



Motto:

„În geometrie nu există drumuri speciale pentru regi.”

Euclid

Partea a II-a GEOMETRIE



A.II. DREAPTA

A.II. 1. PUNCT, DREAPTĂ, PLAN

Punctul, dreapta și planul sunt noțiunile cele mai simple ale geometriei.

Punctele se notează cu litere mari ale alfabetului A, B, C,... (figura II.1), dreptele cu litere mici: a, b, c,... (figura II.2), iar planele cu litere grecești: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (figura II.3).

Exemple:

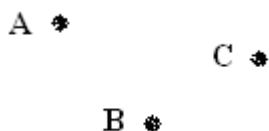


Figura II.1.
Reprezentarea punctelor

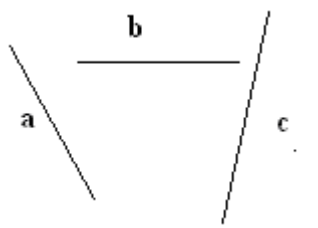


Figura II.2.
Reprezentarea dreptelor

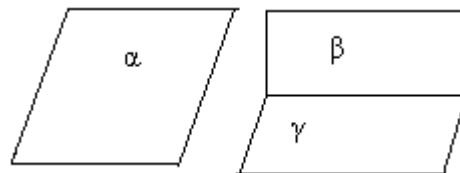


Figura II.3.
Reprezentarea planelor

Observație: Orice figură geometrică este o mulțime de puncte, cu care se pot face operații de reuniune, intersecție, diferență.

A.II. 2. POZIȚIILE RELATIVE ALE PUNCTELOR ȘI DREPTELOR

Două **puncte** pot fi **diferite (distincte)** și se notează $A \neq B$ (figura II.4) sau pot exista **puncte care să coincidă** și se notează $C = D$ (figura II.5).

Exemple:



Figura II.4.
Reprezentarea punctelor diferite $A \neq B$

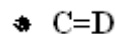


Figura II.5.
Reprezentarea punctelor care coincid $C = D$

Observație: Un punct poate să aparțină ($\in$) sau să nu aparțină ($\notin$) unei drepte. De exemplu, în figura II.7, $E \in d$; $F \notin d$.

Puncte coliniare = trei sau mai multe puncte care aparțin unei drepte. În exemplul din figura II.6 : $A \in a$; $B \in a$; $C \in a$.

Puncte necoliniare = punctele care nu aparțin unei drepte. În figura II.7: $D \in d$; $E \in d$; $F \notin d$.

Exemple:

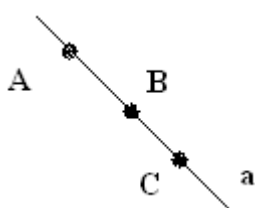


Figura II.6.
Puncte coliniare

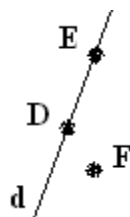


Figura II.7.
Puncte necoliniare

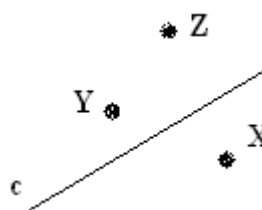


Figura II.8. Puncte de pe aceeași parte (Y și Z) sau de pe o parte și de alta (X și Z, X și Y) a dreptei c

Observație: Printr-un punct pot trece o infinitate de drepte.

Axioma dreptei: prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Două drepte se pot clasifica în:

- drepte coplanare, care la rândul lor se împart în:
 - drepte confundate;
 - drepte concurente (secante);
 - drepte paralele.
- drepte necoplanare.

Două drepte se numesc **coplanare** dacă există un plan care să le conțină pe amândouă. În caz contrar, se numesc **necoplanare**.

Drepte confundate = două drepte care au toate punctele comune.

Drepte concurente = două drepte care se intersectează într-un punct.

În exemplul din figura II.9, $a \cap b = \{O\}$.

Drepte paralele = două drepte situate în același plan, a căror intersecție este mulțimea vidă:

$$e \cap f = \emptyset$$

În exemplul din figura II.10, $e \parallel f$.

Drepte perpendiculare = două drepte situate în același plan, care formează un unghi drept, în cazul nostru în A, adică: $c \cap d = \{A\}$.

În exemplul din figura II.11, $c \perp d$.

Exemple:

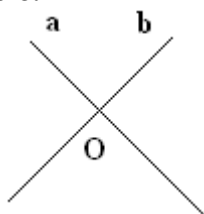


Figura II.9. Reprezentarea a două drepte concurente

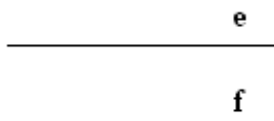


Figura II.10. Reprezentarea a două drepte paralele

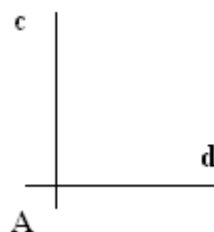


Figura II.11. Reprezentarea a două drepte perpendiculare

Pentru cubul din figura II.12 avem figurate diferite tipuri de drepte:

- a) B^*C^* , D^*C^* , CC^* - drepte concurente;
- b) $AB \parallel CD$, $AA^* \parallel CC^*$ - drepte paralele;
- c) $DD^* \perp A^*D^*$, $DD^* \perp C^*D^*$ - drepte perpendiculare;
- d) AB cu DD^* , A^*B^* cu CC^* , C^*D^* cu BB^* - drepte necoplanare;

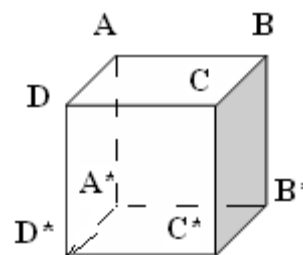


Figura II.12. Reprezentarea unui cub

A.II. 3. DISTANȚA ÎNTRE DOUĂ PUNCTE. SEMIDREAPTĂ. SEMIPLAN

Distanța dintre două puncte se notează cu AB sau $|AB|$ și poate fi determinată cu ajutorul riglei gradate.

Un punct P se află între două puncte A și B pe o dreaptă d (figura II.13), dacă:

- A, B, P sunt puncte coliniare;
- $AP + PB = AB$.

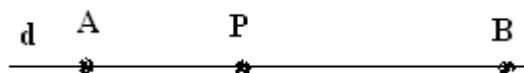


Figura II.13. Poziția punctelor A, P, B pe dreapta d

În cazul din figura II.13 se poate observa că P se află între A și B , ceea ce se poate exprima în mai multe moduri:

- P separă punctele A și B ;
- A și B se află de o parte și de cealaltă a lui P ,
- A și P se află de aceeași parte a lui B ;
- P și B se află de aceeași parte a lui A .

Semidreapta este porțiunea dintr-o dreaptă mărginită la un singur capăt.

Figura II.14 are menirea de a înțelege tipurile de semidrepte.

Suportul semidreptelor – dreapta AB	
Semidreapta deschisă (AB = cu originea în A și căreia îi aparține punctul B ; $A \notin (AB)$.	
Semidreapta deschisă (BA = cu originea în B și căreia îi aparține punctul A ; $B \notin (BA)$.	
Semidreapta închisă [AB = cu originea în A și căreia îi aparține punctul B . [$AB = (AB \cup \{A\})$, deci $A \in [AB)$).	
Semidreapta închisă [BA = cu originea în B și căreia îi aparține punctul A . [$BA = (BA \cup \{B\})$, deci $B \in [BA)$).	
Orice punct al unei drepte determină pe dreapta respectivă două semidrepte opuse . Punctul O se numește originea semidreptelor , iar semidreptele opuse sunt: $(OA$ și $(OB$, respectiv $[OA$ și $[OB$.	

Figura II.14. Tipuri de semidrepte cu definiții

Exemple:

1. Pentru *figura II.15* putem afirma că $[OD]$ și $[OR]$
 - sunt semidrepte închise,
 - au aceeași origine în punctul O ,
 - nu sunt semidrepte opuse, deoarece nu sunt pe aceeași dreaptă suport.

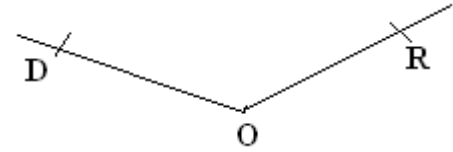


Figura II.15. Despre semidreptele $[OD]$ și $[OR]$

2. Pentru *figura II.16* putem afirma că $[AB]$ și $[AC]$
 - sunt semidrepte închise,
 - au aceeași origine în punctul A ,
 - au aceeași dreaptă suport AB ,
 - nu sunt semidrepte opuse, deoarece conțin aceleași puncte,
 - sunt semidrepte egale, identice, confundate.

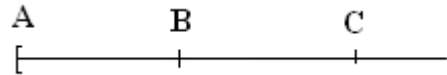


Figura II.16. Despre semidreptele $[AB]$ și $[AC]$

3. Pentru *figura II.17* putem afirma că
 - $[PU]$, $[PF]$, $[PI]$ sunt semidrepte închise, (confundate), identice, $[PU] = [PF] = [PI]$,
 - $[UF]$, $[UI]$ sunt semidrepte închise, identice, $[UF] = [UI]$,
 - $[UF] \neq [PF]$, $[UF] \subset [PF]$,
 - $(UF \cap [PF] = (UF)$ segment.



Figura II.17. Despre semidreptele $[PU]$, $[PF]$, $[PI]$, $[UF]$, $[UI]$

În *figura II.18* avem un plan α , o dreaptă d inclusă în planul α și un punct A al planului α care nu aparține dreptei d .

Se numește **sempiplan deschis** limitat de dreapta d și care conține punctul A mulțimea formată din punctul A și toate punctele care sunt de aceeași parte a dreptei d cu $A = (dA)$.

Sempiplanul închis este mulțimea $(dA \cup d = [dA)$.

Frontiera semiplanului este dreapta d pentru semiplanul deschis $(dA$ sau semiplanul închis $[dA)$.

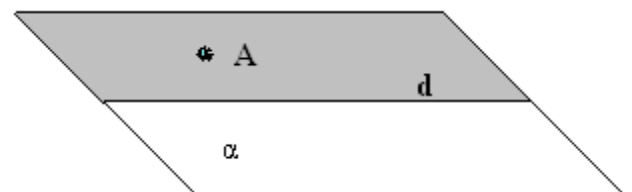


Figura II.18. Punctul A și dreapta d în raport cu planul α

A.II. 4. SEGMENT

Segmentul este porțiunea de dreaptă cuprinsă între două puncte de pe dreaptă.

Segment deschis determinat de punctele A și $B = (AB) =$ mulțimea tuturor punctelor dintre A și B .

Segment închis determinat de punctele A și $B = [AB] = (AB) \cup \{A, B\}$.

Segmente semideschise: $[AB)$ cu $A \in [AB)$ și $B \notin [AB)$, respectiv $(AB]$ cu $A \notin (AB]$ și $B \in (AB]$.

În *figura II.19* se reprezintă un segment de dreaptă.

Prin măsurarea cu rigla gradată, oricărui segment îi corespunde un anumit număr de unități de măsură, numit **lungimea segmentului** - *figura II.20*.

Segmente se măsoară cu rigla gradată. Două sau mai multe **segmente egale** se pot obține și prin aceeași deschidere de compas.

Două segmente care au aceeași lungime se numesc **segmente congruente** și se notează $[AB] \equiv [CD]$ - *figura II.21*, iar în *figura II.22* se prezintă operațiile de adunare și scădere pentru segmente.

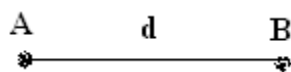
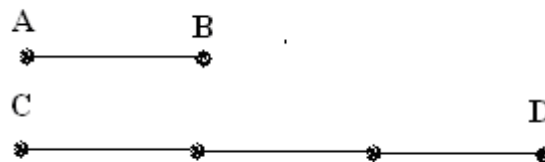


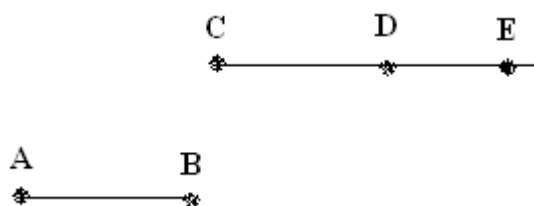
Figura II.19. Reprezentarea unui segment de dreaptă

$$AB = 1 \text{ u. m.} \quad 1 \text{ u. m.} = 2 \text{ cm}$$



$$CD = 3 \text{ u. m.} = 6 \text{ cm}$$

Figura II.20. Exemplu de reprezentare a lungimii segmentului CD



$$[AB] \equiv [CD]$$

Figura II.21.

Reprezentarea a două segmente congruente



Adunare

$$AC = AB + BC$$

Scădere

$$BC = AC - AB$$

$$AB = AC - BC$$

Figura II.22. Exemplu de reprezentare a operațiilor cu segmente

A.II. 5. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Desenați 4 puncte A, B, C, D, astfel încât oricare trei puncte să fie necoliniare. Desenați și numiți dreptele determinate de aceste patru puncte.

Rezolvare: În figura II.23 am desenat cele 4 puncte necoliniare și dreptele care pot fi trasate din ele. Astfel:

- din punctul A am trasat cu albastru dreptele AB, AC, AD;
- din punctul B am trasat cu roșu dreptele BA, BC, BD, cu remarcă că AB coincide cu BA;
- din punctul C am trasat cu verde dreptele CB, CA, CD, cu remarcă că CB coincide cu BC, iar CA cu AC;
- din punctul D am trasat cu negru dreptele DA, DB, DC, cu remarcă că DA coincide cu AC, DB cu BD, iar DC cu CD.

Răspuns: dreptele care se pot trasa fără a fi repetate sunt: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

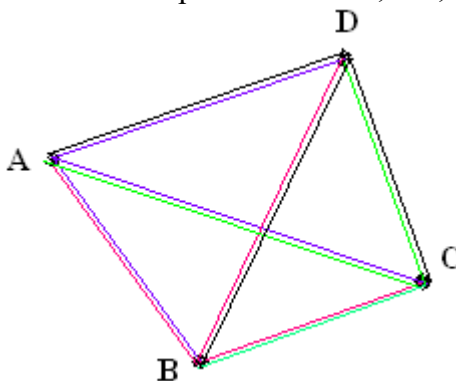


Figura II.23. Cerința problemei 1 (A.II.5)

2. Realizați un desen prin care să determinați cel mai mic număr de puncte din plan care determină exact trei drepte.

Rezolvare: În figura II.24 ilustrăm cerința, care coincide cu construcția unui triunghi, laturile lui fiind incluse în dreptele determinate de cele 3 puncte.

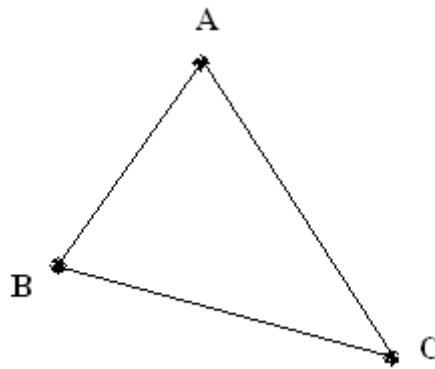


Figura II.24. Cerința problemei 2 (A.II.5)

Răspuns: Prin trei puncte situate în același plan pot trece exact trei drepte.

3. Completați cu notația potrivită:

- a) $(AB) \cup \{A, B\} =$; b) $\{M \mid M \text{ este între } A \text{ și } B\} =$; c) $[AB] \setminus \{B\} =$; d) $[AB] \setminus \{A, B\} =$;
e) $[AB] \cup \{B\} =$.

Răspuns:

- a) $(AB) \cup \{A, B\} = [AB]$; b) $\{M \mid M \text{ este între } A \text{ și } B\} = \{M \mid M \in AB\}$; c) $[AB] \setminus \{B\} = [AB)$;
d) $[AB] \setminus \{A, B\} = (AB)$; e) $[AB] \cup \{B\} = [AB]$.

4. Alegeți răspunsul corect; pot fi mai multe răspunsuri corecte:

- a) $a \cap b = \{A\}$
 A. $A \in a$ B. $A \in a$ și $A \in b$ C. $A \notin a$
 b) Prin două puncte diferite trec:
 A. o singură dreaptă B. două drepte C. o infinitate de drepte
 c) Printr-un punct pot trece:
 A. o singură dreaptă B. două drepte C. o infinitate de drepte
 d) Despre segmentele $[AB]$ și $[CD]$, cu $[AB] \equiv [CD]$ putem spune:
 A. se numesc segmente congruente B. au aceeași lungime C. nu au aceeași lungime
 e) Se știe că $C \in [AB]$. Atunci:
 A. $[AB] = [AC] + [CB]$ B. $[AC] = [AB] - [CB]$ C. $A \in [CB]$

Răspuns:

- a) A, B; b) A; c) A, B, C; d) A, B; e) A, B.

5. Desenați punctele coliniare A, B, C, D, astfel încât $[AC \subset [BD]$.

Răspuns: în figura A.II.25 (5)

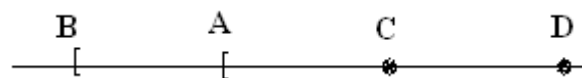


Figura II.25. Cerința problemei 5 (A.II.5)

6. Se dau patru puncte A, B, C, D.

- a) Să se stabilească numărul minim de drepte care pot trece prin punctele A, B, C, D.
 b) Să se stabilească numărul maxim de drepte care pot trece prin punctele A, B, C, D.

Rezolvare:

- a) Indiferent de natura punctelor numărul minim de drepte este 1.
 b) Discuție: - dacă punctele sunt distincte 2 câte 2, avem 6 drepte (vezi problema 1);
 - dacă punctele coincid numărul maxim de drepte este o infinitate.

7. Dublul lungimii unui segment $[AB]$ depășește cu 24 u.m. jumătatea lungimii acestuia. Ce lungime are segmentul $[AB]$?

Rezolvare: $2 \cdot |AB| = 24 + \frac{1}{2} \cdot |AB| \Rightarrow \frac{4 \cdot |AB| - |AB|}{2} = 24 \Rightarrow 3 \cdot |AB| = 48 \Rightarrow |AB| = 16 \text{ u.m.}$

Răspuns: $|AB| = 16 \text{ u.m.}$

8. Fie $X \in (AB)$ și $Y \in (CD)$, astfel încât $[AX] \equiv [CY]$ și $[XB] \equiv [YD]$. Să se demonstreze că $[AB] \equiv [CD]$, având în vedere că nu avem la dispoziție riglă și nici compas.

