

Motto:

*„Algebra și geometria sunt singurele provincii ale cugetării
unde domnește pacea.”*

Maria Agnezi

Partea a III-a
PROBLEME DE SINTEZĂ
pentru clasa a VI-a



III.1. PROBLEME DATE LA OLIMPIADE/CONCURSURI/EVALUĂRI

1. În urma unui concurs, celor trei premianți li se împarte o sumă de bani astfel: unul dintre ei primește $\frac{1}{4}$ din suma întreagă, al doilea primește $\frac{1}{6}$ din întreaga sumă, iar al treilea primește restul de 413 lei. Calculați suma primită de fiecare premiant.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa I – 16.10.2010, clasa a VI-a*

Rezolvare:

Primii doi premianți au primit la un loc: $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}$ din suma întreagă, rezultă

că al treilea premiant a obținut diferența de $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ din suma întreagă

$\frac{1}{12}$ din sumă reprezintă $413 : 7 = 59$ lei

Primul a primit $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ din sumă, adică $3 \cdot 59 = 177$ lei

Al doilea a primit $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ din sumă, adică $2 \cdot 59 = 118$ lei

2. Se consideră numerele $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 \cdot 2$, $a_3 = a_2 \cdot 3$, ..., $a_{10} = a_9 \cdot 10$, iar numerele

$b_1 = a_1 + 3$, $b_2 = a_2 + 3$, ..., $b_{10} = a_{10} + 3$.

a) Calculați a_7 ;

b) Determinați penultima cifră a numărului a_9 ;

c) Determinați valorile lui $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$ pentru care numărul b_n este pătrat perfect.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa I – 16.10.2010, clasa a VI-a*

Rezolvare:

a) $a_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$;

b) $a_9 = a_7 \cdot 8 \cdot 9 = 5040 \cdot 72 = 362880$, penultima cifră este 8;

c) Numerele $b_1 = 4 = 2^2$, $b_3 = 9 = 3^2$ sunt pătrate perfecte.

$b_4 = 27$ nu este pătrat perfect.

Pentru $n \geq 5$, ultima cifră a numărului b_n este 3, deci b_n nu este pătrat perfect.

3. Numărul de pătrate perfecte din mulțimea $P = \{0^1, 1^2, 2^3, 3^4, 4^5, 5^6\}$ este egal cu...

*Evaluare în educație la matematică
Etapa I – 16.10.2010, clasa a VI-a*

Rezolvare: $P = \{0^1, 1^2, 2^3, 3^4, 4^5, 5^6\} = \{0^2, 1^2, 2^3, (3^2)^2, (2^5)^2, (5^3)^2\}$

Numărul de pătrate perfecte din mulțimea P este egal cu 5.

4. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^p - p^2, p \in \mathbb{N}, 0 \leq p < 6\}$. Numărul elementelor mulțimii A este egal cu...

*Evaluare în educație la matematică
Etapa I – 16.10.2010, clasa a VI-a*

Rezolvare:

Pentru $p = 0 \Rightarrow A = \{1\}$

Pentru $p = 1 \Rightarrow A = \{1\}$

Pentru $p = 2 \Rightarrow A = \{0\}$

Pentru $p = 3 \Rightarrow A = \{-1\} \notin \mathbb{N}$

Pentru $p = 4 \Rightarrow A = \{0\}$

Pentru $p = 5 \Rightarrow A = \{7\}$

Numărul elementelor mulțimii A este egal cu 3.

5. Un poet vrea să scrie o poezie cu formă fixă și, după fiecare patru versuri, pune semnul exclamării, iar după fiecare șase versuri, semnul întrebării. Dacă se întâmplă să fie nevoie să pună ambele semne, va folosi puncte de suspensie, nescriind deci la sfârșitul aceluși vers nici semnul exclamării, nici semnul întrebării:

a) Determinați numărul semnelor folosite, dacă poezia ar avea 12 versuri;

b) Determinați numărul semnelor folosite, dacă poezia ar avea 29 versuri;

c) Știind că poetul a folosit 31 de semne de exclamare, 15 semne de întrebare și a pus de 15 ori puncte de suspensie, să se determine numărul de versuri ale poeziei, știind că acest număr este impar.

