;\pm 3;\pm 5\}$ 6 cazuri favorabile.

Deci $P=\dfrac{6}{13}$.

10. Determinaţi $n\in Z$, astfel încât $2n+1|3n+4$.

Rezolvare:

$2n+1|3n+4$ şi $2n+1|2n+1$, atunci

$$\left.\begin{array}{l} 2n+1|\,2\cdot(3n+4) \\ 2n+1|\,3\cdot(2n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2n+1|6n+8-(6n+3)$$

$\Rightarrow 2n+1|5 \Rightarrow 2n+1\in D_5=\{\pm 1;\ \pm 5\}$.

$2n+1=1 \Rightarrow n=0$

$2n+1=-1 \Rightarrow n=-1$

$2n+1=5 \Rightarrow n=2$

$2n+1=-5 \Rightarrow n=-3$

11. Fie $E(n)=(-1)^n\cdot n,\ n\in N^*$. Să se calculeze: $E(1)+E(2)+E(3)+...+E(2003)$.

Rezolvare:

$E(1)=(-1)^1\cdot 1=-1$

$E(2)=(-1)^2\cdot 2=2$

$E(3)=(-1)^3\cdot 3=-3$

$E(4)=(-1)^4\cdot 4=4$

……………………

$E(2003)=(-1)^{2003}\cdot 2003=-2003$

$E(1)+E(2)+E(3)+E(4)+...+E(2001)+E(2002)+E(2003)=$

$=(-1+2)+(-3+4)+...+(-2001+2002)-2003=\underbrace{1+1+1+...+1}_{1001\text{ termeni}}-2003=1001-2003=-1002$

12. Fie numărul: $A = 243\cdot(-1)^n - 342\cdot(-1)^{n+1} + 456\cdot(-1)^{k^2-k+1990} - 654\cdot(-1)^{p^2+p+1}$, unde $k, p, n \in N$. Arătaţi că $A \vdots 5$.

Rezolvare:

$k^2 - k + 1990 = k\cdot(k-1) + 1990 \Rightarrow \begin{cases} k\cdot(k-1) \vdots 2 \\ 1990 \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow (k^2 - k + 1990) \vdots 2 \Rightarrow (-1)^{k^2-k+1990} = 1$

$p^2 + p + 1 = p\cdot(p+1) + 1 = 2k + 1 = \text{impar} \Rightarrow (-1)^{p^2+p+1} = -1$

$k\cdot(k-1) \vdots 2$, $p\cdot(p+1) \vdots 2$ ca produse de 2 numere consecutive.

Rezultă că

$A = 243\cdot(-1)^n - 342\cdot(-1)^{n+1} + 456 + 654 = 243\cdot(-1)^n - 342\cdot(-1)^{n+1} + 1110$

$A = 243\cdot(-1)^n + 342\cdot(-1)^n + 1110 = (-1)^n\cdot(243 + 342) + 1110$

$A = (-1)^n \cdot 585 + 1110$

Dacă $n = \text{par} \Rightarrow A = 585 + 1110 = 1695$

Dacă $n = \text{impar} \Rightarrow A = -585 + 1110 = 525$

13. Rezolvaţi în Z ecuaţia: $2xy - 3x - 4y + 9 = 0$.

Rezolvare:

$2xy - 3x - 4y + 6 + 3 = 0$

$x\cdot(2y-3) - 2\cdot(2y-3) = -3$

$(2y-3)\cdot(x-2) = -3$

Avem următoarele situaţii posibile:

Cazul I. $\begin{cases} 2y-3=-1 \\ x-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=5 \end{cases}$

Cazul II. $\begin{cases} 2y-3=3 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$

Cazul III. $\begin{cases} 2y-3=1 \\ x-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$

Cazul IV. $\begin{cases} 2y-3=-3 \\ x-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=3 \end{cases}$

14. Rezolvaţi ecuaţia: $|x-2| + |y+1| = 0$.

Rezolvare:

Din $|x-2| + |y+1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-2| = 0 \\ |y+1| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

15. Rezolvaţi inecuaţia: $|x-3| \le 2,\ x \in Z$.

Rezolvare: Cazuri posibile:

- $|x-3| = 2 \Rightarrow x-3 = \pm 2 \Rightarrow x \in \{1; 5\}$
- $|x-3| = 1 \Rightarrow x-3 = \pm 1 \Rightarrow x \in \{2; 4\}$
- $|x-3| = 0 \Rightarrow x = 3$

Deci, soluţia este $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

16. Aflaţi $x \in Z$ pentru care $\frac{2x+5}{x-3} \in Z$.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l} x-3 \mid 2x+5 \\ x-3 \mid x-3 \Rightarrow x-3 \mid 2\cdot(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow x-3 \mid 2x+5-2x+6 \Rightarrow x-3 \mid 11 \Rightarrow x-3 \in D_{11} = \{\pm 1; \pm 11\}.$$

$\Rightarrow x \in \{-8;\ 2;\ 4;\ 14\}$

17. Rezolvaţi inecuaţia: $5x+3 \le 3x-5$.

Rezolvare:

$5x+3 \le 3x-5 \quad \mid -3x$

$5x+3-3x \le 3x-5-3x$

$5x+3-3x \le -5 \quad \mid -3$

$5x-3x \le -5-3$

$2x \le -8 \mid :2 \Rightarrow x \le -4 \Rightarrow x \in \{\dots,-6,-5,-4\}$.