Rezolvare: în figura A.II.26 (8) ilustrăm grafic datele problemei.

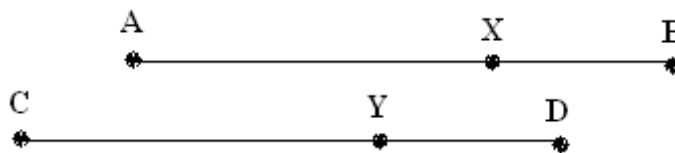


Figura II.26. Datele problemei 8 (A.II.5)

Știm că: $[AB] = [AX] + [XB]$ și $[CD] = [CY] + [YD]$

Din datele problemei $\Rightarrow [AB] = [AX] + [XB] = [CY] + [YD] = [CD]$.

Răspuns: $[AB] \equiv [CD]$.

9. Se dau punctele A, B, C, O. Știind că $B \in [AC]$, $[BO] \equiv [OC]$, $|AB| = 5 \text{ cm}$, $|AC| = 9 \text{ cm}$, Să se calculeze $|AO|$.

Rezolvare: în figura A.II.27 (9) ilustrăm grafic datele problemei.



Figura II.27. Datele problemei 9 (A.II.5)

$$|BC| = |AC| - |AB| = 9 - 5 = 4 \text{ cm} \text{ și } |BO| = |BC| : 2 = 4 : 2 = 2 \text{ cm}$$

Rezultă: $|AO| = |AB| + |BO| = 5 + 2 = 7 \text{ cm}$

Răspuns: $|AO| = 7 \text{ cm}$

10. Fie A, B, C trei puncte coliniare cu $|AB| = 3 \text{ cm} = \frac{1}{3}|AC|$, iar O și Q mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[BC]$. Calculați $|OQ|$.

Rezolvare: în figura A.II.28 (10) ilustrăm grafic datele problemei.



Figura II.28. Datele problemei 10 (A.II.5)

$$\text{Din } |AB| = 3 \text{ cm} = \frac{1}{3}|AC| \Rightarrow |AC| = 9 \text{ cm} \Rightarrow |BC| = |AC| - |AB| = 9 - 3 = 6 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$|OQ| = |OB| + |BQ| = \frac{|AB|}{2} + \frac{|BC|}{2} = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ cm}$$

Răspuns: $|OQ| = 4,5 \text{ cm}$.

B.II. UNGHIURI

B.II.1. UNGHI. UNGHI NUL. UNGHI ALUNGIT

Unghiul este reuniunea a două semidrepte închise care au aceeași origine. Cele două semidrepte se numesc *laturile unghiului*, iar originea comună se numește *vârful unghiului*.

Dacă cele două semidrepte sunt $[AB$ și $[AC$, unghiul va fi notat $\widehat{BAC}$ sau $\widehat{CAB}$ sau $\widehat{A}$ (figura II.29).

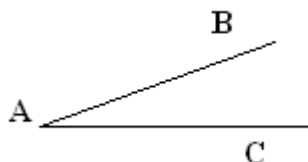


Figura II.29. Reprezentarea grafică a unghiului $\widehat{BAC}$ sau $\widehat{CAB}$ sau $\widehat{A}$.

Unghi nul = unghiul ale cărui laturi coincid (figura II.30).



Figura II.30. Reprezentarea grafică a unghiului nul $\widehat{CAB} (0^\circ)$
 $[AB = [AC$ (semidreptele coincid)

Unghi alungit = unghiul ale cărui laturi sunt semidrepte opuse (figura II.31).

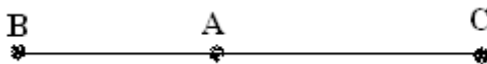


Figura II.31. Reprezentarea grafică a unghiului alungit $\widehat{BAC} (180^\circ)$
 $A \in BC$ și $[AB = [AC$ (semidrepte opuse)

Unghi propriu = unghiul care nu este nici nul, nici alungit.

Unghi impropriu = unghiul care este nul sau alungit.

Observație: Dacă în enunțul unei probleme nu se precizează natura unghiului, atunci presupunem că este unghi propriu.

Dacă $\widehat{BAC}$ este un unghi propriu, intersecția semiplanelor deschise $(AB, C$ și $(AC, B$, adică a semiplanului limitat de dreapta AB și care conține punctul C cu semiplanul limitat de dreapta AC și care conține punctul B , se numește **interiorul unghiului** $\widehat{BAC}$ (figura II.32 – porțiunea punctată). Interiorul unghiului $\widehat{BAC}$ se notează $\text{Int } \widehat{BAC}$. Un punct care nu aparține unghiului și nici interiorului acestuia se numește **punct exterior unghiului**.

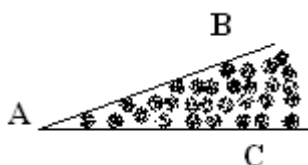


Figura II.32. Reprezentarea grafică a interiorului unghiului $\widehat{BAC}$

B.II.2. MĂSURAREA UNGHIURILOR. TIPURI DE UNGHIURI. OPERAȚII CU MĂSURI DE UNGHIURI

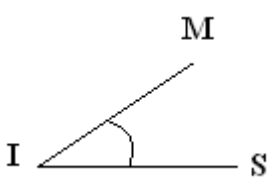
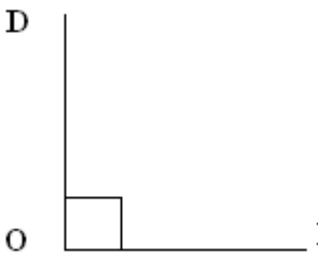
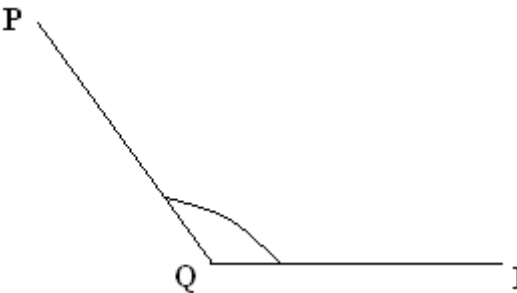
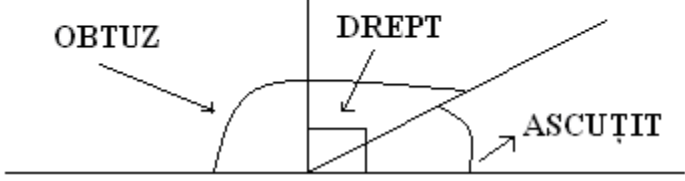
Unitatea de măsură a unghiurilor este **gradul sexagesimal** ($^{\circ}$). **Măsura unghiului** este numărul de grade ale unui unghi, iar **raportorul** este instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară unghiul.

Submultipli gradului sunt: **minutul** ($'$) și **secunda** ($''$).

$$1^{\circ} = 60', 1' = 60'' \text{ și } 1^{\circ} = 3600''.$$

$$\text{Notăm măsura unghiului } \hat{AOB} = m(\hat{AOB})$$

Tipuri de unghiuri

 Figura II.33. Unghi ascuțit $m(\hat{MIS}) < 90^{\circ}$	 Figura II.34. Unghi drept $m(\hat{DOR}) = 90^{\circ}$	 Figura II.35. Unghi obtuz $m(\hat{PQL}) > 90^{\circ}$
 Figura II.36. Tipurile de unghiuri: ascuțit, drept, obtuz		

Operații cu măsuri de unghiuri

Un unghi exprimat în grade, minute și secunde are măsura: $m(\alpha^{\circ}) = a^{\circ}b'c'' = a^{\circ} + b' + c''$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Exemple:

- $607' = 10 \cdot 60' + 7' = 10^{\circ}7'$
- $40,14^{\circ} = 40^{\circ} + 0,14^{\circ} = 40^{\circ} + (60 \cdot 0,14)' = 40^{\circ} + 8,4' = 40^{\circ} + 8' + 0,4' = 40^{\circ} + 8' + (60 \cdot 0,4)'' = 40^{\circ} + 8' + 24'' = 40^{\circ}8'24''$

Adunarea / Scăderea

Unghiurile exprimate în grade, minute și secunde se adună/scad pe componente de același fel, adică grade cu grade, minute cu minute, secunde cu secunde.

Exemple:

- $27^{\circ}32' + 15^{\circ}47' - 30^{\circ}24' = 12^{\circ}55'$
- $170^{\circ} - 72^{\circ}41'14'' + 19^{\circ}17'53'' = 97^{\circ}18'46'' + 19^{\circ}17'53'' = 116^{\circ}36'39''$

Înmulțirea măsurii unui unghi cu un număr natural

Exemplu: $13^{\circ}29'47'' \cdot 2 = 26^{\circ}58'94'' = 26^{\circ}59'34''$

Împărțirea măsurii unui unghi cu un număr natural

Exemplu: $46^{\circ}20'30'' : 5 = 45^{\circ}80'30'' : 5 = 9^{\circ}16'6''$

B.II.3. UNGHIURI CONGRUENTE. BISECTOAREA UNUI UNGHI

Două unghiuri care au aceeași măsură se numesc **unghiuri congruente** (figura II.37). Orice două unghiuri nule sunt congruente. Orice unghiuri alungite sunt congruente.

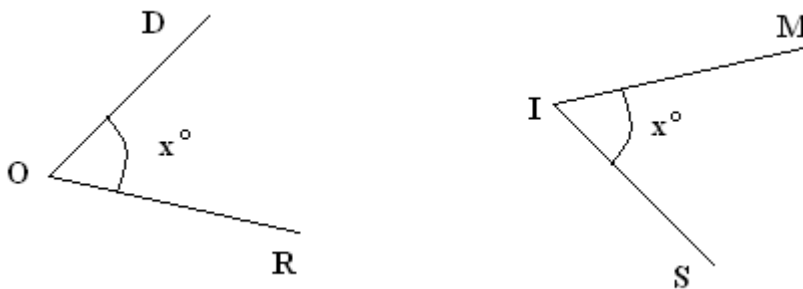


Figura II.37. Unghiuri congruente: $\hat{DOR} \equiv \hat{MIS}$ sau $m(\hat{DOR}) = m(\hat{MIS}) = x^{\circ}$

Construcția unui unghi congruent în raport cu un unghi dat se poate face în două moduri:

- cu raportorul,
- cu rigla și compasul.

Bisectoarea unui unghi este semidreapta interioară unghiului, cu originea în vârful unghiului ce determină cu laturile unghiului două unghiuri congruente (figura II.38).

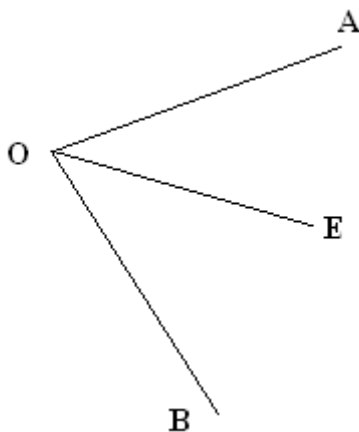


Figura II.38. Bisectoarea unui unghi

($\hat{OE}$ = bisectoarea $\hat{AOB}$, deoarece $\hat{OE} \subset \text{Int } \hat{AOB}$ și $\hat{AOE} \equiv \hat{EOB}$)

Construcția bisectoarei se poate face:

- cu ajutorul raportorului;
- cu ajutorul compasului.

Exemplu: Se știe că $m(\hat{ABC}) = 94^{\circ}$, iar [BM este bisectoarea unghiului $\hat{ABC}$.

Rezultă că $m(\hat{ABM}) = m(\hat{CBM}) = 94^{\circ} : 2 = 47^{\circ}$.

B.II.4. UNGHIURI ADIACENTE. UNGHIURI COMPLEMENTARE. UNGHIURI SUPLEMENTARE

Două **unghiuri** se numesc **adiacente**, dacă au o latură comună și interioarele disjuncte. Două mulțimi sunt disjuncte, dacă nu au elemente comune (*figura II.39*). Deci, două unghiuri adiacente se pot recunoaște prin faptul că au vârfurile comune, o latură comună, iar celelalte două laturi de o parte și de alta a laturii comune.

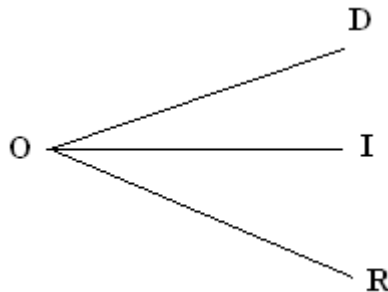


Figura II.39. Unghiuri adiacente $\overset{\wedge}{DOI} \cap \overset{\wedge}{ROI} = [OI]$ și $\overset{\wedge}{Int DOI} \cap \overset{\wedge}{Int ROI} = \emptyset$

Observații:

- Bisectoarele a două unghiuri adiacente de măsură a° și b° formează între ele un unghi cu măsura $\frac{a^\circ + b^\circ}{2}$;
- Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează un unghi drept.

Exemple de unghiuri neadiacente (*figura II.40 – a, b, c*).

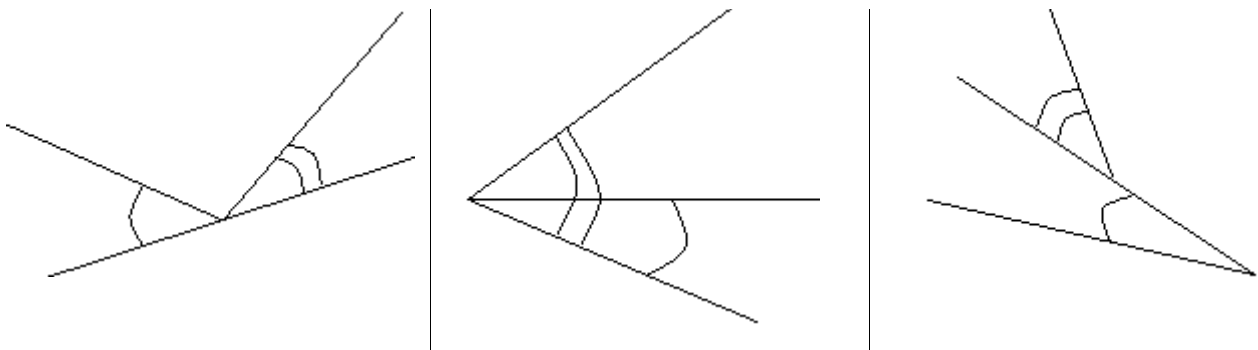


Figura II.40. Exemple de unghiuri neadiacente

Dacă suma măsurilor a două unghiuri este de 90° , atunci ele se numesc **unghiuri complementare**, fiecare fiind un complement al celuilalt.

Exemplu: Complementul unghiului cu măsură de 79° este unghiul cu măsură $90^\circ - 79^\circ = 11^\circ$.

Dacă suma măsurilor a două unghiuri este de 180° , atunci ele se numesc **unghiuri suplementare**, fiecare fiind un suplement al celuilalt.

Exemplu: Suplementul unghiului cu măsură de $33^\circ 44'55''$ este unghiul cu măsură $180^\circ - 33^\circ 44'55'' = 146^\circ 15'5''$.

B.II.5. UNGHIURI OPUSE LA VÂRF

Două **unghiuri** se numesc **opuse la vârf**, dacă laturile lor sunt perechi de semidrepte opuse. Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente (figura II.41).

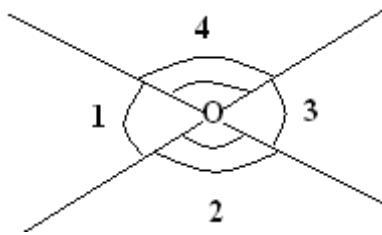


Figura II.41. Unghiuri opuse la vârf $\hat{O}_1 \equiv \hat{O}_3$; $\hat{O}_2 \equiv \hat{O}_4$

B.II.6. UNGHIURI ÎN JURUL UNUI PUNCT

Numim **unghiuri în jurul unui punct** O (figura II.42) un număr finit de unghiuri având proprietățile:

- toate au același vârf (punctul O);
- orice punct al planului ce nu aparține nici uneia dintre laturile lor aparține interiorului unui singur unghi).

Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este de 360°

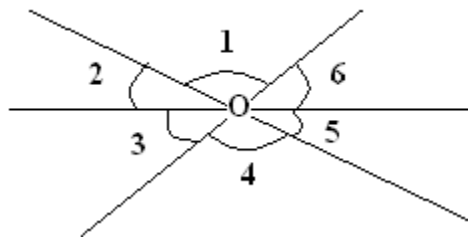


Figura II.42. Unghiuri în jurul unui punct O: $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5 + \hat{O}_6 = 360^\circ$

Exemplu: Să se calculeze măsurile unghiurilor din figura II.43.