*Concursul Național Interdisciplinar ± Poezie,
Etapa județeană – 27.03.2010, clasa a VI-a*

Rezolvare:

a) Dacă poezia are 12 versuri avem:

$M_4 = \{4; 8; 12\} \Rightarrow$ că ar fi posibile 3 semne de exclamare

$M_6 = \{6; 12\} \Rightarrow$ că ar fi posibile 2 semne de întrebare

Dar 12 este divizibil și cu 4 și cu 6, deci la versul 12 se pun puncte de suspensie, rămânând 2 semne de exclamare la versurile 4 și 8, respectiv 1 semn de întrebare la versul 6.

b) Dacă poezia are 29 versuri avem:

$M_4 = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28\} \Rightarrow$ că ar fi posibile 7 semne de exclamare

$M_6 = \{6; 12; 18; 24\} \Rightarrow$ că ar fi posibile 4 semne de întrebare

Dar 12 și 24 sunt divizibile și cu 4 și cu 6, deci la versurile 12 și 24 se pun puncte de suspensie, rămânând 5 semne de exclamare la versurile 4, 8, 16, 20, 28, respectiv 2 semne de întrebare la versurile 6, 18.

c) Raționăm invers. Avem de 15 ori puncte de suspensie, deci numărul de versuri este între $15 \cdot 12 = 180$ și $16 \cdot 12 - 1 = 191$. Numărul de versuri cu numărul de ordine multiplu de 6 este $15 + 15 = 30$, deci numărul de versuri este între $30 \cdot 6 = 180$ și $31 \cdot 6 - 1 = 185$. În fine, numărul versurilor cu numărul de ordine 4 este $31 + 15 = 46$, deci numărul total de versuri este între $46 \cdot 4 = 184$ și $47 \cdot 4 - 1 = 187$. Așadar, singurele valori posibile sunt 184 și 185, dar numărul de versuri este impar, deci poezia are 185 de versuri.

6. Dacă $x + 3y = 10$ și $2y + z = 12$, atunci media aritmetică a numerelor $m = 3x + 11y + z$ și $n = x + 9y + 3z$ este...

Concursul Național de matematică Lumina Math,
Ediția a XIV-a, 2010, clasa a VI-a

Rezolvare:

$$M_a = \frac{m+n}{2} = \frac{3x+11y+z+x+9y+3z}{2} = \frac{4x+20y+4z}{2} = 2x+10y+2z$$

$$\begin{cases} x+3y=10 \\ 2y+z=12 \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+6y=20 \\ 4y+2z=24 \end{cases} \Rightarrow 2x+6y+4y+2z=44 \Rightarrow 2x+10y+2z=M_a=44$$

7. Știind că $4a + 5b + 2c = 16$ și $2a + b + 2c = 6$, produsul $(a + 2b) \cdot (3a + 3b + 2c)$ este egal cu...

Concursul Național de matematică Lumina Math,
Ediția a XIV-a, 2010, clasa a VI-a

Rezolvare:

$$\begin{cases} 4a+5b+2c=16 \\ 2a+b+2c=6 \end{cases} \Rightarrow 4a+5b+2c-2a-b-2c=16-6 \Rightarrow 2a+4b=10 \mid :2 \Rightarrow a+2b=5$$

$$\begin{cases} 4a+5b+2c=16 \\ 2a+b+2c=6 \end{cases} \Rightarrow 4a+5b+2c+2a+b+2c=16+6 \Rightarrow 6a+6b+4c=22 \mid :2 \Rightarrow 3a+3b+2c=11$$

Rezultă că: $(a + 2b) \cdot (3a + 3b + 2c) = 5 \cdot 11 = 55$.