18. Arătaţi că numărul $N = \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)+1}{4} \in Z, \forall n \in N^*$.

Rezolvare:

- pentru n = 2k , $k \in Z \ \Rightarrow N = \frac{4k-1+1}{4} = k \in Z$,
- pentru n = 2k+1 , $k \in Z \ \Rightarrow N = \frac{-(4k+2-1)+1}{4} = \frac{-4k}{4} = -k \in Z$,

cele 2 expresii demonstrează faptul că $N \in Z, \forall n \in N^*$.

19. Pentru ce valori ale lui n numărul $\frac{n^2+4}{n} \in Z$?

Rezolvare:

$$\frac{n^2+4}{n} = \frac{n^2}{n} + \frac{4}{n} = n + \frac{4}{n} \in Z \Leftrightarrow n \mid 4 \Rightarrow n \in \{\pm 1;\ \pm 2; \pm 4\}.$$

20. Determinaţi $x \in Z$, ştiind că : $|x-2004| - |-2005| = 0$

Rezolvare:

$|x-2004| - 2005 = 0$

$|x-2004| = 2005$

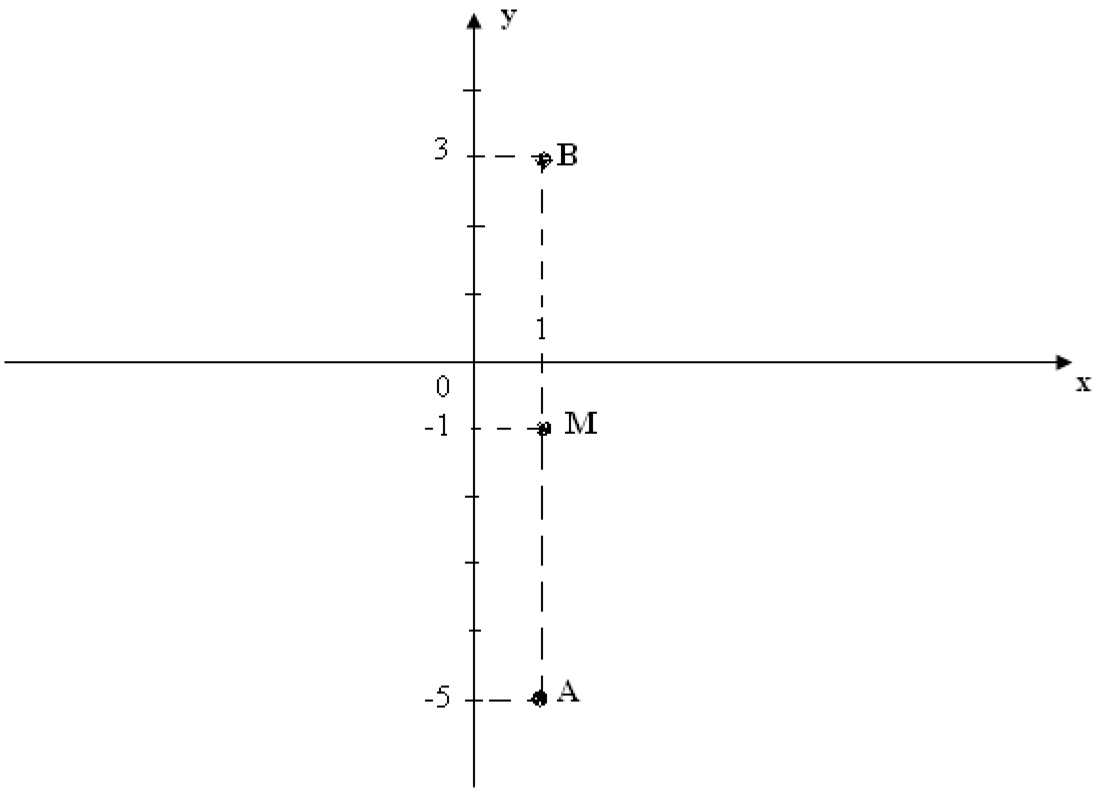
$x-2004 = \pm 2005$

$x \in \{-1; 4009\}$.

21. Determinaţi $a,b \in Z$, astfel încât M să fie mijlocul segmentelor [AB], unde: $A(1;-5)$, $M(1;-1)$, $B(a+3;\ b-2)$.

Rezolvare:

Reprezentăm punctele într-un sistem de axe ortogonale.



$AM = BM \Rightarrow B(1;3) \Rightarrow a + 3 = 1$ şi $b - 2 = 3 \Rightarrow a = -2$ şi $b = 5$.