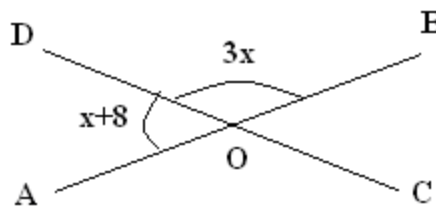


Figura II.43. Figura exemplului de rezolvat

$\hat{AOD} \equiv \hat{COB}$ și $\hat{AOC} \equiv \hat{DOB}$ ca unghiuri opuse la vârf, rezultă: $\hat{AOD} + \hat{COB} + \hat{AOC} + \hat{DOB} = 360^\circ$
 $2 \cdot (x + 8) + 2 \cdot 3x = 360^\circ \Rightarrow x = 43^\circ \Rightarrow$

$$m\left(\hat{AOD}\right) = m\left(\hat{COB}\right) = 51^\circ \text{ și}$$

$$m\left(\hat{AOC}\right) = m\left(\hat{DOB}\right) = 129^\circ.$$

B.II.7. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Care sunt perechile de unghiuri congruente?

$$m(\hat{AOB}) = 36^\circ, m(\hat{BOC}) = 89^\circ 60', m(\hat{COD}) = 124^\circ 59'60'',$$

$$m(\hat{DOE}) = 89^\circ 58'120'', m(\hat{EOF}) = 35^\circ 69'60'', m(\hat{FOG}) = 122^\circ 117'180''.$$

Rezolvare: $m(\hat{AOB}) = 36^\circ, m(\hat{BOC}) = 89^\circ 60' = 90^\circ, m(\hat{COD}) = 124^\circ 59'60'' = 125^\circ,$

$$m(\hat{DOE}) = 89^\circ 58'120'' = 90^\circ, m(\hat{EOF}) = 35^\circ 69'60'' = 36^\circ 10',$$

$$m(\hat{FOG}) = 122^\circ 117'180'' = 124^\circ. \text{ Se observă că: } m(\hat{BOC}) = m(\hat{DOE}) = 90^\circ.$$

2. Efectuați:

Rezolvare:

a) $25^\circ 13'28'' +$ $57^\circ 34'15''$ $82^\circ 47'43''$	b) $104^\circ 13'19'' -$ $73^\circ 25'26''$ $30^\circ 47'53''$	c) $23^\circ 14'28'' \times$ 2 $46^\circ 28'56''$	d) $124^\circ 28'36'' :$ 4 $31^\circ 7'9''$
--	---	--	--

3. Știind că $\left(OC \subset \text{Int}(\hat{AOB}), m(\hat{AOB}) = 114^\circ \text{ și } m(\hat{BOC}) = 34^\circ, \text{ aflați și } m(\hat{AOC})\right).$

Rezolvare: $m(\hat{AOC}) = m(\hat{AOB}) - m(\hat{BOC}) = 114^\circ - 34^\circ = 80^\circ.$

4. Aflați măsurile unghiurilor din figura II.44.

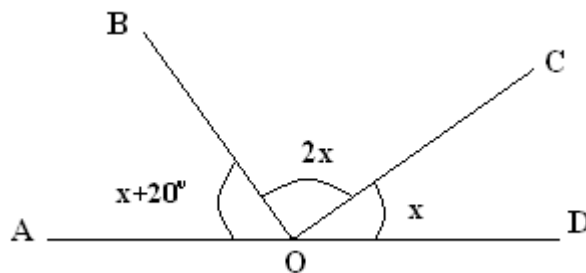


Figura II.44. Cerința problemei 4 (B.II.7)

Rezolvare: $x + 20^\circ + 2x + x = 180^\circ \Rightarrow 4x = 160^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$

Unghiurile vor avea măsurile: $m(\hat{AOB}) = 60^\circ, m(\hat{BOC}) = 80^\circ, m(\hat{COD}) = 40^\circ.$

5. Aflați măsura unghiului a cărui sumă dintre complementul și suplementul său este de 120° .

Rezolvare: Considerând U, unghiul căutat avem:

$$(90^\circ - U) + (180^\circ - U) = 120^\circ \Rightarrow 270^\circ - 2U = 120^\circ \Rightarrow 2U = 270^\circ - 120^\circ \Rightarrow U = 75^\circ.$$

6. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $1/3$. Determinați măsurile celor două unghiuri.

Rezolvare: Fie a și b unghiurile căutate. Avem:

$$\begin{cases} a + b = 90^\circ \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 90 \\ b = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 90^\circ \\ b = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 22^\circ 30' \\ b = 3a = 3 \cdot 22^\circ 30' = 67^\circ 30' \end{cases}$$

Proba: $a + b = 22^\circ 30' + 67^\circ 30' = 90^\circ$

7. Știind că un unghi are măsura de 120° , să se construiască un unghi adiacent și suplementar acestuia.

Rezolvare: $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (figura II.45).

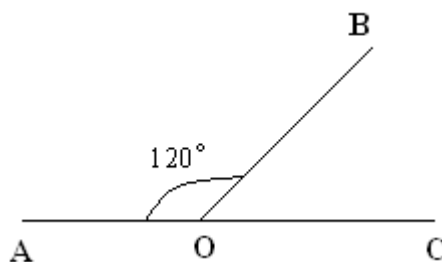


Figura II.45. Cerința problemei 7 (B.II.7)

8. Diferența dintre două unghiuri neadiacente care au vârful comun și o latură comună este de 80° . Calculați măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri.

Rezolvare: Fie a° și b° cele două unghiuri neadiacente (figura II.46).

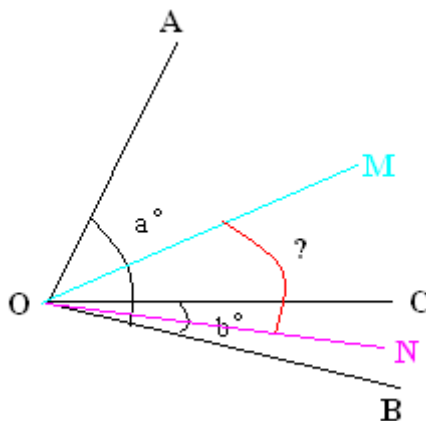


Figura II.46. Cerința problemei 8 (B.II.7)

Din datele problemei avem:

$$m(\hat{AOC}) = a^\circ, \text{ iar } m(\hat{AOM}) = m(\hat{MOC}) = a^\circ / 2$$

$$m(\hat{BOC}) = b^\circ, \text{ iar } m(\hat{CON}) = m(\hat{BON}) = b^\circ / 2$$

$$a - b = 80^\circ$$

$$\text{Unghiul căutat este: } m(\hat{MON}) = \frac{a^\circ}{2} - \frac{b^\circ}{2} = 40^\circ.$$

9. Unghiurile $\hat{AOB}$, $\hat{BOC}$, $\hat{AOC}$ sunt în jurul unui punct. Dacă $m(\hat{AOB}) = 2 m(\hat{BOC})$, $m(\hat{AOB}) = m(\hat{AOC}) - 60^\circ$, să se calculeze măsurile celor trei unghiuri.

Rezolvare: Din datele problemei știm că: $m(\hat{AOB}) + m(\hat{BOC}) + m(\hat{AOC}) = 360^\circ$. Rezultă:

$$2 m(\hat{BOC}) + m(\hat{BOC}) + m(\hat{AOB}) + 60^\circ = 360^\circ$$

$$2 m(\hat{BOC}) + m(\hat{BOC}) + 2 m(\hat{BOC}) + 60^\circ = 360^\circ$$

$$5 m(\hat{BOC}) = 300^\circ, \text{ deci } m(\hat{BOC}) = 60^\circ, m(\hat{AOB}) = 2 m(\hat{BOC}) = 120^\circ,$$

$$m(\hat{AOC}) = m(\hat{AOB}) + 60^\circ = 180^\circ.$$

10. Se dau două unghiuri adiacente $\hat{AOB}$, $\hat{BOC}$, cu măsurile de 90° , respectiv 130° .

Semidreptele $[OM]$, $[ON]$ sunt bisectoarele unghiurilor respective. Să se afle $m(\hat{MON})$ și $m(\hat{AOC})$.

Rezolvare: Construim figura II.47.

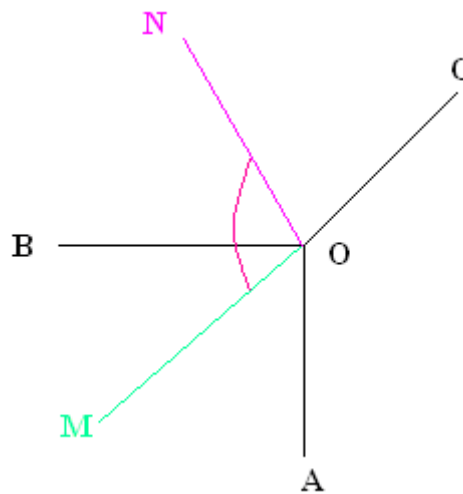


Figura II.47. Cerința problemei 10 (B.II.7)

Avem:

$$m(\hat{AOB}) = 90^\circ; m(\hat{AOM}) = m(\hat{BOM}) = 45^\circ; m(\hat{BOC}) = 130^\circ; m(\hat{COM}) = m(\hat{BON}) = 65^\circ.$$

$$m(\hat{MON}) = m(\hat{BOM}) + m(\hat{BON}) = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$$

$$m(\hat{AOC}) = 360^\circ - m(\hat{AOB}) - m(\hat{BOC}) = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ.$$

C.II. TRIUNGHIUL

C.II.1. TRIUNGHIUL

Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C se numește **triunghi** determinat de punctele A, B și C mulțimea $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ (figura II.48). Se notează $\triangle ABC$; punctele A, B și C se numesc **vârfurile triunghiului**, segmentele $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ se numesc **laturile triunghiului**, iar unghiurile $\angle ABC$, $\angle CAB$, $\angle BCA$ se numesc **unghiurile triunghiului**.

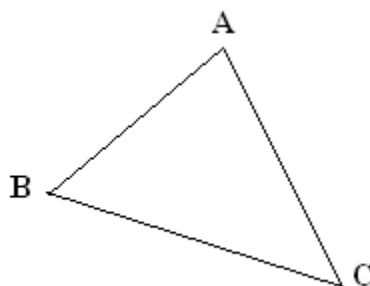


Figura II.48. $\triangle ABC$ și elementele sale

Perimetrul unui triunghi, notat cu P, se definește ca suma lungimilor laturilor triunghiului respectiv. În cazul din figura II.48 perimetrul $\triangle ABC$ este dat de relația: $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$.

Semiperimetrul unui triunghi, notat cu p, se definește ca semisuma lungimilor laturilor triunghiului respectiv. În cazul din figura II.48 semiperimetrul $\triangle ABC$ este dat de relația:

$$p_{\triangle ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

Se numește **unghi exterior unui triunghi** unghiul adiacent și suplementar cu un unghi al triunghiului – figura II.49.

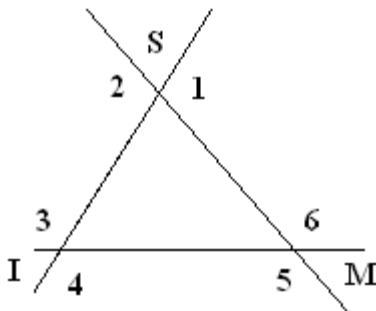


Figura II.49. $\triangle SIM$ și unghiurile exterioare ale acestuia 1,2,3,4,5,6

C.II.2. CONSTRUCȚIA TRIUNGHIURILOR

Există următoarele situații în care se pot construi triunghiuri, dacă se cunosc:

- două laturi și unghiul determinat de ele;
- o latură și unghiurile alăturate ei;
- cele trei laturi.

Triunghiurile se pot construi utilizând următoarele instrumente:

- rigla gradată;
- raportor;
- compas;
- echer.

C.II.3. TIPURI DE TRIUNGHIURI

Clasificarea triunghiurilor se poate face după mai multe criterii:

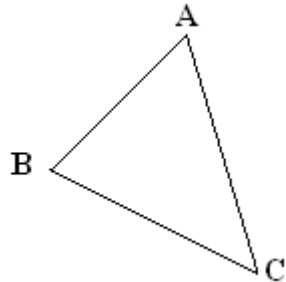
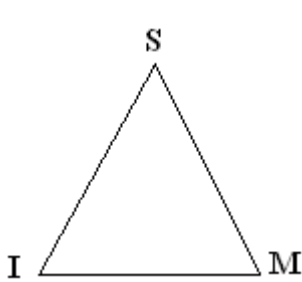
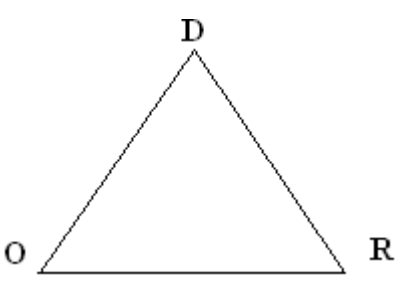
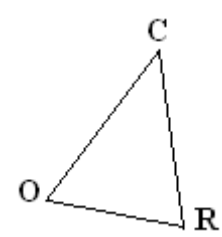
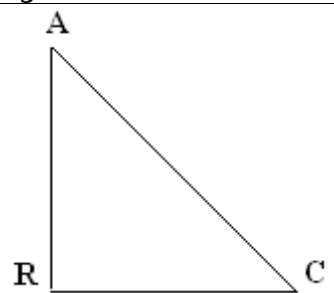
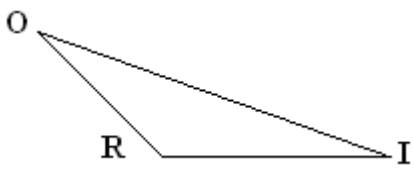
1. după laturi:

- **triunghiul scalen** sau **oarecare** = triunghiul cu toate laturile de lungimi diferite.
- **triunghi isoscel** = triunghiul cu 2 laturi congruente; a treia latură se numește bază.
- **triunghi echilateral** = triunghiul cu toate laturile congruente.

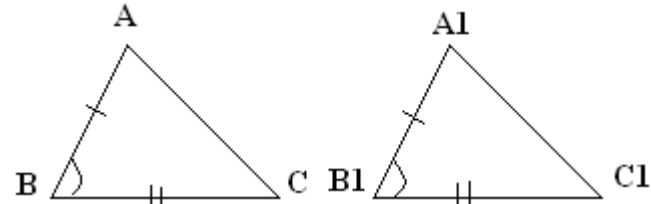
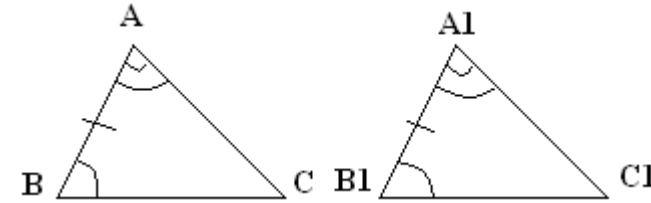
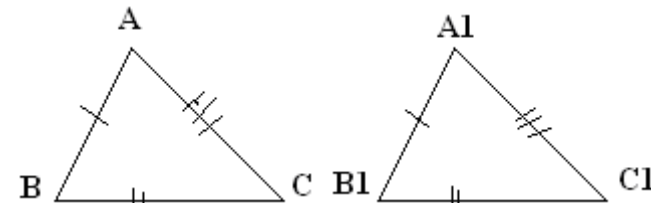
2. după unghiuri:

- **triunghi ascuțitunghic** = triunghiul cu toate unghiurile ascuțite.
- **triunghi dreptunghic** = triunghiul cu un unghi drept; latura care se opune unghiului drept se numește ipotenuză, iar celelalte catete.
- **triunghi obtuzunghic** = triunghiul care are un unghi obtuz.

În figurile II.50 ÷ II.55 sunt prezentate tipurile de triunghiuri prezentate anterior.

		
Figura II.50. $\triangle ABC$ scalen	Figura II.51. $\triangle SIM$ isoscel	Figura II.52. $\triangle DOR$ echilateral
		
Figura II.53. $\triangle COR$ ascuțitunghic	Figura II.54. $\triangle ARC$ dreptunghic	Figura II.55. $\triangle ORI$ obtuzunghic

C.II.4. CAZURILE DE CONGRUENȚĂ ALE TRIUNGHIURILOR

Cazul LUL de congruență (latură-unghi - latură): Două triunghiuri care au două laturi și unghiul determinat de ele respectiv congruente sunt congruente .	
Cazul ULU de congruență (unghi-latură-unghi): Două triunghiuri care au o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente sunt congruente .	
Cazul LLL de congruență (latură-latură-latură): Două triunghiuri care au laturile respectiv congruente sunt congruente .	

C.II.5. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Stabiliți natura $\triangle MNP$ știind că:

- a) $m(\hat{M}) = 110^\circ$;
b) $MN = 4\text{cm}$, $MP = 4\text{cm}$ și $m(\hat{M}) = 90^\circ$;
c) $MN = 3,2\text{cm}$, $NP = 0,32\text{dm}$, $MP = 32\text{mm}$.

Rezolvare:

- a) $\triangle MNP$ - obtuzunghic;
b) $MN = MP = 4\text{cm}$ și $m(\hat{M}) = 90^\circ$, rezultă că $\triangle MNP$ - dreptunghic isoscel;
c) $MN = 3,2\text{cm}$, $NP = 0,32\text{dm} = 3,2\text{cm}$, $MP = 32\text{mm} = 3,2\text{cm}$, rezultă că $MN = NP = MP$, rezultă că $\triangle MNP$ - echilateral.

2. Să se rezolve următoarele situații:

- a) Fie $\triangle MNP$ echilateral. Să se calculeze latura triunghiului, știind că perimetrul este de 24,6 cm.
b) Fie $\triangle MNP$ echilateral. Să se calculeze perimetrul și semiperimetrul triunghiului, știind că latura este de 5,2 cm
c) Calculați perimetrul triunghiului isoscel $\triangle ABC$, știind că $AB = AC = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$.
d) Indicați vârful și baza triunghiului isoscel ABC , știind că: $[AB] \equiv [AC]$.

Rezolvare:

- a) Dacă $\triangle MNP$ este echilateral, rezultă că $MN = MP = NP = L$.
Cum $P = L + L + L = 24,6\text{cm} \Rightarrow 3L = 24,6\text{cm} \Rightarrow L = 8,2\text{cm}$
b) Dacă $\triangle MNP$ este echilateral, rezultă că $MN = MP = NP = L = 5,2\text{cm}$, rezultă că:
 $P_{\triangle MNP} = 3L = 3 \cdot 5,2 = 15,6\text{cm}$, iar $p_{\triangle MNP} = \frac{3L}{2} = 7,8\text{cm}$.
c) $P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 5 + 5 + 6 = 16\text{cm}$
d) vârful este în A, iar baza este $[AC]$.

3. Se consideră punctele coliniare A, O, B, respectiv C, O, D, astfel încât $[AO] \equiv [BO]$,

$[CO] \equiv [DO]$. Demonstrați că:

- a) $[AC] \equiv [BD]$;
b) $[AD] \equiv [BC]$;
c) $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$;
d) $\triangle ADB \equiv \triangle BCA$.

Demonstrație:

- a) Se realizează desenul conform cerințelor (figura II.56); se unesc punctele A și B cu C și D.