8. Suplementul complementului unui unghi X are măsura de 120° .

Concursul Național de matematică Lumina Math,
Ediția a XIV-a, 2010, clasa a VI-a

Rezolvare:

$$180^\circ - (90^\circ - X) = 120^\circ \Rightarrow 90^\circ + X = 120^\circ \Rightarrow X = 30^\circ$$

9. Suma a două unghiuri adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ este egală cu "m", $0^\circ < m < 180^\circ$. Dacă

$$\frac{m(\widehat{COB})}{m(\widehat{AOB})} = \frac{1}{n}, \text{ care este măsura } \widehat{AOB} \text{ în funcție de m și n?}$$

Concursul Național de matematică Lumina Math,
Ediția a XIV-a, 2010, clasa a VI-a

Rezolvare:

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{COB}) = m \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m - m(\widehat{COB})$$

$$\frac{m(\widehat{COB})}{m(\widehat{AOB})} = \frac{1}{n} \Rightarrow n \cdot m(\widehat{COB}) = m(\widehat{AOB}) \Rightarrow n \cdot m(\widehat{COB}) + m(\widehat{COB}) = m \Rightarrow m(\widehat{COB}) \cdot (n+1) = m$$

$$m(\widehat{COB}) = \frac{m}{n+1} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m - m(\widehat{COB}) = m - \frac{m}{n+1} = \frac{m \cdot (n+1) - m}{n+1} = \frac{mn + m - m}{n+1} = \frac{mn}{n+1}$$

10. Se consideră unghiurile adiacente $\angle AOB$ și $\angle BOC$. Bisectoarele unghiului $\angle AOB$ formează cu semidreapta OC un unghi cu măsura de 75° , iar bisectoarea unghiului $\angle BOC$ formează cu semidreapta OA un unghi drept. Măsura unghiului $\angle AOC$ este egală cu...

Concursul Național de matematică Lumina Math,
Ediția a XIV-a, 2010, clasa a VI-a

Rezolvare:

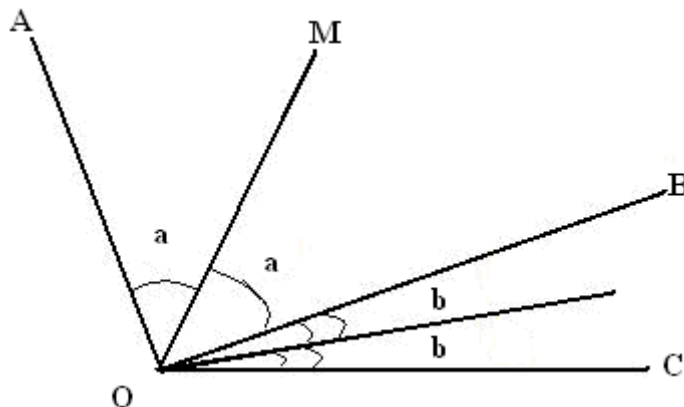


Figura III.1. Desenul problemei 10 (III.1)

$$m(\angle AOB) = 2a$$

$$m(\angle BOC) = 2b$$

$$\begin{cases} a + 2b = 75^\circ \\ b + 2a = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 3a + 3b = 165^\circ \mid :3 \Rightarrow a + b = 55^\circ \Rightarrow \begin{cases} a = 35^\circ \\ b = 20^\circ \end{cases}$$

11. Efectuați următoarele operații de unghiuri, precizând rezultatul final:

$$(86^\circ - 7^\circ 12' 54'') : 7 + (11^\circ 45' - 7^\circ 12' 54'') \cdot 7.$$

Concursul Național de matematică Lumina Math,
Ediția a XIV-a, 2010, clasa a VI-a

Rezolvare:

$$\begin{aligned} (86^\circ - 7^\circ 12' 54'') : 7 + (11^\circ 45' - 7^\circ 12' 54'') \cdot 7 &= (85^\circ 59' 60'' - 7^\circ 12' 54'') : 7 + (11^\circ 44' 60'' - 7^\circ 12' 54'') \cdot 7 = \\ &= 78^\circ 47' 6'' : 7 + 4^\circ 32' 6'' \cdot 7 = 11^\circ 15' 18'' + 31^\circ 44' 42'' = 43^\circ \end{aligned}$$

12. Dacă B este simetricul punctului A față de punctul C și lungimea segmentului AB este 10cm, atunci lungimea segmentului $3BC + 4AC$ este:

Concursul Național de matematică Lumina Math,
Ediția a XIV-a, 2010, clasa a VI-a

Rezolvare:

Din enunțul problemei rezultă: $AC=BC$, iar $AB=10$ cm, deci $AC=BC=5$ cm
 $3BC + 4AC = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 35$ cm

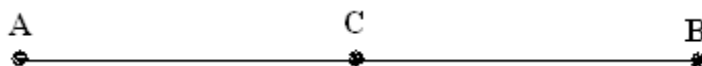


Figura III.2. Desenul problemei 12 (III.1)

13. Într-o urnă sunt 2011 bile. Doi elevi A și B se joacă astfel: mai întâi elevul A extrage din urnă cel puțin o bilă și cel mult 10 bile, apoi elevul B extrage din urnă cel puțin o bilă și cel mult 10 bile, apoi elevul A extrage din urnă cel puțin o bilă și cel mult 10 bile și tot așa până se termină bilele din urnă. Câștigă elevul care extrage ultima bilă din urnă. Arătați că există o strategie ca unul dintre elevi să câștige tot timpul.

*Olimpiada Națională de Matematică, etapa județeană
Bihor, 12.03.2011*

Rezolvare:

Deoarece un jucător ia minim o bilă și maxim 10 bile la o extragere, înseamnă că jucătorul A poate să conducă jocul, astfel încât numărul de bile din urnă să scadă tot timpul cu $1 + 10 = 11$ bile astfel: dacă B scoate b bile atunci A scoate a bile, așa încât $a + b = 11$.

Avem $2011 = 11 \cdot 182 + 9$.

Jucătorul A scoate mai întâi 9 bile, astfel în urnă rămân $11 \cdot 182$ bile.

Jucătorul B scoate b bile, atunci A scoate a bile, așa încât $a + b = 11$ și tot așa, astfel încât după ce A scoate bile, în urnă rămâne un multiplu de 11 de bile.

Dacă A respectă această regulă până la sfârșit, sigur va câștiga.

14. Să se determine numărul natural n și numerele naturale prime p și q , $p < q$, care verifică egalitatea: $p^q + q^p - 5^n = 8360$.

*Olimpiada Națională de Matematică, etapa județeană
Botoșani, 02.04.2011*

Rezolvare:

5^n are ultima cifră 1 sau 5

Dacă p și q au aceeași paritate, atunci relația este falsă.

Aceasta implică $p = 2$ și q impar.

Ultima cifră a lui 2^q este 2 sau 8.

Ultima cifră a lui q^2 este 1 sau 9.

Ultima cifră a lui $2^q + q^2$ este 1, 3, 7, 9, implică $n = 0$.

Rezultă: $q = 13$.

15. Calculați valoarea lui x din:

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + 2010}{2010 - 2009 + 2008 - 2007 + \dots + 4 - 3 + 2 - 1} = \frac{x}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2010 \cdot 2011}}$$

*Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală
Bihor, 12.02.2011*

Rezolvare:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2010 = 1005 \cdot 2011$$

$$2010 - 2009 + 2008 - 2007 + \dots + 4 - 3 + 2 - 1 = 1005$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2010 \cdot 2011} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} = \frac{2010}{2011}$$

Prin înlocuire în relația inițială, obținem:

$$\frac{1005 \cdot 2011}{1005} = \frac{x}{\frac{2010}{2011}} \Rightarrow x = 2010$$

16. Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate prin puteri ale numărului 5. Aflați numărul minim de unghiuri în condițiile date. (GM 10/2010)

*Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală
Bihor, 12.02.2011*

Rezolvare:

Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360^0 și $5^4 > 360^0 \Rightarrow n \leq 3$.