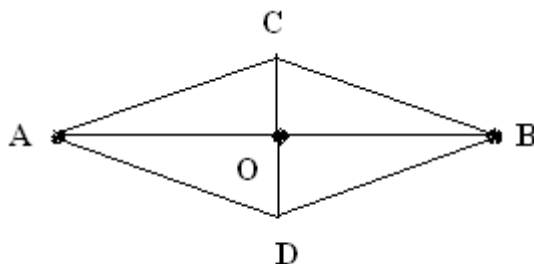


Figura II.56. Cerința problemei 3 (C.II.5)

$$\text{a) } \triangle AOC \text{ și } \triangle BOD \Rightarrow \begin{cases} [AO] \equiv [BO] \\ \hat{} \quad \hat{} \\ AOC \equiv BOD \Rightarrow (\text{LUL}) \triangle AOC \equiv \triangle BOD \\ [CO] \equiv [DO] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [AC] \equiv [BD] \\ \hat{} \quad \hat{} \\ ACO \equiv BDO \\ \hat{} \quad \hat{} \\ CAO \equiv DBO \end{cases}$$

b) În mod similar, considerăm:

$$\triangle AOD \text{ și } \triangle BOC \Rightarrow \begin{cases} [AO] \equiv [BO] \\ \hat{} \quad \hat{} \\ AOD \equiv BOC \Rightarrow (\text{LUL}) \triangle AOD \equiv \triangle BOC \\ [CO] \equiv [DO] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [AD] \equiv [BC] \\ \hat{} \quad \hat{} \\ ADO \equiv BCO \\ \hat{} \quad \hat{} \\ CBO \equiv DAO \end{cases}$$

$$\text{c) Din triunghiurile } \triangle ACD \text{ și } \triangle BDC, \text{ rezultă: } \begin{cases} [CD] - \text{comună} \\ [AC] \equiv [BD] \\ [AD] \equiv [BC] \end{cases} \Rightarrow \text{LLL} \Rightarrow \triangle ACD \equiv \triangle BDC$$

$$\text{d) Din triunghiurile } \triangle ADB \text{ și } \triangle BCA, \text{ rezultă: } \begin{cases} [AB] - \text{comună} \\ [AC] \equiv [BD] \\ [AD] \equiv [BC] \end{cases} \Rightarrow \text{LLL} \Rightarrow \triangle ADB \equiv \triangle BCA$$

4. Se dă desenul din *figura II.57*. Știind că $[OM]$ este bisectoarea unghiului $\hat{AOB}$, demonstrați că $[AM] \equiv [MB]$.

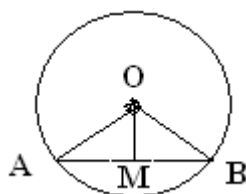


Figura II.57. Cerința problemei 4 (C.II.5)

Demonstrație:

$$\text{Din triunghiurile } \triangle AOM \text{ și } \triangle BOM, \text{ rezultă: } \begin{cases} [OM] - \text{comună} \\ [AO] \equiv [BO] \\ \hat{} \quad \hat{} \\ AOM \equiv BOM \end{cases} \Rightarrow \text{LUL} \Rightarrow \triangle AOM \equiv \triangle BOM,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [AM] \equiv [BM] \\ \hat{} \quad \hat{} \\ MAO \equiv MBO \\ \hat{} \quad \hat{} \\ AMO \equiv BMO \end{cases}$$

5. Se consideră un triunghi isoscel $\triangle ABC$ cu $[AB] \equiv [AC]$ și punctele $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$, încât $[AD] \equiv [DB]$ și $[AE] \equiv [EC]$. Arătați că $[BE] \equiv [CD]$.

Demonstrație: *Figura II.58 este figura după care voi rezolva problema.*

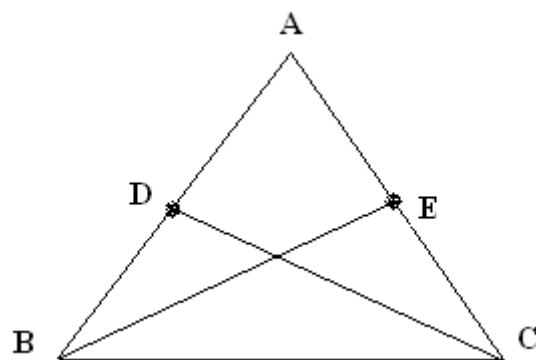


Figura II.58. Desenul problemei 5 (C.II.5)

Din triunghiurile $\triangle CDB$ și $\triangle BEC$, rezultă:

$$\begin{cases} [DB] \equiv [EC] \\ [BC] - \text{comună} \Rightarrow LLL \Rightarrow \triangle CDB \equiv \triangle BEC \\ \hat{C}BD \equiv \hat{B}CE \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [BE] \equiv [CD] \\ \hat{C}DB \equiv \hat{B}EC \\ \hat{C}BD \equiv \hat{B}CE \end{cases}$$

6. În figura II.59 avem: $[OA] \equiv [OB]$ și $\hat{AOC} \equiv \hat{BOC}$. Demonstrați că:

- a) $\hat{OCA} \equiv \hat{OCB}$
b) $\triangle CAB$ este isoscel.

Demonstrație:

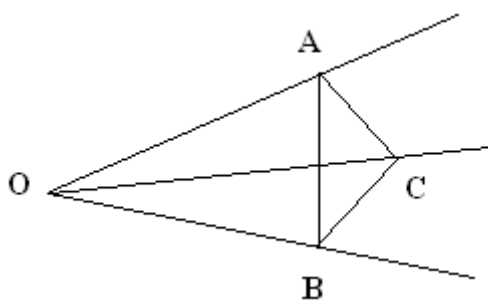


Figura II.59. Desenul problemei 6 (C.II.5)

a) Din triunghiurile $\triangle AOC$ și $\triangle BOC$, rezultă:

$$\begin{cases} [OA] \equiv [OB] \\ \hat{AOC} \equiv \hat{BOC} \\ [OC] - \text{comună} \end{cases} \Rightarrow LUL \Rightarrow \triangle AOC \equiv \triangle BOC \Rightarrow \begin{cases} \hat{OCA} \equiv \hat{OCB} \\ \hat{OAC} \equiv \hat{OBC} \\ [AC] \equiv [BC] \end{cases}$$

b) $\triangle CAB$ este isoscel, deoarece $[AC] \equiv [BC]$.

7. În figura II.60 avem: $[OA] \equiv [OC]$ și $[OB] \equiv [OD]$. Demonstrați că:

- a) $\widehat{OAD} \equiv \widehat{OCB}$;
b) $\triangle AEB \equiv \triangle CED$;
c) $[OE]$ este bisectoarea $\widehat{AOC}$.

Demonstrație:

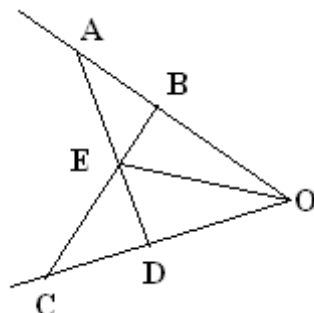


Figura II.60. Desenul problemei 7 (C.II.5)

a) Din triunghiurile $\triangle AOD$ și $\triangle COB$, rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} [OA] \equiv [OC] \\ \widehat{O} - \text{unghi comun} \Rightarrow \text{LUL} \Rightarrow \triangle AOD \equiv \triangle COB \\ [OD] \equiv [OB] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{OAD} \equiv \widehat{OCB} \\ [AD] \equiv [CB] \\ \widehat{ADO} \equiv \widehat{CBO} \end{array} \right.$$

b) Din triunghiurile $\triangle AEB$ și $\triangle CED$, rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{EAB} \equiv \widehat{ECD} \\ [AE] \equiv [CE] \\ [AB] \equiv [CD] \end{array} \right. \Rightarrow \text{LUL} \Rightarrow \triangle AEB \equiv \triangle CED \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [BE] \equiv [EC] \\ \widehat{ABE} \equiv \widehat{CDE} \\ \widehat{AEB} \equiv \widehat{CED} \end{array} \right.$$

c) $\widehat{AOC} = \widehat{AOE} + \widehat{EOC}$

Din triunghiurile $\triangle AOE$ și $\triangle EOC$, rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} [OA] \equiv [OC] \\ [AE] \equiv [EC] \\ [OE] - \text{comună} \end{array} \right. \Rightarrow \text{LLL} \Rightarrow \triangle AOE \equiv \triangle EOC \Rightarrow \widehat{AOE} \equiv \widehat{EOC} \Rightarrow [OE] \text{ este bisectoarea } \widehat{AOC}.$$

8. În figura II.61 avem: $\triangle ABC$ și $\triangle DBC$ sunt isoscele de bază $[BC]$. Demonstrați că:

- a) $\widehat{DBA} \equiv \widehat{DCA}$;
b) $[AD]$ este bisectoarea $\widehat{BDC}$.

Demonstrație:

- a) Din $\triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow [AB] \equiv [AC]$
Din $\triangle DBC$ isoscel $\Rightarrow [BD] \equiv [CD]$

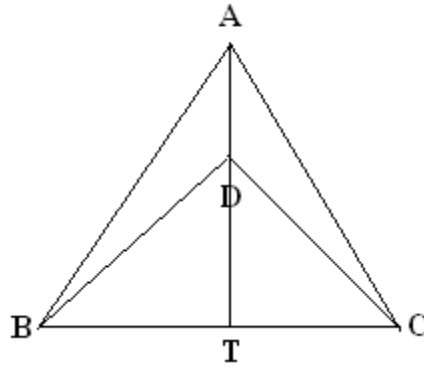


Figura II.61. Desenul problemei 8 (C.II.5)

Din triunghiurile $\triangle ABD$ și $\triangle ACD$, rezultă:

$$\begin{cases} [AB] = [AC] \\ [AD] - \text{comună} \Rightarrow \text{LLL} \Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle ACD \Rightarrow \\ [BD] = [CD] \end{cases} \begin{cases} \hat{DBA} \equiv \hat{DCA} \\ \hat{ADB} \equiv \hat{ADC} \\ \hat{BAD} \equiv \hat{CAD} \end{cases}$$

$$\text{b) } m(\hat{BDT}) = 180^\circ - m(\hat{BDA})$$

$$m(\hat{CDT}) = 180^\circ - m(\hat{CDA})$$

$$m(\hat{BDA}) = m(\hat{CDA}) - \text{punctual a)}$$

$$\Rightarrow \hat{BDT} \equiv \hat{CDT} \Rightarrow [DT \text{ bisectoarea lui } \hat{BDC}], [DT \subset [AT] \Rightarrow [AD \text{ este bisectoarea } \hat{BDC}].$$

9. Fie $\triangle ABC$ și M mijlocul laturii $[BC]$. Pe semidreapta $[AM$ se consideră punctul N , astfel încât M să fie mijlocul segmentului $[AN]$. Demonstrați că:

$$\text{a) } [AB] \equiv [NC];$$

$$\text{b) } \hat{BAM} \equiv \hat{CNM};$$

$$\text{c) } [AC] \equiv [BN]$$

Demonstrație: Construim desenul conform cerințelor – figura II. 62.

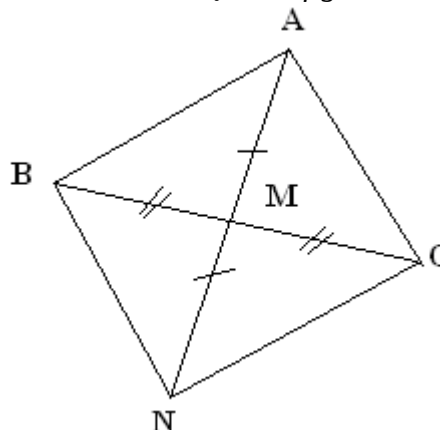


Figura II.62. Desenul problemei 9 (C.II.5)

a) Din triunghiurile $\triangle ABM$ și $\triangle NMC$, rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{BMA} \equiv \hat{CMN} \\ [BM] \equiv [MC] \\ [AM] \equiv [MN] \end{array} \right. \Rightarrow \text{LUL} \Rightarrow \triangle ABM \equiv \triangle NMC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [AB] \equiv [NC] \\ \hat{ABM} \equiv \hat{NCM} \\ \hat{MAB} \equiv \hat{MNC} \end{array} \right.$$

b) $\hat{MAB} \equiv \hat{MNC}$ rezultă de la punctual a)

c) Din triunghiurile $\triangle MBN$ și $\triangle MAC$, rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{BMN} \equiv \hat{AMC} \\ [BM] \equiv [MC] \\ [NM] \equiv [MA] \end{array} \right. \Rightarrow \text{LUL} \Rightarrow \triangle MBN \equiv \triangle MAC \Rightarrow [BN] \equiv [AC]$$

10. Fie punctul C mijlocul segmentului $[AB]$ și punctele D, E situate de o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât $2DB=AB$, $AE=AB$ și $\hat{DBA} \equiv \hat{EAB}$. Demonstrați că: $[AD] \equiv [CE]$.

Demonstrație: Construim desenul conform cerințelor – figura II. 63.

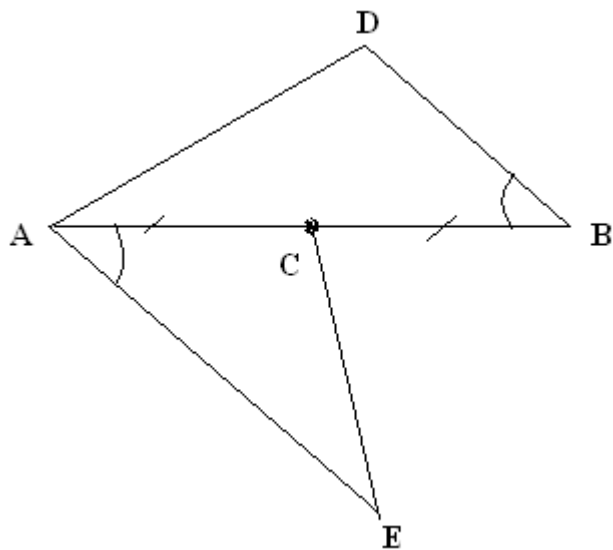


Figura II.63. Desenul problemei 10 (C.II.5)

$$\text{Din } \left\{ \begin{array}{l} AC = BC \\ 2DB = AB \Rightarrow AC = BD \\ AE = AB \end{array} \right.$$

Din triunghiurile $\triangle ACE$ și $\triangle ADB$, rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} [AB] \equiv [AE] \\ [AC] \equiv [BD] \\ \hat{DBA} \equiv \hat{ECA} \end{array} \right. \Rightarrow \text{LUL} \Rightarrow \triangle ACE \equiv \triangle ADB \Rightarrow [AD] \equiv [CE].$$

D.II. PERPENDICULARITATE

D.II.1. DREPTÉ PERPENDICULARE. DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA O DREAPTĂ

Două **drepte** se numesc **perpendiculare**, dacă determină un unghi drept. Dacă a și b sunt drepte perpendiculare, notăm $a \perp b$ (figura II.64).

Două drepte perpendiculare determină patru unghiuri drepte.

Fie o dreaptă d și un punct $M \notin d$. Atunci perpendiculara d' din M pe d intersectează dreapta d în punctul M' . M' se numește piciorul perpendicularei (figura II.65).

Numim **distanța de la un punct la o dreaptă** distanța de la punct la piciorul perpendicularei din punct pe dreaptă. (figura II.65).



Figura II.64. $a \perp b$

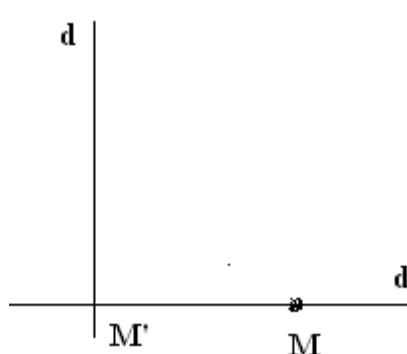


Figura II.65. $d(M, d) = MM'$

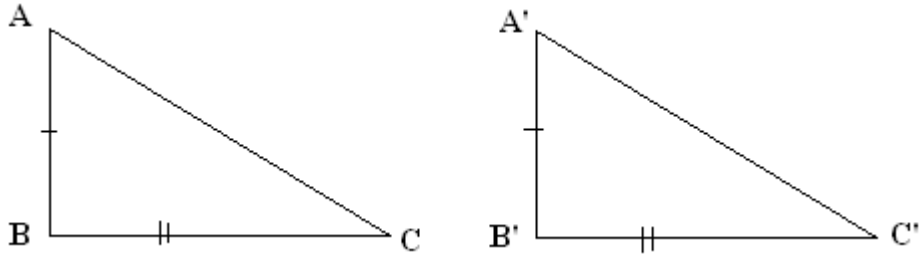
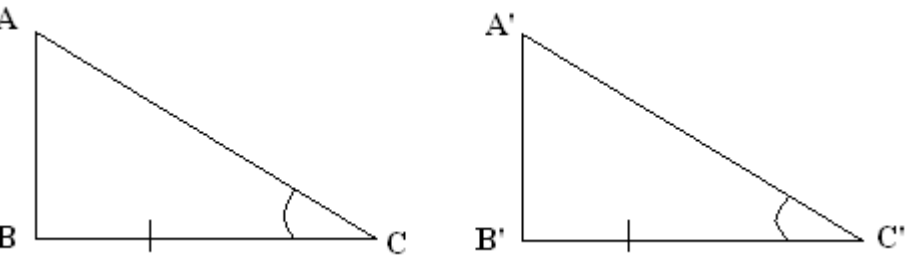
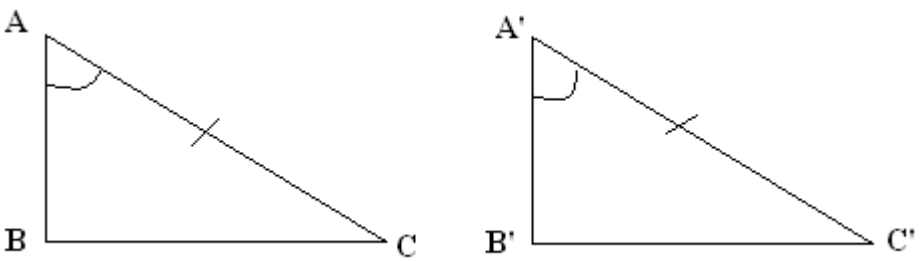
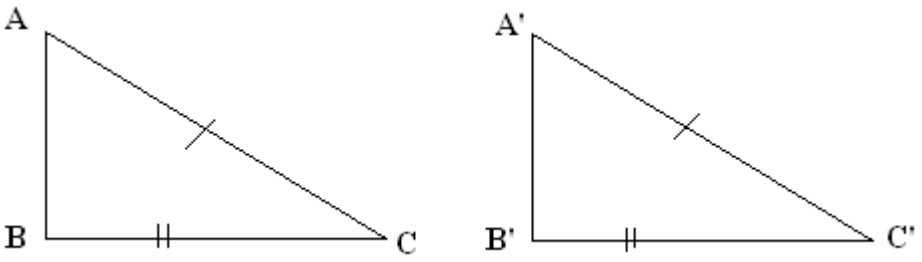
D.II.2. ÎNĂLȚIMEA ÎN TRIUNGHI. CONCURENȚA ÎNĂLȚIMILOR UNUI TRIUNGHI

O **înălțime** într-un triunghi este un segment determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei din acel vârf pe dreapta ce conține latura opusă vârfului (figura II.66). Orice triunghi are 3 înălțimi.