Pentru a avea cât mai puține unghiuri măsurile lor trebuie să fie cât mai mari.

Deoarece $5^3 = 125$ iar $3 \cdot 5^3 > 360^0$ și $2 \cdot 5^3 < 360^0$ obținem că 2 unghiuri au măsura 5^3 grade.

Observăm că putem alege 4 unghiuri de măsură 5^2 grade și 2 unghiuri de măsură 5^1 grade:

$$360^0 = 2 \cdot (5^3)^0 + 4 \cdot (5^2)^0 + 2 \cdot (5^1)^0$$

Deci, numărul minim de unghiuri este 8.

17. Punctul O este situat pe n drepte diferite ($n \geq 2$). Toate unghiurile formate în jurul punctului O sunt ascuțite.

a) Exprimați, în funcție de n , numărul de unghiuri formate în jurul punctului O ;

b) Determinați cea mai mică valoare posibilă a numărului n ;

c) Dacă $n = 3$, arătați că cel puțin două dintre unghiurile formate în jurul punctului O au măsuri mai mari sau egale cu 60^0 .

*Evaluare în educație la matematică
Etapa a II-a – 20.02.2010, clasa a VI-a*

Rezolvare:

a) Numărul de unghiuri este egal cu $2n$.

b) Dacă $n = 2$, în jurul punctului O sunt patru unghiuri, 2 ascuțite și 2 obtuze. Deci $n \geq 3$.

Pentru $n = 3$ există configurație favorabilă.

c) Dacă toate măsurile celor 6 unghiuri ar fi mai mici decât 60^0 , atunci suma lor ar fi mai mică decât 360^0 , contradicție. Deci, cel puțin unul dintre unghiuri are măsura mai mare sau egală cu 60^0 .

Cum cele trei drepte formează trei perechi de unghiuri opuse la vârf congruente, rezultă că cel puțin două dintre unghiuri au măsuri mai mari sau egale cu 60^0 .

18. Se consideră numărul $a = 8^1 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{20}$.

a) Determinați restul împărțirii numărului a la 10.

b) Arătați că a este multiplu al lui 9.

c) Arătați că numărul a nu este pătrat perfect.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa a II-a – 19.02.2011, clasa a VI-a*

Rezolvare:

a) Grupând termenii câte patru consecutivi, formăm 5 grupe. Ultima cifră a sumei din fiecare grupă este 0. Rezultă că a se divide cu 10. Restul cerut este 0.

b) Grupând termenii câte doi consecutivi, formăm 10 grupe. Suma numerelor din fiecare grupă se divide cu 9. Rezultă că a se divide cu 9.

c) Numărul a se divide cu 8, dar nu se divide cu 16, deci nu este pătrat perfect.

19. Măsurile unghiurilor unui triunghi ABC sunt direct proporționale cu 2; 7 și 9. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa a III-a – 21.05.2011, clasa a VI-a*

Rezolvare:

Fie A , B și C măsurile unghiurilor triunghiului ABC . Avem: $\frac{A}{2} = \frac{B}{7} = \frac{C}{9}$.

$$\text{Avem: } \frac{A}{2} = \frac{B}{7} = \frac{C}{9} = \frac{A+B+C}{18} = \frac{180^\circ}{18} = 10^\circ.$$

Rezultă că $C = 9 \cdot 10^\circ = 90^\circ$ deci triunghiul ABC este dreptunghic.

20. Numerele întregi x, y și z verifică relațiile: $x \leq y - 3z - 2$, $y \geq -4x - 2z + 3$, $z \geq 3x + 2y - 5$.
Arătați că numărul $x + y - z$ se divide cu 3.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa competițională – 12.06.2011, clasa a VI-a*

Rezolvare:

Relațiile din enunț sunt echivalente cu

$$-x + y - 3z - 2 \geq 0$$

$$4x + y + 2z - 3 \geq 0$$

$$-3x - 2y + z + 5 \geq 0$$

Adunând membru cu membru cele trei relații obținem $0 \geq 0$.

Deducem că toate inegalitățile devin egalități.

Adică $4x + y + 2z - 3 = 0$, deci $x + y - z = 3 - 3x - 3z = M_3$.

21. Determinați numerele naturale nenule a, b, c și numărul natural prim x știind că, $\frac{a}{2} = \frac{b}{5}$,
 $\frac{b}{x} = \frac{c}{4}$, iar $a^2 + b^2 + c^2$ este număr prim.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa competițională – 12.06.2011, clasa a VI-a*

Rezolvare:

Se obține șirul de rapoarte egale: $\frac{a}{2x} = \frac{b}{5x} = \frac{c}{20} = k$.

Se demonstrează că $k \in \mathbb{N}$.

Obținem: $k^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{29x^2 + 400}$, de unde deducem $k = 1$.

Dacă $x^2 = M_3 + 1$, numărul $29x^2 + 400$ se divide cu 3, contradicție.

Dacă $x = 3$, numărul $29x^2 + 400$ este egal cu 661 care este număr prim.

Obținem: $a = 6$, $b = 15$, $c = 20$.

22. a) Arătați că este posibil să așezăm pe un rând 20 de numere întregi nenule (nu neaparat diferite) cu suma strict pozitivă, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie strict negativă.

b) Demonstrați că nu se pot așeza pe un cerc 20 de numere întregi cu suma strict pozitivă, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie strict negativă.

*Olimpiada Națională de Matematică, etapa națională, clasele V-VI
Arad, 2011*

Rezolvare:

a) Un exemplu este: 17, -9, -9, 17, -9, -9, ..., 17, -9, -9, 17, -9.

b) Presupunem că numerele $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ sunt așezate pe cerc în această ordine, în sensul de mișcare al acelor ceasornicului, a_1 fiind cel mai mare număr.

Dacă $a_1 < 0$, atunci toate numerele sunt negative, deci suma lor este negativă.

Dacă $a_1 > 0$, atunci $a_2 + a_3 < 0$, deci

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{19} + a_{20} + a_1) < 0.$$

23. Într-o urnă sunt bile numerotate de la 3 până la 27.

a) Numărul de bile din urnă este egal cu... .

b) Probabilitatea ca, extrăgând din urnă o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr par este egală cu... .

*Evaluare în educație la matematică
Etapa a III-a – 21.05.2011, clasa a VI-a*

Rezolvare:

a) Numărul de bile din urnă este de 25 de bile.

b) $P = \frac{12}{25} = 0,48$, deoarece din cele 25 de bile doar 12 sunt numerotate cu numere pare.

24. Considerăm numerele naturale nenule a, b, c , astfel încât $(a+1)^b = (a+25)^c$. Demonstrați că $b+c$ este multiplu de 4.

*Olimpiada Națională de Matematică, etapa națională, clasele V-VI
Arad, 2011*

Rezolvare: Este evident că $b > c$, deci putem scrie $(a+25)^c = (a+1)^c \cdot (a+1)^{b-c}$, de unde

$(a+1)^c \mid (a+25)^c$, adică $a+1 \mid a+25$.

Obținem $a+1 \mid 24 \Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 23\}$.

Dacă $a=1 \Rightarrow 2^b = 2^c \cdot 13^c$ imposibil.

Dacă $a=2 \Rightarrow 3^b = 27^c \Rightarrow b=3c, c \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a=3 \Rightarrow 4^b = 4^c \cdot 7^c$ imposibil.

Dacă $a=5 \Rightarrow 2^b \cdot 3^b = 2^c \cdot 3^c \cdot 5^c$ imposibil.