Teorema de concurență a înălțimilor unui triunghi: Dreptele determinate de înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul lor de concurență se notează H și se numește **ortocentrul triunghiului** (figura II.67).

Figura II.66. $AA' \perp BC$	Figura II.67. Cele 3 înălțimi ale $\triangle ABC$ și punctul lor de intersecție H	Figura II.68. Punctul de intersecție a înălțimilor în triunghiul dreptunghic

D.II.3. CONGRUENȚA TRIUNGHILOR DREPTUNGHICE

Cazul CC (catetă-catetă): Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt congruente .	
Cazul CU (catetă-unghi): Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și câte un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente .	
Cazul IU (ipotenuză-unghi): Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza și câte un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente .	
Cazul IC (ipotenuză-catetă): Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza și o catetă respectiv congruente sunt congruente .	

D.II.4. ARIILE UNOR SUPRAFEȚE POLIGONALE

Se numește **suprafață poligonală** reuniunea unui număr finit de suprafețe triunghiulare cu interioarele disjuncte două câte două. Notăm suprafața cu S .

Exemple:

- Orice $\triangle ABC$ determină o suprafață triunghiulară notată $[\triangle ABC]$ - figura II.69:

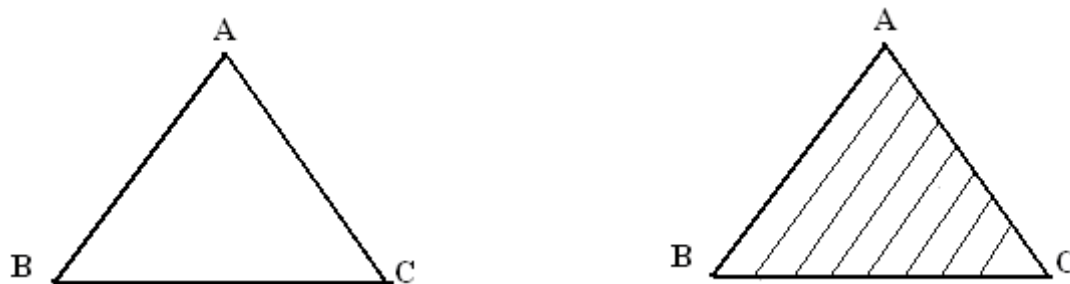


Figura II.69. $\triangle ABC$ și $[\triangle ABC]$

- Suprafețele poligonale se pot descompune în suprafețe triunghiulare - figura II.70:

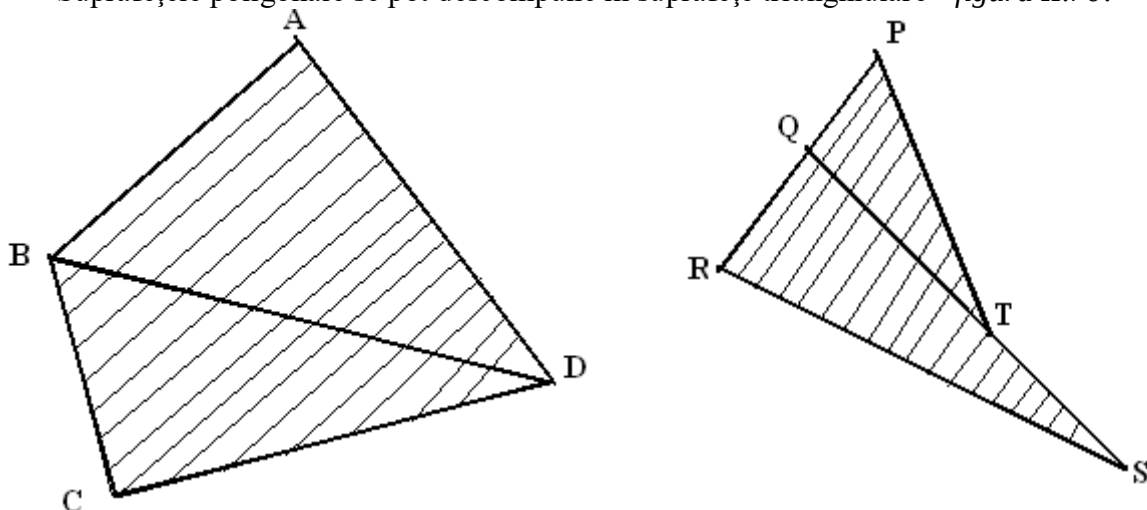


Figura II.70. Descompunerea unor suprafețe poligonale în suprafețe triunghiulare

- Un patrulater ABCD determină o suprafață poligonală notată $[ABCD]$ - figurile II.71, II.72:

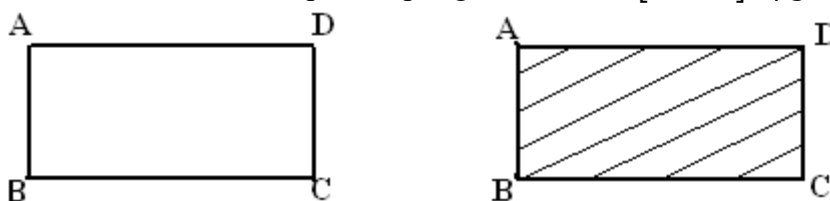


Figura II.71. Dreptunghiul ABCD și suprafața sa poligonală $[ABCD]$



Figura II.72. Pătratul PQRS și suprafața sa poligonală $[PQRS]$

Observație: Suprafețele poligonale, pentru a putea fi comparate, se măsoară. Folosind unitatea de măsură, de obicei m^2 , dar pot fi și multiplii sau submultiplii lui, fiecărei suprafețe poligonale îi corespunde un număr pozitiv unic, care reprezintă numărul de unități pe care le are suprafața respectivă. Acest număr se numește **aria suprafeței poligonale** și se notează cu $\mathcal{A}(S)$.

Aria suprafețelor poligonale se calculează prin descompunerea acestora în figuri cărora le știm sau le putem calcula aria, după care se însumează ariile acestora.

Exemple:

- $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(CBD)$ (figura II.70);
- $\mathcal{A}(ABCD) = L \cdot l = BC \cdot AB$;
 l = latura mică = $AB = CD$; L = latura mare = $BC = AD$; (aria dreptunghiului – figura II.71);
- $\mathcal{A}(PQRS) = a^2 = PS^2$;
 a = latura pătratului = $PS = SR = RQ = QP$ (aria pătratului – figura II.72);
- $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{AA' \cdot BC}{2} = \frac{BB' \cdot AC}{2} = \frac{CC' \cdot AB}{2}$ (pentru $\triangle ABC$ din figura II.67);

Particularizare: $\mathcal{A}(\triangle \text{drept}) = \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$, unde C_1, C_2 = catetele unui triunghi dreptunghic.

D.II.5. BISECTOAREA. CONCURENȚA BISECTOARELOR UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

Bisectoarea unui unghi este o semidreaptă interioară unghiului care determină cu laturile triunghiului două unghiuri congruente.

Construcția bisectoarei se poate face cu compasul sau cu raportorul.

Teoremă: Un punct interior unui unghi aparține bisectoarei unghiului, dacă și numai dacă este egal depărtat de laturile unghiului. (*a se vedea problema 1, D.II.8*)

Teoremă: Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente într-un punct egal depărtat de laturile triunghiului.

Punctul de intersecție al bisectoarelor unui triunghi se notează cu I și este centrul unui cerc, numit **cercul înscris în triunghi** - figura II.73, iar $d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, AC) = r = \text{raza cercului înscris în triunghi}$ ($IM = IN = IP = r$).

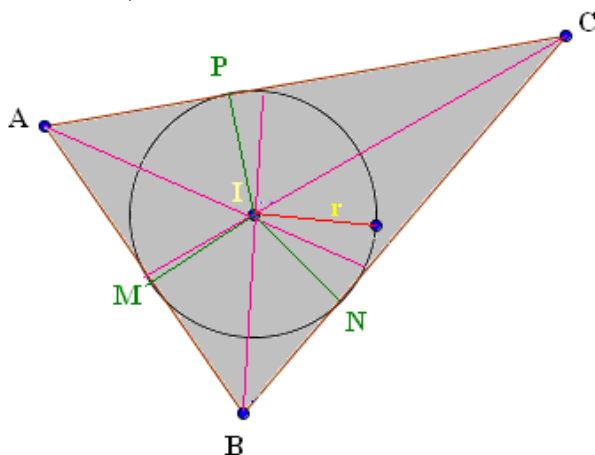


Figura II.73. Concurența bisectoarelor unghiurilor unui triunghi

D.II.6. MEDIATOAREA UNUI SEGMENT. CONCURENȚA MEDIATOARELOR LATURILOR UNUI TRIUNGHI

Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acesteia.

Construcția mediatoarei se poate face cu compasul și rigla.

Teoremă: Un punct aparține mediatoarei unui segment, dacă și numai dacă este egal depărtat de capetele segmentului.

Teoremă: Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente într-un punct egal depărtat de vârfurile triunghiului.

Punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor unui triunghi se notează cu O și este centrul unui cerc căruia îi aparțin vârfurile triunghiului; acest cerc se numește **cercul circumscris triunghiului** - figura II.74, iar $OA = OB = OC = R = \text{raza cercului circumscris triunghiului}$

La triunghiul dreptunghic centrul cercului circumscris este la mijlocul ipotenuzei.

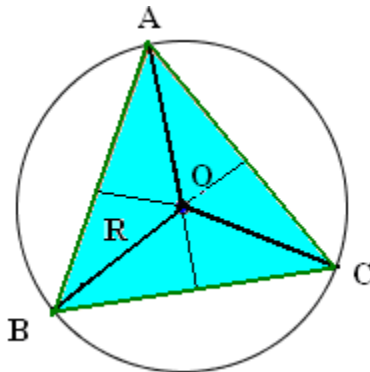


Figura II.74. Concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi

D.II.7. SIMETRIA FAȚĂ DE O DREAPTĂ

Două puncte sunt simetrice față de o dreaptă, dacă dreapta este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte.

Două figuri $F1$ și $F2$ sunt simetrice față de o dreaptă d , dacă prin pliere după dreapta d figurile coincid.

Două figuri $F1$ și $F2$ sunt simetrice față de o dreaptă d , dacă orice punct al figurii $F1$ are ca simetrie față de dreapta d un punct al figurii $F2$ și invers. Dreapta d se numește **axă de simetrie**.

Exemplu: În figura II.75 se prezintă două puncte simetrice A, B , două segmente simetrice $[CD]$, $[C^*D^*]$ și două triunghiuri simetrice XZY și $X^*Y^*Z^*$, față de axa de simetrie care este dreapta d .

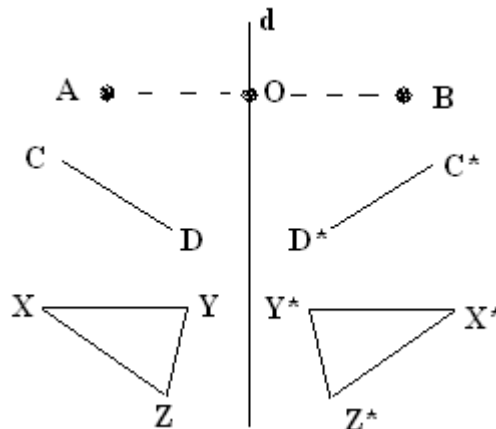


Figura II.75. Reprezentarea simetriei

D.II.8. EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Fie $\angle XOY$ și M un punct ce aparține interiorului unghiului. Demonstrați că, dacă $d(M, OX) = d(M, OY)$, atunci OM este bisectoarea unghiului.

Demonstrație: Construim desenul conform cerințelor – figura II. 76.

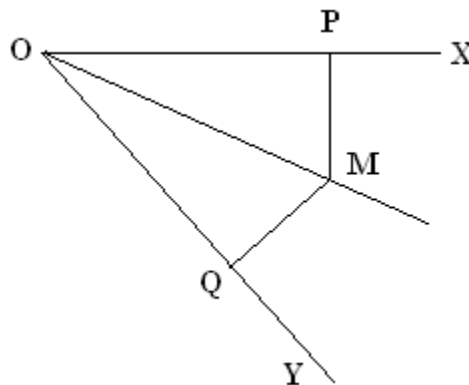


Figura II.76. Desenul problemei 1 (D.II.8)

Notez $d(M, OX) = PM$

$d(M, OY) = QM$

Din triunghiurile dreptunghice $\triangle MOP$ și $\triangle MOQ$, rezultă:

$$\begin{cases} [PM] = [QM] \\ [OM] = [OM] \end{cases} \xRightarrow{IC} \triangle MOP \equiv \triangle MOQ \Rightarrow m(\angle MOP) = m(\angle MOQ) \Rightarrow OM - \text{bisectoare.}$$

2. Fie un triunghi dreptunghic $\triangle ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$. Pe dreapta AB se consideră un punct D , astfel încât A să fie la mijlocul lui $[BD]$. Demonstrați că $[CD] \equiv [CB]$.

Demonstrație: Construim desenul conform cerințelor – figura II. 77.

Se dă: $\triangle ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$, apoi $[AD] \equiv [AB]$

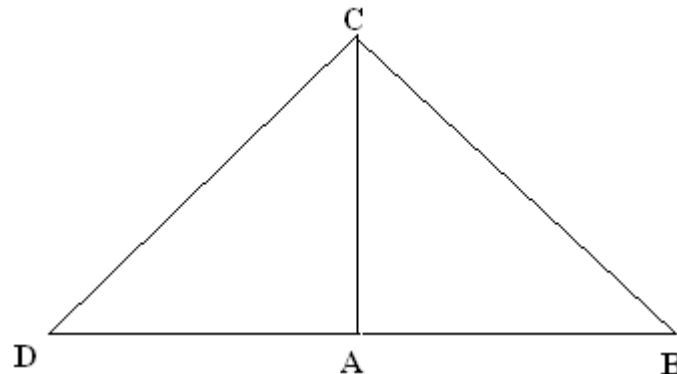


Figura II.77. Desenul problemei 2 (D.II.8)

Din triunghiurile $\triangle CAD$ și $\triangle CAB$ dreptunghice, rezultă:

$$\begin{cases} [CA] - \text{comună} \\ [AD] \equiv [AB] \end{cases} \Rightarrow CC \Rightarrow \triangle CAD \equiv \triangle CAB \Rightarrow [CD] \equiv [CB]$$

3. Se dă: $PT \perp RT$, $SV \perp QV$, $RT = QV$, $PQ = SR$ (figura II.78). Demonstrați că $PT = SV$.

Demonstrație:

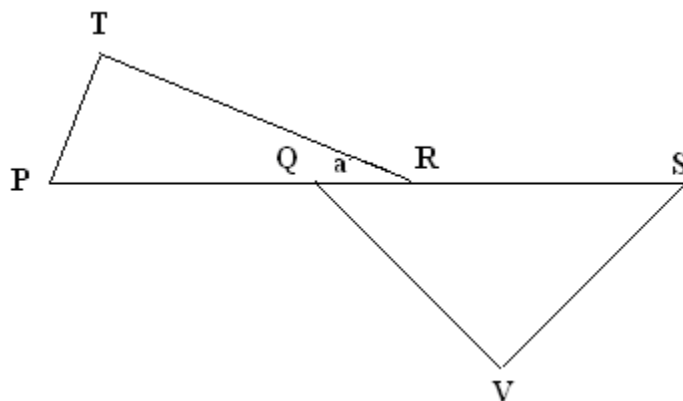


Figura II.78. Desenul problemei 3 (D.II.8)

$$\text{Notez } QR=a \Rightarrow \begin{cases} PR = PQ + a \\ SQ = SR + a = PQ + a \end{cases} \Rightarrow PR = SQ.$$

Din triunghiurile dreptunghice $\triangle PTR$ și $\triangle SVQ$, rezultă:

$$\begin{cases} [PR] \equiv [SQ] \\ [RT] \equiv [QV] \end{cases} \Rightarrow \triangle PTR \equiv \triangle SVQ \Rightarrow [PT] \equiv [SV]$$

4. Se dă: E mijlocul segmentului $[AB]$, $AD \perp AB$, $BC \perp AB$ și $\hat{ADE} \equiv \hat{BCE}$ (figura II.79).

Demonstrați că:

a) $DE \equiv CE$;

b) $AC \equiv BD$.

Demonstrație:

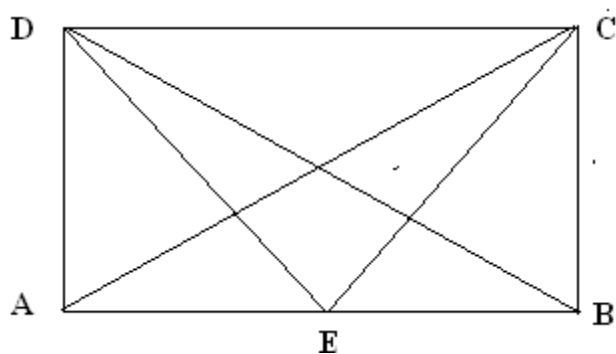


Figura II.79. Desenul problemei 4 (D.II.8)

a) Din $AD \perp AB$, $BC \perp AB$ rezultă că $m(\hat{DAE}) = m(\hat{CBE}) = 90^\circ$.

$$\triangle DAE \equiv \triangle CBE \xRightarrow{CU} \text{ din faptul că } \begin{cases} [AE] \equiv [EB] \\ \hat{ADE} \equiv \hat{BCE} \end{cases},$$

în care $[AE], [EB]$ sunt catete, iar $\hat{ADE}, \hat{BCE}$ - unghiuri ascuțite.

$$\text{Din } \triangle DAE \equiv \triangle CBE \Rightarrow \begin{cases} \hat{AED} \equiv \hat{BEC} \\ [AD] \equiv [BC] \\ [DE] \equiv [CE] \end{cases}$$

b) Analizăm $\triangle DAB$ și $\triangle CBA$; sunt triunghiuri dreptunghiuri $\Rightarrow \begin{cases} [AD] \equiv [BC] \\ [AB] - \text{comună} \end{cases} \Rightarrow CC$
 rezultă $\triangle DAB \equiv \triangle CBA \Rightarrow AC \equiv BD$.

5. Fie triunghiul isoscel $\triangle ABC$, cu $[AB] \equiv [AC]$. Se trasează înălțimea din A pe BC care intersectează latura BC în punctul M. Demonstrați că $[BM] \equiv [MC]$.

Demonstrație: Construim desenul conform cerințelor – figura II. 80.

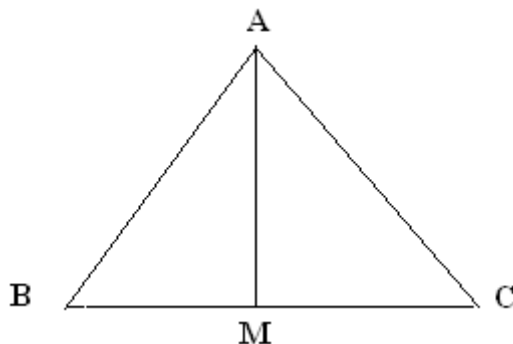


Figura II.80. Desenul problemei 5 (D.II.8)

Știm că $[AM] \perp [BC] \Rightarrow \triangle AMB, \triangle AMC$ sunt triunghiuri dreptunghice.

Din triunghiurile $\triangle AMB$ și $\triangle AMC$, rezultă:

$$\begin{cases} [AM] \equiv [AM] \\ [AB] \equiv [AC] \end{cases} \xRightarrow{CI} \triangle AMB \equiv \triangle AMC \Rightarrow [BM] \equiv [MC]$$

Rezultă $[BM] \equiv [MC]$.

6. Pe laturile $[OA]$ și $[OB]$ ale unghiului $\angle AOB$ se iau punctele C , respectiv D , astfel încât $[OC] \equiv [OD]$. Se duc perpendiculara în C pe OA și perpendiculara în D pe OB care se intersectează în P . Demonstrați că $[OP]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOB$.

Demonstrație: Construim desenul conform cerințelor – figura II. 81.

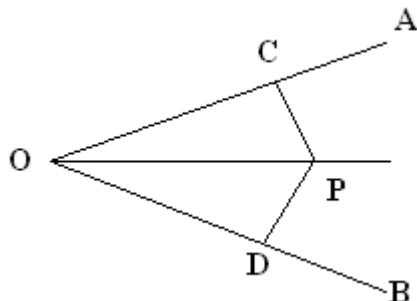


Figura II.81. Desenul problemei 6 (D.II.8)

Din triunghiurile $\triangle OPC$ și $\triangle OPD$, rezultă:

$$\begin{cases} [OC] \equiv [OD] \\ [OP] = [OP] \end{cases} \Rightarrow CI \Rightarrow \triangle OPC \equiv \triangle OPD \Rightarrow \begin{cases} [CP] \equiv [DP] \\ \angle DOP \equiv \angle COP \\ \angle OPD \equiv \angle OPC \end{cases}$$

Din $\angle DOP \equiv \angle COP \Rightarrow [OP]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOB$.

7. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$. O dreaptă ce trece prin M intersectează perpendicularele în A și B pe AB în punctele C și D . Perpendiculara în M pe CD intersectează dreapta AC în P . Demonstrați că $[PC] \equiv [PD]$.

Demonstrație: Construim desenul conform cerințelor – figura II. 82.

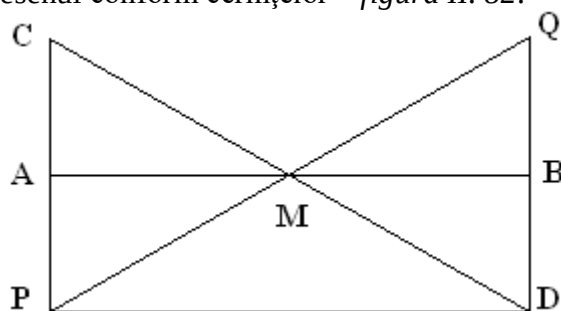


Figura II.82. Desenul problemei 7 (D.II.8)

Din triunghiurile $\triangle AMC$ și $\triangle BMD$, rezultă:

$$\begin{cases} [AM] \equiv [MB] \\ \angle CMA = \angle DMB \end{cases} \Rightarrow CU \Rightarrow \triangle AMC \equiv \triangle BMD \Rightarrow \begin{cases} [AC] \equiv [BD] \\ \angle ACM \equiv \angle BDM \\ [CM] \equiv [MD] \end{cases}$$

Din triunghiurile $\triangle CMP$ și $\triangle DMP$, rezultă:

$$\begin{cases} [CM] \equiv [MD] \\ MP = PM \end{cases} \Rightarrow CC \Rightarrow \triangle CMP \equiv \triangle DMP \Rightarrow [PC] \equiv [PD]$$

8. Fie A, B, C, D, E puncte coliniare și $P \notin AB$, astfel încât C este mijlocul segmentelor $[AE]$ și $[BD]$, iar PC mediatoarea segmentului $[BD]$. Demonstrați că $\triangle PBA \equiv \triangle PDE$.

Demonstrație: În figura II.83 construim desenul.

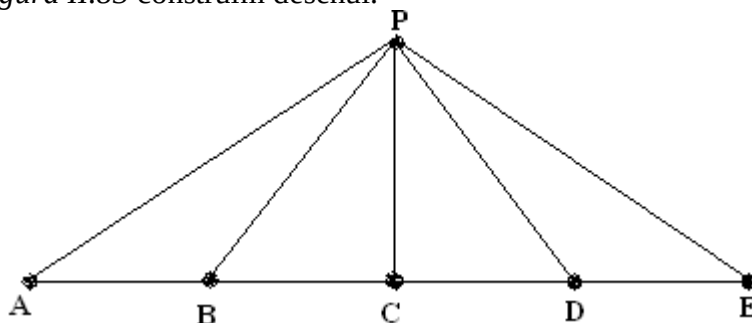


Figura II.83. Desenul problemei 8 (D.II.8)

$$[PA] = [PE] \text{ și } [PB] = [PD]$$

$$\left. \begin{array}{l} AC = AB + BC \\ CE = CD + DE \\ [BC] = [CD] \end{array} \right\} \Rightarrow [DE] = [AB]$$

Din $\triangle PBA, \triangle PDE$ avem:

$$\left\{ \begin{array}{l} [PA] = [PE] \\ [PB] = [PD] \\ [AB] = [DE] \end{array} \right. \xRightarrow{LLL} \triangle PBA \equiv \triangle PDE.$$

9. O perpendiculară pe bisectoarea unui unghi $\hat{O}$ intersectează laturile unghiului în A și B, iar bisectoarea unghiului în M.

a) Demonstrați că M este mijlocul lui $[AB]$;

b) Dacă $[AM] = 3 \text{ cm}$ și $[OA] = 5 \text{ cm}$, calculați perimetrul $\triangle AOB$.

Demonstrație: În figura II.84 construim desenul.

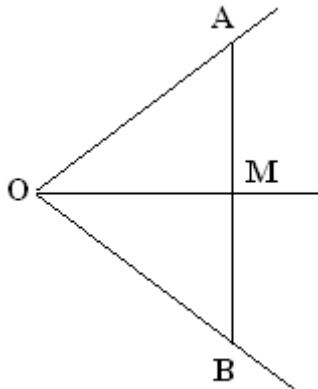


Figura II.84. Desenul problemei 9 (D.II.8)

a) Studiem $\triangle AOM$ și $\triangle BOM$ dreptunghice

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{AOM} = \hat{BOM} \\ [OM] = [OM] \end{array} \right. \xRightarrow{CU} \triangle AOM \equiv \triangle BOM \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [AM] = [BM] \Rightarrow M \text{ e la mijloc} \\ \hat{OAM} = \hat{OBM} \\ [OA] = [OB] \end{array} \right.$$

b) $P_{\triangle AOB} = AO + OB + AB = 5 + 5 + 6 = 16 \text{ cm}.$

10. Două laturi ale unui triunghi au lungimile de 6 cm și respectiv de 8 cm, iar lungimea înălțimii corespunzătoare primei laturi este egală cu 4 cm. Calculați înălțimea corespunzătoare laturii de 8 cm a triunghiului.

Rezolvare:

$$\text{latura}_1 = L_1 = 6 \text{ cm}, \text{ înălțimea}_1 = h_1 = 4 \text{ cm} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{L_1 \cdot h_1}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

$$\text{latura}_2 = L_2 = 8 \text{ cm}, \text{ înălțimea}_2 = h_2 = ? \text{ cm} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{L_2 \cdot h_2}{2} = 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow \frac{8 \cdot h_2}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow h_2 = 3 \text{ cm}.$$

11. Fie un $\triangle ABC$, astfel încât $\hat{B} \equiv \hat{C}$. Demonstrați că distanța $d(B, AC) = d(C, AB)$.

Demonstrație: În figura II.85 construim desenul.

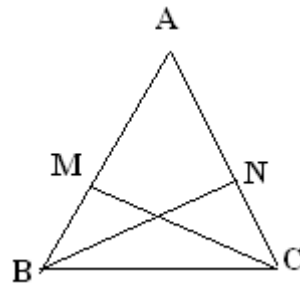


Figura II.85. Desenul problemei 11 (D.II.8)

Analizăm triunghiurile dreptunghice $\triangle BMC$ și $\triangle CNB$.

$$\begin{cases} \hat{MBC} \equiv \hat{NCB} \text{ IU} \\ [BC] \equiv [CB] \end{cases} \Rightarrow \triangle BMC \equiv \triangle CNB \Rightarrow [MC] \equiv [NB] \Rightarrow d(B, AC) = d(C, AB).$$

12. Se consideră figura II.86. Dacă $[AD]$ este mediatoarea segmentului $[BC]$, demonstrați că

$$\hat{AEC} \equiv \hat{AEB}.$$

Demonstrație:

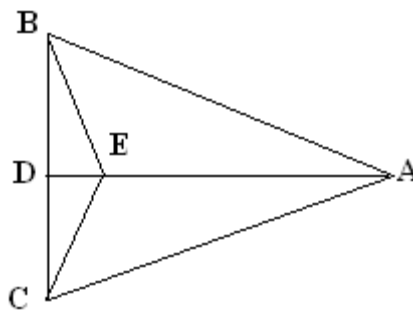


Figura II.86. Desenul problemei 12 (D.II.8)

$$\text{Din triunghiurile dreptunghice } \triangle BDE \text{ și } \triangle CDE \Rightarrow \begin{cases} [BD] \equiv [DC] \text{ CC} \\ [ED] \equiv [ED] \end{cases} \Rightarrow \triangle BDE \equiv \triangle CDE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [BE] \equiv [CE] \\ \hat{DBE} \equiv \hat{DCE} \\ \hat{BED} \equiv \hat{CED} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(\hat{AEC}) = 180^\circ - m(\hat{CED}) \\ m(\hat{AEB}) = 180^\circ - m(\hat{BED}) \\ \hat{CED} \equiv \hat{BED} \end{cases} \Rightarrow \hat{AEC} \equiv \hat{AEB}.$$

13. Desenați axele de simetrie pentru un dreptunghi, un pătrat și un cerc și precizați numărul acestor axe de simetrie.

Rezolvare: Dreptunghiul are 2 axe de simetrie, pătratul 4 axe de simetrie, iar cercul o infinitate.

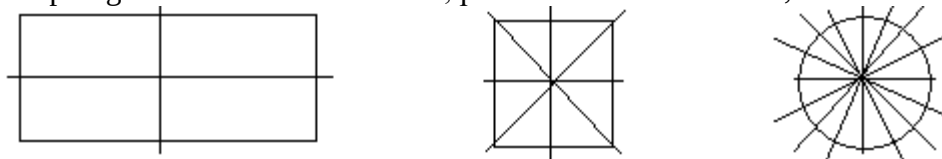


Figura II.87. Axele de simetrie pentru un dreptunghi, un pătrat și un cerc

14. Se consideră triunghiul ABC astfel încât mediatoarea laturii BC intersectează dreapta AB în punctul M și face cu aceasta un unghi de 30° . Demonstrați că triunghiul MBC este echilateral.

Demonstrație: În figura II.88 construim desenul.

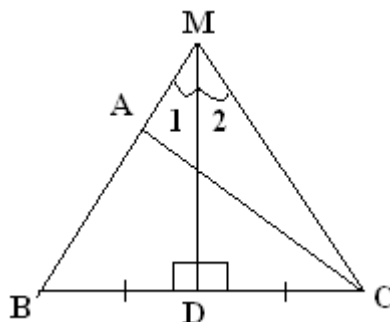


Figura II.88. Desenul problemei 14 (D.II.8)

Pentru ca $\triangle MBC$ să fie echilateral $\Rightarrow MB \equiv MC \equiv BC$

Din triunghiurile dreptunghice $\triangle MBD$, $\triangle MCD$ avem: $\begin{cases} [BD] \equiv [DC] \\ [MD] \equiv [MD] \end{cases} \xrightarrow{CC} \triangle MBD \equiv \triangle MCD \Rightarrow$

$$\begin{cases} MB = MC \\ m(\hat{M}_1) = m(\hat{M}_2) = 30^\circ \Rightarrow m(\hat{M}) = 60^\circ \Rightarrow m(\hat{M}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^\circ \\ \hat{B} \equiv \hat{C} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle MBC$ este echilateral, deoarece orice unghi a unui triunghi echilateral are 60° .

Sau: MD este bisectoare în $\triangle MBC$ isoscel, rezultă că e și mediană și înălțime și mediatoare.

Din $\triangle MBC$ isoscel și $m(\hat{M}) = 60^\circ \Rightarrow \triangle MBC$ este echilateral.

15. Construiți cercul înscris și circumscris unui triunghi echilateral. Ce se observă?

Rezolvare: Se poate observa, din figura II.89, că $I=O$.

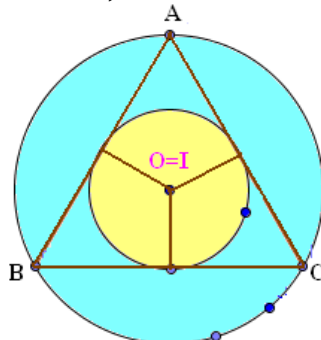


Figura II.89. Desenul problemei 15 (D.II.8)

E.II. PARALELISM

E.II.1. UNGHIURI DETERMINATE DE DOUĂ DREPTTE CU O SECANTĂ

O dreaptă se numește **secantă** a două drepte, dacă intersectează cele două drepte în puncte diferite.

Dreapta **d** se numește secantă a dreptelor **a** și **b**, deoarece $d \cap a = \{A\}$ și $d \cap b = \{B\}$, A și B fiind puncte diferite (figura II.90).

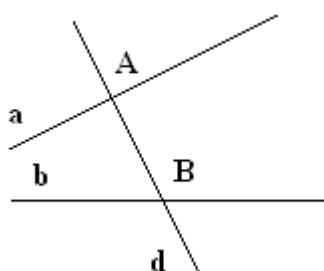


Figura II.90.
Dreapta d = secantă

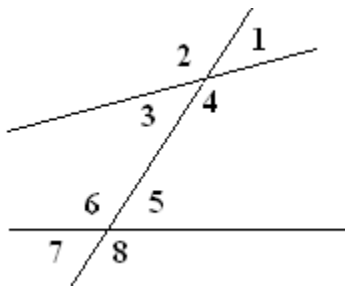


Figura II.91. Reprezentarea
celor 8 unghiuri determinate de
2 drepte cu o secantă

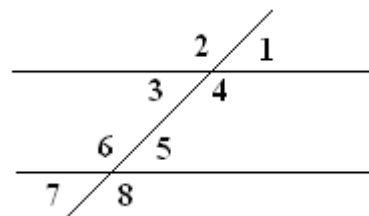


Figura II.92. Reprezentarea
celor 8 unghiuri determinate de 2
drepte paralele cu o secantă

Două drepte determină cu o secantă a dreptelor opt unghiuri care împerecheate într-un anumit mod poartă diferite denumiri după pozițiile pe care le ocupă față de dreptele date (figura II.91). Patru dintre unghiuri sunt ascuțite, iar patru obtuze. Astfel avem:

- $\overset{\wedge}{3}, \overset{\wedge}{4}, \overset{\wedge}{5}, \overset{\wedge}{6}$ = unghiuri interne;
- $\overset{\wedge}{1}, \overset{\wedge}{2}, \overset{\wedge}{7}, \overset{\wedge}{8}$ = unghiuri externe;
- alterne = o pereche de unghiuri unul de o parte a secantei, iar celălalt de cealaltă parte;
- alterne interne: $\overset{\wedge}{3}, \overset{\wedge}{5}$ sau $\overset{\wedge}{4}, \overset{\wedge}{6}$;
- alterne externe: $\overset{\wedge}{1}, \overset{\wedge}{7}$ sau $\overset{\wedge}{2}, \overset{\wedge}{8}$;
- corespondente: $\overset{\wedge}{1}$ și $\overset{\wedge}{5}$, $\overset{\wedge}{4}$ și $\overset{\wedge}{8}$, $\overset{\wedge}{2}$ și $\overset{\wedge}{6}$, $\overset{\wedge}{3}$ și $\overset{\wedge}{7}$;
- interne de aceeași parte a secantei: $\overset{\wedge}{3}$ și $\overset{\wedge}{6}$, $\overset{\wedge}{4}$ și $\overset{\wedge}{5}$;
- externe de aceeași parte a secantei: $\overset{\wedge}{1}$ și $\overset{\wedge}{8}$, $\overset{\wedge}{2}$ și $\overset{\wedge}{7}$.

Dacă dreptele sunt paralele, atunci:

- Perechile de unghiuri alterne interne, alterne externe, corespondente sunt congruente;
- Deoarece sunt unghiuri opuse la vârf, rezultă că toate unghiurile ascuțite sunt congruente și toate cele obtuze sunt congruente;
- Oricare unghi ascuțit cu oricare unghi obtuz sunt suplementare.

Exemple: din figura II.92 și pe baza celor menționate anterior putem scrie:

- $\overset{\wedge}{m(3)} + \overset{\wedge}{m(6)} = 180^\circ$, deoarece sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei;
- $\overset{\wedge}{m(2)} + \overset{\wedge}{m(7)} = 180^\circ$, deoarece sunt unghiuri externe de aceeași parte a secantei.

E.II.2. DREPTE PARALELE. CRITERII DE PARALELISM

Două drepte se numesc **paralele**, dacă sunt coplanare și nu au nici un punct comun (figura II.93). În caz contrar, dreptele nu sunt paralele (figura II.94).

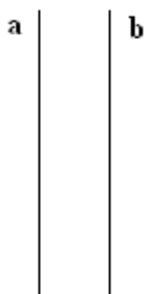


Figura II.93. Drepte paralele

$$a \parallel b, a \cap b = \emptyset$$

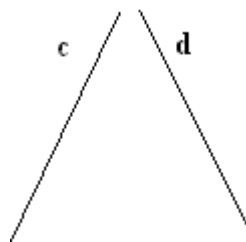


Figura II.94. Drepte neparalele

$$c \nparallel d, c \cap d \neq \emptyset$$

Teorema unghiurilor alterne interne (teorema de existență a dreptelor paralele):

Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci **dreptele sunt paralele**.