Dacă $a=7 \Rightarrow 8^b = 32^c \Rightarrow b=5k, c=3k, k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a=11 \Rightarrow 2^{2b} \cdot 3^b = 2^{2c} \cdot 3^{2c}$ imposibil.

Dacă $a=23 \Rightarrow 2^{3b} \cdot 3^b = 2^{4c} \cdot 3^c$ imposibil.

În ambele cazuri posibile $b+c$ este multiplu de 4.

25. Determinați cifrele a, b, c, m, n, p pentru care: $\overline{0,(\overline{abc})} \cdot \overline{1,(\overline{mnp})} = 1$.

*Olimpiada Națională de Matematică, etapa națională, clasele V-VI
Arad, 2011*

Rezolvare: $\overline{0,(\overline{abc})} \cdot \overline{1,(\overline{mnp})} = 1 \Leftrightarrow \overline{abc} \cdot (999 + \overline{mnp}) = 37^2 \cdot 3^6$.

Deoarece $37^2 = 1369 > \overline{abc}$, sunt posibile 2 cazuri:

a) Dacă $37 \mid \overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 37 \cdot 3^k, k \leq 2$ (pentru $k \geq 3$ s-ar obține $\overline{abc} \geq 999$, imposibil).

Atunci, $\overline{abc} \leq 333 \Rightarrow 999 + \overline{mnp} \geq 2997$, imposibil.

b) Dacă $37 \nmid \overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 3^k, k \leq 6$.

Cum $999 + \overline{mnp} \leq 999 + 998 = 1997 \Rightarrow \overline{abc} \geq \frac{999^2}{1997}$, deci $\overline{abc} \geq 500$.

Ca urmare, $\overline{abc} = 3^6 = 729$, pentru care se obține $\overline{mnp} = 370$.

III.2. PROBLEME DIN REVISTE DE MATEMATICĂ

1. Aflați pe x din proporția $\frac{2x}{\frac{1}{2}} = \frac{0,2}{(-101+100)^{29}}$ și stabiliți natura sa.

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1350

Rezolvare:

$$\frac{2x}{\frac{1}{2}} = \frac{0,2}{(-101+100)^{29}} \Rightarrow \frac{2x}{0,5} = \frac{0,2}{(-1)^{29}} \Rightarrow \frac{2x}{0,5} = \frac{0,2}{-1} \Rightarrow -2x = \frac{1}{10} \Rightarrow x = -\frac{1}{20}$$

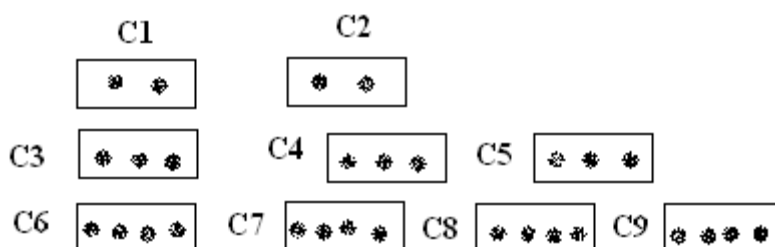
x este număr rațional negativ

2. Într-o cutie sunt 9 cartonașe identice, 2 marcate cu 2 puncte, 3 cu 3 puncte și 4 cu 4 puncte. Extrăgând la întâmplare 2 cartonașe, aflați probabilitatea ca suma punctelor de pe ele să fie:

- a) pară;
b) impară.

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1353

Rezolvare: Notăm cu C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9 cele 9 cartonașe.