Consecințe:

- Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă două drepte sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă, atunci ele sunt paralele.

Construcția unei drepte paralele cu o dreaptă dată se poate face cu rigla și raportorul, cu rigla și echerul, precum și cu rigla și compasul.

E.II.3. AXIOMA PARALELELOR. TRANZITIVITATEA RELAȚIEI DE PARALELISM

Axioma paralelelor (Axioma lui Euclid): Fiind dată o dreaptă și un punct exterior dreptei, există cel mult o dreaptă careia îi aparține punctul și care este paralelă cu dreapta.

Teoremă: Fiind dată o dreaptă și un punct exterior dreptei, există o singură dreaptă careia îi aparține punctul și care este paralelă cu dreapta dată.

Teoremă (tranzitivitatea relației de paralelism): Dacă două drepte sunt paralele cu a treia, atunci ele sunt paralele între ele.

E.II.4. UNGHIURI DETERMINATE DE DOUĂ DREPTE PARALELE

Teoremă: Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri alterne interne congruente (reciproca teoremei unghiurilor alterne interne).

Consecințe:

- Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri alterne interne externe congruente;
- Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri corespondente congruente.
- Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri alterne interne de aceeași parte a secantei suplementare.
- Două drepte paralele determină cu orice secantă unghiuri alterne externe de aceeași parte a secantei suplementare.

Teoremă: Două unghiuri cu laturile paralele sunt congruente sau suplementare.

E.II.5. PARALELE INTERSECTATE DE PARALELE. LINIA MIJLOCIE A UNUI TRIUNGHII

Teoremă: Două drepte paralele care intersectează alte două drepte paralele determină pe acestea segmente congruente – *figura II.95*.

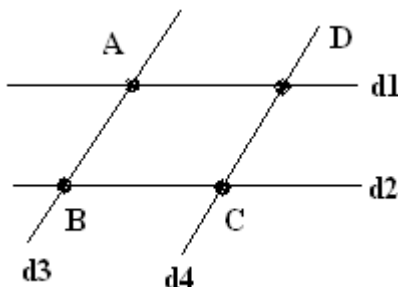


Figura II.95. Paralele intersectate de paralele
 $d1 \parallel d2; d3 \parallel d4 \Rightarrow (AD) \equiv (BC); (AB) \equiv (CD)$

Linia mijlocie a unui triunghi este segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale triunghiului – *figura II.96*.

Observație: Orice triunghi are 3 linii mijlocii.

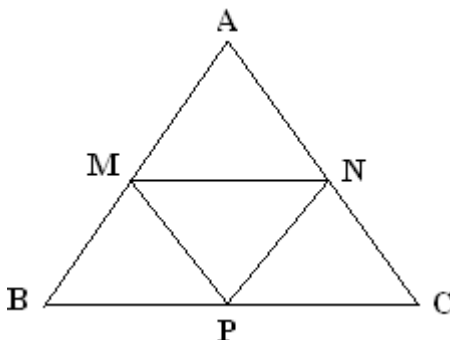


Figura II.96. Liniile mijlocii $[MN]$, $[MP]$, $[NP]$ în $\triangle ABC$

Teorema liniei mijlocii: Linia mijlocie a unui triunghi determinată de mijloacele a două laturi ale triunghiului este paralelă cu cea de-a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.

Exemplu: citind *figura II.96*, avem relațiile pentru cele trei linii mijlocii ale $\triangle ABC$:

$$MN = \frac{BC}{2}; MP = \frac{AC}{2}; NP = \frac{AB}{2}.$$

E.II.6. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Fie $\triangle ABC$. Paralela prin C la AB se intersectează cu paralela prin B la AC în D. Demonstrați că $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$.

Demonstrație: În figura II.97 construim desenul.

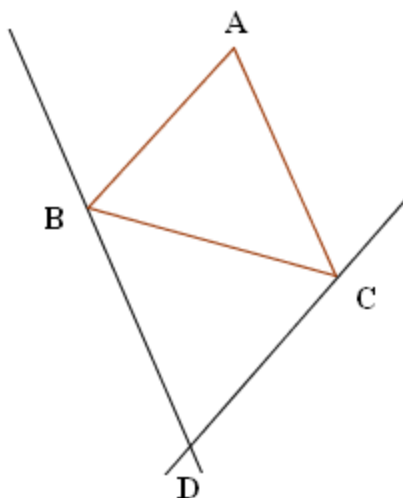


Figura II.97. Desenul problemei 1 (E.II.6)

Analizând $\triangle ABC$ și $\triangle DCB$, observăm că:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}BC \equiv \hat{D}CB \text{ din } AB \parallel DC \\ \hat{A}CB \equiv \hat{D}BC \text{ din } AC \parallel BD \\ [BC] = [BC] \end{array} \right. \xRightarrow{\text{ULU}} \triangle ABC \equiv \triangle DCB.$$

2. În figura II.98, D este mijlocul lui $[AB]$, E este mijlocul lui $[AC]$, M este mijlocul lui $[AD]$, N este mijlocul lui $[AE]$, iar $BC = 12$ cm. Calculați MN.

Rezolvare:

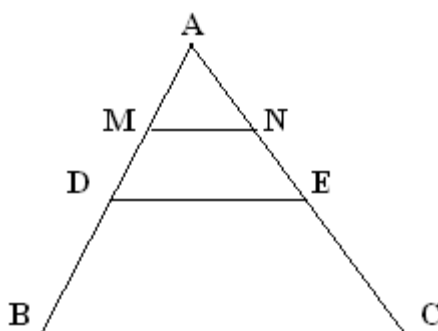


Figura II.98. Desenul problemei 2 (E.II.6)

$$DE = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm ca linie mijlocie în } \triangle ABC.$$

$$MN = \frac{DE}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm ca linie mijlocie în } \triangle ADE.$$

3. În figura II.99, $P_{\triangle FGH} = 18\text{cm}$. Calculați $P_{\triangle RST}$, știind că F este mijlocul lui [RT], H este mijlocul lui [ST], G este mijlocul lui [RS].

Rezolvare:

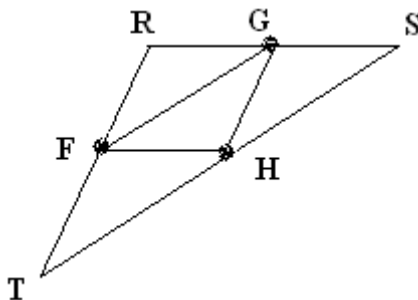


Figura II.99. Desenul problemei 3 (E.II.6)

$$P_{\triangle FGH} = FG + GH + HF = 18\text{cm}$$

Relațiile pentru liniile mijlocii din $\triangle RST$ sunt:

$$FH = \frac{RS}{2} \Rightarrow RS = 2 \cdot FH, \quad GH = \frac{RT}{2} \Rightarrow RT = 2 \cdot GH, \quad GF = \frac{TS}{2} \Rightarrow TS = 2 \cdot GF.$$

$$\text{Rezultă că: } P_{\triangle RST} = RS + ST + RT = 2 \cdot (FH + GH + GF) = 2 \cdot P_{\triangle FGH} = 2 \cdot 18 = 36\text{cm}^2.$$

4. Utilizând figura II.100, scrieți măsurile unghiurilor x, y, z.

Rezolvare:

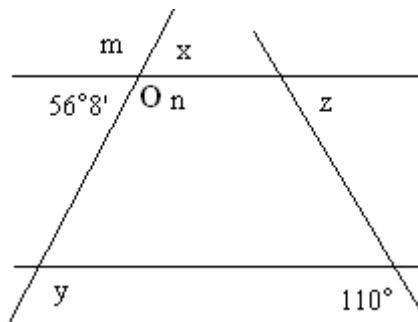


Figura II.100. Desenul problemei 4 (E.II.6)

$x = 56^\circ 8'$, deoarece unghiurile ascuțite în cazul a două drepte paralele tăiate de o secantă, sunt congruente. Rezultă automat că $m \equiv n$, sunt unghiuri obtuze care, în cazul a două drepte paralele tăiate de o secantă, sunt congruente.

Deci, în jurul punctului O avem: $56^\circ 8' + 56^\circ 8' + 2 \cdot n = 360^\circ \Rightarrow n = 123^\circ 52' = y$, ca și unghiuri corespondente.

$$z + 110^\circ = 180^\circ, \text{ ca unghiuri suplementare, deci } z = 70^\circ.$$

5. Se consideră trei segmente [AB], [CD], [EF] care au același mijloc P. Să se arate că $AC \parallel BD$, $AE \parallel BF$, $ED \parallel CF$.

Demonstrație: În figura II.101 construim desenul.

$$\text{Din } \triangle APC \equiv \triangle BPD \Rightarrow \overset{\wedge}{\angle} ACP \equiv \overset{\wedge}{\angle} BDP \text{ alterne interne și secanta } CD \Rightarrow AC \parallel BD.$$

$$\text{Din } \triangle AEP \equiv \triangle BFP \Rightarrow \overset{\wedge}{\angle} AEP \equiv \overset{\wedge}{\angle} BFP \text{ alterne interne și secanta } EF \Rightarrow AE \parallel BF.$$

Din $\triangle DPE \equiv \triangle CPF \Rightarrow \hat{DEP} \equiv \hat{CFP}$ alterne interne și secanta EF $\Rightarrow DE \parallel CF$.

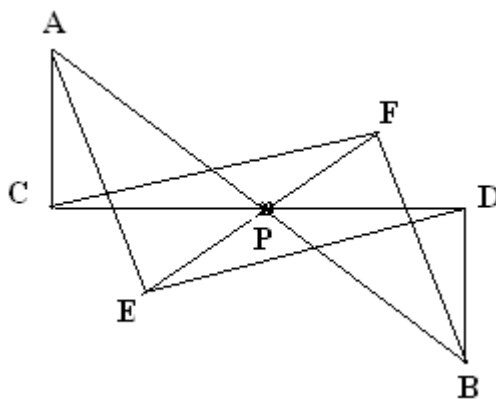


Figura II.101. Desenul problemei 5 (E.II.6)

6. Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează în O și $AO = BO$, $CO = OD$.
Demonstrați că $AC \parallel BD$.

Demonstrație: În figura II.102 construim desenul.

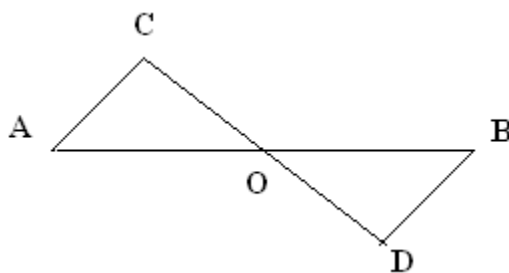


Figura II.102. Desenul problemei 6 (E.II.6)

Analizăm $\triangle AOC$ și $\triangle BOD$.

$$\left\{ \begin{array}{l} [AO] \equiv [BO] \\ [CO] \equiv [OD] \\ \hat{AOC} \equiv \hat{BOD} \end{array} \right. \xRightarrow{LUL} \triangle AOC \equiv \triangle BOD \Rightarrow \hat{CAO} \equiv \hat{DBO} \text{ alterne interne } \Rightarrow AC \parallel BD.$$

7. În $\triangle ABC$, D și E sunt respectiv mijloacele segmentelor AB și BC. Dacă $BC = 18$ cm, $m(\hat{B}) = 63^\circ$ și $m(\hat{CED}) = 132^\circ$, aflați DE, $m(\hat{ADE})$.

Rezolvare: În figura II.103 construim desenul.

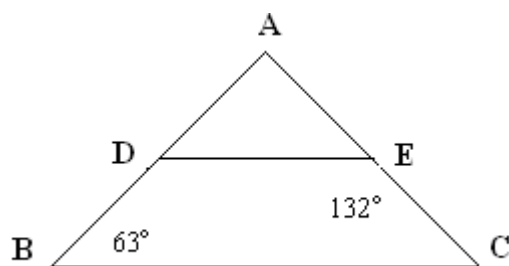


Figura II.103. Desenul problemei 7 (E.II.6)

- $\begin{cases} [BD] \equiv [DA] \\ [CE] \equiv [EA] \end{cases} \Rightarrow DE = \frac{BC}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}, DE \text{ linie mijlocie în } \triangle ABC.$
- $m(\hat{ADE}) = 63^\circ = m(\hat{B}).$

8. În $\triangle ABC$, P, Q, R sunt respectiv mijloacele $[AB], [AC], [BC]$.

Demonstrați că $\triangle APQ \equiv \triangle QRC \equiv \triangle PBR \equiv \triangle RQP$.

Demonstrație: În figura II.104 construim desenul.

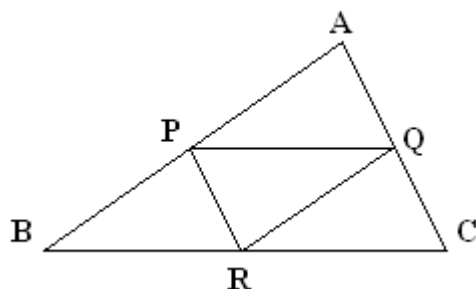


Figura II.104. Desenul problemei 8 (E.II.6)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} [AP] \equiv [PB] \\ [AQ] \equiv [QC] \end{cases} \Rightarrow PQ \text{ este linie mijlocie} \Rightarrow [PQ] \equiv [BR] \equiv [RC] \\ &\begin{cases} [BR] \equiv [RC] \\ [CQ] \equiv [QA] \end{cases} \Rightarrow RQ \text{ este linie mijlocie} \Rightarrow [RQ] \equiv [BP] \equiv [PA] \\ &\begin{cases} [BP] \equiv [PA] \\ [BR] \equiv [RC] \end{cases} \Rightarrow PR \text{ este linie mijlocie} \Rightarrow [PR] \equiv [AQ] \equiv [QC] \\ \text{Din } &\begin{cases} [PQ] \equiv [BR] \equiv [RC] \\ [RQ] \equiv [BP] \equiv [PA] \\ [PR] \equiv [AQ] \equiv [QC] \end{cases} \xrightarrow{\text{LLL}} \triangle APQ \equiv \triangle QRC \equiv \triangle PBR \equiv \triangle RQP. \end{aligned}$$

9. Fie AD bisectoarea $\angle BAC$ în $\triangle ABC$ și $M \in DC$. Paralela prin M la AD, intersectează dreapta AC și AB în E, respectiv F. Să se arate că $\triangle AFE$ este isoscel.

Demonstrație: În figura II.105 construim desenul.

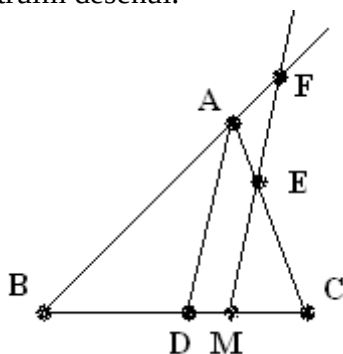


Figura II.105. Desenul problemei 9 (E.II.6)

$$\begin{aligned} &\left. \begin{array}{l} AD \parallel FM \\ AC - \text{secanta} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{DAE} \equiv \hat{AEF} \text{ unghiuri alterne interne.} \\ &\left. \begin{array}{l} AD \parallel FM \\ BF - \text{secanta} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{BAD} \equiv \hat{AFE} \text{ unghiuri corespondente.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \hat{DAE} \equiv \hat{AEF} \\ \hat{BAD} \equiv \hat{AFE} \Rightarrow \hat{AEF} \equiv \hat{AFE} \Rightarrow \Delta AFE \text{ isoscel.} \\ \hat{BAD} \equiv \hat{DAE} \end{cases}$$

10. Fie un triunghi ΔABC Știind că $m(\hat{ABC}) = m(\hat{ACB}) = 50^\circ$ și că printr-un punct

$D \in (AC)$ se duce paralela la AB , care intersectează dreapta BC în punctul E , să se demonstreze că $m(\hat{CED}) = 50^\circ$ și $m(\hat{CDE}) = m(\hat{BAC})$.

Demonstrație: În figura II.106 construim desenul.

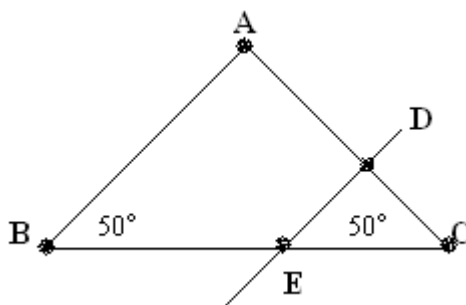


Figura II.106. Desenul problemei 10 (E.II.6)

$$\begin{cases} AB \parallel DE \\ BC - \text{secanta} \end{cases} \Rightarrow \hat{ABC} \equiv \hat{CED} \Rightarrow m(\hat{ABC}) = m(\hat{CED}) = 50^\circ;$$

$$\begin{cases} AB \parallel DE \\ AC - \text{secanta} \end{cases} \Rightarrow m(\hat{BAC}) = m(\hat{CDE}), \text{ ca unghiuri corespondente.}$$

F.II. PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIURILOR

F.II.1. SUMA MĂSURILOR UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI. UNGHI EXTERIOR UNUI TRIUNGHI. TEOREMA UNGHIULUI EXTERIOR

În figura II.107 sunt figurate aceste noțiuni.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180° .

Un **unghi exterior** unui triunghi este un unghi adiacent cu unul din unghiurile unui triunghi și este suplementar cu el.

Un **unghi exterior** unui triunghi este mai mare decât oricare din unghiurile triunghiului neadiacent cu el.

Teorema unghiului exterior: Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente cu el.

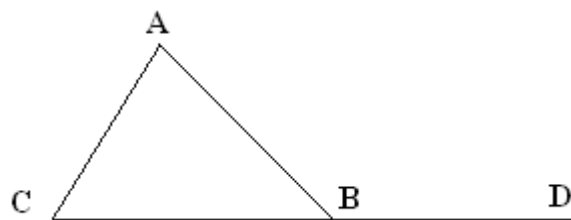


Figura II.107. $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$

$$m(\hat{ABD}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^\circ - m(\hat{ABC})$$

Orice triunghi are șase unghiuri exterioare.

F.II.2. MEDIANA. CONCURENȚA MEDIANELOR UNUI TRIUNGHI

Mediana unui triunghi este un segment determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse. Orice triunghi are trei mediane.

Teoremă (teorema de concurență a medianelor unui triunghi): Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul lor de concurență se notează cu G și se numește **centrul de greutate al triunghiului**. G se află pe fiecare mediană la două treimi față de vârf și o treime față de bază - figura II.108.

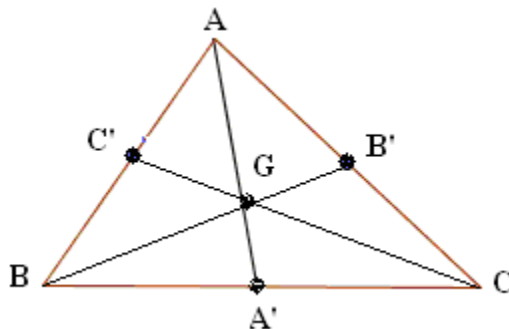


Figura II.108. Teorema de concurență a medianelor

[AA'], [BB'], [CC'] sunt medianele $\triangle ABC$, G = centrul de greutate

$$AG = \frac{2}{3} \cdot AA'; \quad BG = \frac{2}{3} \cdot BB'; \quad CG = \frac{2}{3} \cdot CC'; \quad GA' = \frac{1}{3} \cdot AA'; \quad GB' = \frac{1}{3} \cdot BB'; \quad GC' = \frac{1}{3} \cdot CC'$$

Exemplu: Dacă în figura II.108 se știe că: $AA' = 15\text{cm}$, $BG = 12\text{cm}$, $GC' = 4,5\text{cm}$, aflați AG, GB', CC'.

Rezolvare: $AG = \frac{2}{3} \cdot AA' = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10\text{cm}$; $GB' = \frac{1}{3} \cdot BB' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot BG = 6\text{cm}$; $CC' = 3 \cdot GC' = 13,5\text{cm}$.

F.II.3. PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI ISOSCEL

Triunghiul isoscel este triunghiul care are două laturi congruente.

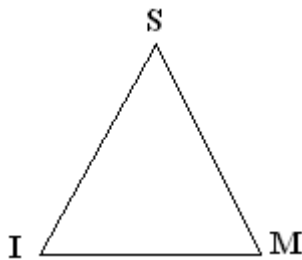


Figura II.109. $\triangle SIM$ isoscel

cu [IM] bază, $\hat{S}$ - unghiul opus bazei, $\hat{I}$, $\hat{M}$ - unghiurile alăturate bazei

Teoremă: Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate sunt congruente.

Teoremă: Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

Teoremă: Bisectoarea unghiului opus bazei unui triunghi isoscel este înălțime.

Teoremă: Dacă bisectoarea unui unghi al unui triunghi este și înălțime a triunghiului, atunci triunghiul este isoscel.

Teoremă: Bisectoarea unghiului opus bazei unui triunghi isoscel este înălțime, mediană și mediatoare.

Teoremă: Dacă mediana bazei este și bisectoarea unghiului opus bazei, atunci triunghiul este isoscel.

Teoremă: Dacă unul din vârfurile unui triunghi aparține mediatoarei laturii opuse, atunci triunghiul este isoscel, iar mediatoarea este bisectoare, mediană și înălțime.

Teoremă: Oricare ar fi un triunghi isoscel, mediatoarea bazei triunghiului este axă de simetrie a triunghiului.

F.II.4. PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI ECHILATERAL

Triunghiul echilateral este un triunghi cu toate laturile egale – *figura II.52.*

Teoremă: Unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente.

Teoremă: Dacă unghiurile unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este echilateral.

Teoremă: Într-un triunghi echilateral bisectoarea, înălțimea, mediatoarea și mediana corespunzătoare aceleași laturi coincid.

F.II.5. PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI DREPTUNGHIC

Triunghiul dreptunghic este triunghiul care are un unghi drept. Latura care se opune unghiului drept se numește **ipotenuză** $[AC]$, iar celelalte două laturi $[AR]$, $[RC]$ se numesc **catete** – *figura II.54.*

Triunghiul dreptunghic isoscel este un triunghi dreptunghic cu catetele congruente.

Teoremă: Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic isoscel au măsura de 45° fiecare.

Teoremă: Oricare ar fi un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Teorema reciprocă: Dacă mediana unui triunghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic și are ipotenză latura corespunzătoare medianei.

Teoremă (teorema 30 – 60 – 90): Oricare ar fi un triunghi dreptunghic cu măsura unui unghi de 30° , cateta ce se opune acestui unghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Teoremă (reciproca teoremei 30 – 60 – 90): Dacă o catetă a unui triunghi dreptunghic are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci unghiul ce se opune catetei are măsura de 30° .

F.II.6. RELAȚII ÎNTRE LATURILE ȘI UNGHIIURILE UNUI TRIUNGHI

Teoremă: Oricare ar fi un triunghi cu două laturi necongruente, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare.

Teoremă (teorema reciprocă): Oricare ar fi un triunghi cu două unghiuri necongruente, unghiului mai mare i se opune latura mai mare.

Teoremă: Suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decât lungimea celei de-a treia latură.

F.II.7. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Demonstrați că un triunghi isoscel care are un unghi cu măsura de 60° este echilateral.

Demonstrație: Vom face analiza pe figura II.109, care este un triunghi isoscel de bază [IM]. Putem aborda această problemă sub 2 aspecte:

- În $\triangle SIM$ avem: $[SI] \equiv [SM]$ și $\hat{I} \equiv \hat{M}$.

Presupunem că $m(\hat{I}) = 60^\circ$,

$$\Rightarrow m(\hat{I}) = m(\hat{M}) = 60^\circ, \text{ dar cum } m(\hat{I}) + m(\hat{M}) + m(\hat{S}) = 180^\circ \Rightarrow m(\hat{S}) = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ$$

$$\Rightarrow m(\hat{S}) = 60^\circ.$$

- Presupunem că $m(\hat{S}) = 60^\circ$.

Din datele problemei știm că $\hat{I} \equiv \hat{M}$ și că $m(\hat{I}) + m(\hat{M}) + m(\hat{S}) = 180^\circ$, adică

$$2 \cdot m(\hat{I}) + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2 \cdot m(\hat{I}) = 120^\circ \Rightarrow m(\hat{I}) = m(\hat{M}) = 60^\circ.$$

Prin urmare, putem concluziona:

Orice triunghi isoscel care are un unghi cu măsura de 60° este echilateral.

2. Fie un triunghi dreptunghic $\triangle ABC$ cu ipotenuza [BC], $m(\hat{B}) = 30^\circ$, $MN \perp AB$ și MB este

$\frac{1}{3}$ din BC – figura II.110. Demonstrați că: $MN = \frac{1}{3} AC$.

Demonstrație:

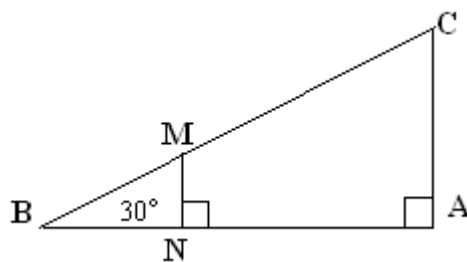


Figura II.110. Desenul problemei 2 (F.II.7)

$$\begin{cases} m(\hat{A}) = 90^\circ \\ m(\hat{B}) = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow AC = \frac{1}{2} \cdot BC$$

$$\text{În } \triangle MNB, m(\hat{B}) = 30^\circ, MN \perp AB \Rightarrow MN = \frac{1}{2} \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot AC \Rightarrow MN = \frac{1}{3} AC.$$

3. Fie triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu baza $[BC]$ și $[AD]$ înălțime. Dacă $BD = \frac{1}{2} \cdot AB$, demonstrați că $\triangle ABC$ este echilateral.

Demonstrație: În figura II.111 construim desenul.

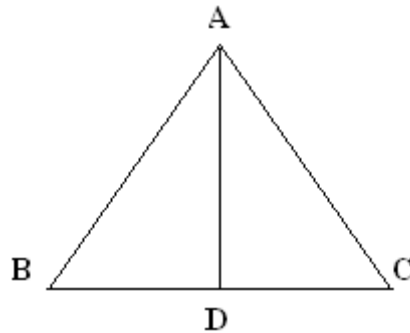


Figura II.111. Desenul problemei 3 (F.II.7)

$$m(\hat{D}) = 90^\circ, AD \perp BC \Rightarrow BD = \frac{AB}{2} \Rightarrow m(\hat{BAD}) = 30^\circ, m(\hat{B}) = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ este echilateral.}$$

4. Fie triunghiul echilateral $\triangle ABC$ și D punctul ce aparține semidreptei opuse semidreptei $[BA]$, astfel încât $[BD] \equiv [AC]$. Demonstrați că $m(\hat{BCD}) = 30^\circ$.

Demonstrație: În figura II.112 construim desenul.

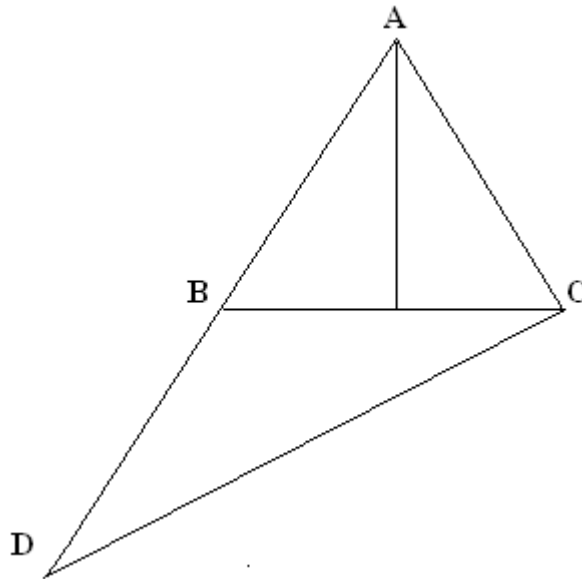


Figura II.112. Desenul problemei 4 (F.II.7)

$$\triangle BCD \text{ este isoscel, deoarece } \begin{cases} [BD] \equiv [AC] \\ [BC] \equiv [AC] \end{cases} \Rightarrow [BC] \equiv [BD]$$

$$m(\hat{BCD}) = \left[180^\circ - m(\hat{DBC}) \right] : 2 = \left[180^\circ - 120^\circ \right] : 2 = 30^\circ$$

$$\text{Deci, } m(\hat{BCD}) = 30^\circ.$$

5. Medianele $[BE]$ și $[CD]$ ale unui triunghi isoscel $\triangle ABC$ cu baza $[BC]$ se intersectează în O . Demonstrați că $AO \perp BC$.

Demonstrație: În figura II.113 construim desenul.

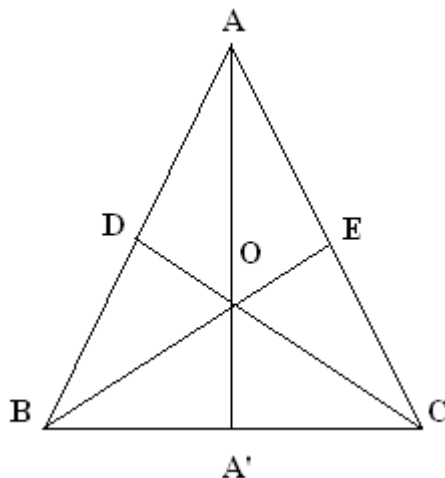


Figura II.113. Desenul problemelor 5,7 (F.II.7)

$\triangle ABC$ este isoscel cu baza $[BC]$

$[BE]$ și $[CD]$ sunt mediane

$[AA'] \cap [BE] \cap [CD] = \{O\}$ = centru de greutate

Rezultă că AO este mediană.

Dar AO este mediană în triunghiul isoscel $\triangle ABC$, rezultă că este și înălțime $\Rightarrow AO \perp BC$.

6. Fie un triunghi dreptunghic $\triangle ABC$, în care $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $[AD]$ este înălțime.

Demonstrați că :

a) $AD \leq \frac{BC}{2}$;

b) dacă $AD = \frac{BC}{2}$, atunci $\hat{B} \equiv \hat{C}$;

c) $AD < \frac{1}{4} \cdot (AB + BC + CA)$.

Demonstrație: În figura II.114 construim desenul.

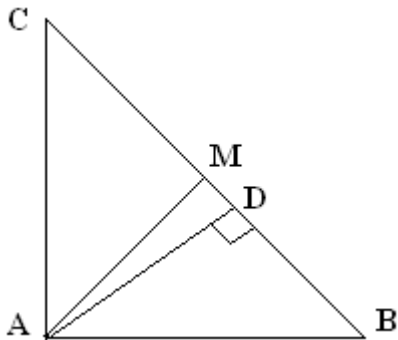


Figura II.114. Desenul problemei 6 (F.II.7)

a) Fie AM mediană în $\triangle ABC$. În, $m(\hat{D}) = 90^\circ \Rightarrow AD < AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AD < \frac{BC}{2}$.

b) $AD = \frac{BC}{2}$ și $AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AD = AM$, iar înălțimea este și mediană $\Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel,
 deci $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

c) în $\triangle ABD$, $AD < AB$; în $\triangle ADC$, $AD < AC$.

Din demonstrația a) avem: $AD < \frac{BC}{2} \Rightarrow 2 \cdot AD < BC$

Adunând cele trei relații obținem:

$$AD + AD + 2 \cdot AD < AB + AC + BC \Rightarrow 4 \cdot AD < AB + AC + BC \Rightarrow AD < \frac{1}{4} \cdot (AB + BC + CA).$$

7. Demonstrați că medianele corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

Demonstrație: Utilizăm figura II.113 pentru rezolvarea problemei.

$\triangle ABC$ - isoscel $\Rightarrow [AB] \equiv [AC]$

$[BE], [CD]$ - mediane $\Rightarrow \begin{cases} [AD] \equiv [BD] \\ [AE] \equiv [EC] \end{cases} \Rightarrow [AD] \equiv [BD] \equiv [AE] \equiv [EC]$

Analizând triunghiurile $\triangle ABE$ și $\triangle ACD \Rightarrow \begin{cases} [AB] \equiv [AC] \\ [AE] \equiv [AD] \\ \hat{BAC} \equiv \hat{CAB} \end{cases} \xrightarrow{\text{LUL}} \triangle ABE \equiv \triangle ACD \Rightarrow [BE] \equiv [CD].$

8. Fie un triunghi dreptunghic $\triangle ABC$ cu ipotenuza $[BC]$. Dacă $m(\hat{B}) = 75^\circ$ și lungimea

înălțimii AD este de 2 cm, calculați lungimea ipotenuzei.

Demonstrație: În figura II.115 construim desenul.

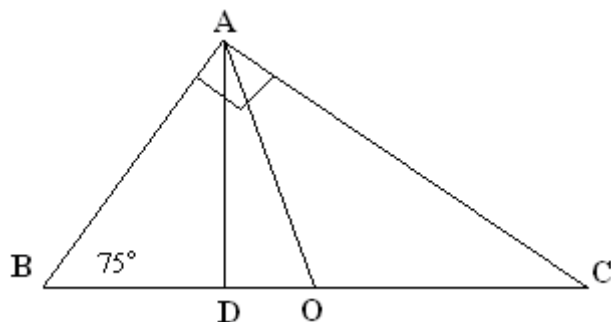


Figura II.115. Desenul problemei 8 (F.II.7)

În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, AO este mediană, iar AD este înălțime.

$$\text{Deci, } AO = \frac{BC}{2} = BO \Rightarrow m(\hat{AOB}) = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$$

În dreptunghic $\triangle ADC$, $m(\hat{D}) = 90^\circ$ aplicând teorema 30-60-90

$$\Rightarrow AD = \frac{AO}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BC}{2} \right) = \frac{1}{4} \cdot BC \Rightarrow 2 = \frac{1}{4} \cdot BC \Rightarrow BC = 8 \text{ cm}.$$

9. Măsurile unghiurilor $\hat{BAC}$, $\hat{CBA}$, $\hat{ACB}$ ale unui triunghi sunt respective proporționale cu numerele 3, 2 și 1. Știind că M este mijlocul laturii [BC], calculați perimetrul $\triangle ABM$, știind că $BC = 10\text{cm}$.

Demonstrație: În figura II.116 construim desenul.

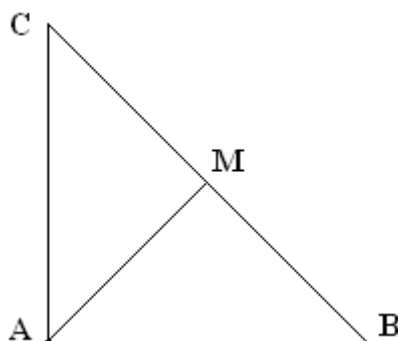


Figura II.116. Desenul problemei 9 (F.II.7)

Fie A, B, C măsurile unghiurilor.

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} = \frac{A+B+C}{3+2+1} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ \Rightarrow A = 90^\circ; B = 60^\circ; C = 30^\circ.$$

În $\triangle ABC$, AM este mediană, deci $AM = \frac{BC}{2} = MB \Rightarrow \triangle ABM$ este isoscel cu $m(\hat{B}) = 60^\circ$, rezultă că $\triangle ABM$ este echilateral, iar perimetrul va fi: $P_{\triangle ABM} = 3 \cdot AM = 3 \cdot 5 = 15\text{ cm}$.

10. Fie un triunghi $\triangle AOB$ și un punct C, astfel încât $O \in (AC)$. Paralela prin C la AB intersectează BO în D. Dacă $\hat{ABO} > \hat{BAO}$, demonstrați că $AC > BD$.

Demonstrație: În figura II.117 construim desenul.

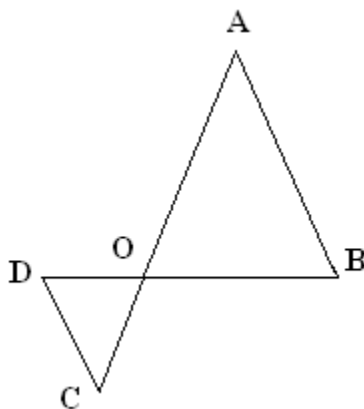


Figura II.117. Desenul problemei 10 (F.II.7)

În $\triangle AOB$, avem $m(\hat{ABO}) > m(\hat{BAO}) \Rightarrow AO > BO$.

$$DC \parallel AB \Rightarrow \hat{BAO} \equiv \hat{OCD} \text{ și } \hat{OBA} \equiv \hat{ODC}$$

Rezultă că $\hat{ODC} > \hat{OCD} \Rightarrow OC > OD$

$$AO + OC > BO + OD \Rightarrow AC > BD$$