Nr. crt.	Combinații	Sumă pară	Nr. crt.	Combinații	Sumă impară
1.	C1-C2	4	1.	C1-C3	5
2.	C1-C6	6	2.	C1-C4	5
3.	C1-C7	6	3.	C1-C5	5
4.	C1-C8	6	4.	C2-C3	5
5.	C1-C9	6	5.	C2-C4	5
6.	C2-C6	6	6.	C2-C5	5
7.	C2-C7	6	7.	C3-C6	7
8.	C2-C8	6	8.	C3-C7	7
9.	C2-C9	6	9.	C3-C8	7
10.	C3-C4	6	10.	C3-C9	7
11.	C3-C5	6	11.	C4-C6	7
12.	C4-C5	6	12.	C4-C7	7
13.	C6-C7	8	13.	C4-C8	7
14.	C6-C8	8	14.	C4-C9	7
15.	C6-C9	8	15.	C5-C6	7
16.	C7-C8	8	16.	C5-C7	7
17.	C7-C9	8	17.	C5-C8	7
18.	C8-C9	8	18.	C5-C9	7

Observație:

Sumele pare sunt egale ca număr cu sumele impare, deci avem un număr de 36 cazuri posibile.

Prin urmare răspunsul la punctele a și b este: $P_p = P_i = \frac{18}{36} = 0,5$.

P_p/P_i – probabilitatea de apariție a sumei pare/impare.

3. Determinați x baza sistemului de numerație, astfel încât:

$$\left[\frac{1}{11_{(x)}} + \frac{1}{33_{(x)}} + \frac{1}{55_{(x)}} \right] \cdot \frac{66_{(x)}}{17_{(x)}} \cdot 13_{(x)} = \frac{69}{10}.$$

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1354

Rezolvare:

$$\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3x+3} + \frac{1}{5x+5} \right] \cdot \frac{6x+6}{x+7} \cdot (x+3) = \frac{69}{10}$$

$$\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3 \cdot (x+1)} + \frac{1}{5 \cdot (x+1)} \right] \cdot \frac{6 \cdot (x+1)}{x+7} \cdot (x+3) = \frac{69}{10}$$

$$\frac{1}{x+1} \cdot \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right] \cdot \frac{6 \cdot (x+1)}{x+7} \cdot (x+3) = \frac{69}{10}$$

$$\frac{23}{15} \cdot \frac{6}{x+7} \cdot (x+3) = \frac{69}{10} \Rightarrow 4 \cdot (x+3) = 3 \cdot (x+7) \Rightarrow 4x+12 = 3x+21 \Rightarrow x=9$$

4. Se dau unghiurile adiacente $\hat{AOB}$ și $\hat{BOC}$, astfel încât bisectoarele lor formează un unghi de 110° . Aflați măsurile unghiurilor $\hat{AOB}$, respectiv $\hat{BOC}$ știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 3^{n+2} și 3^n , unde $n \in \mathbb{N}$.

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1355

Rezolvare:

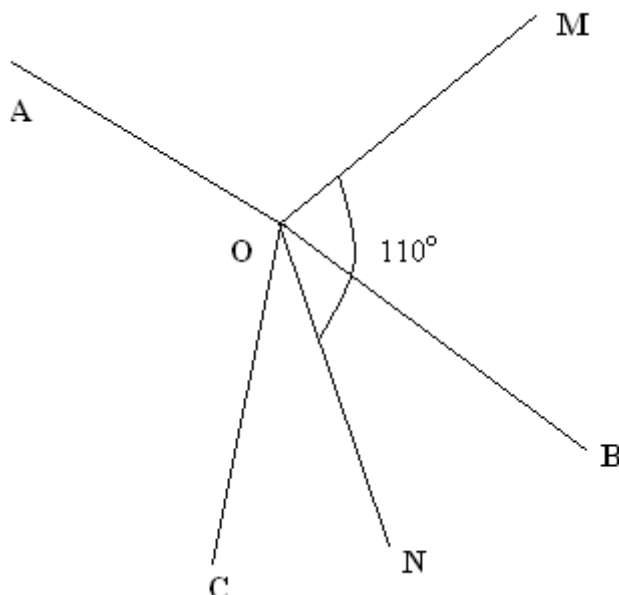


Figura III.3. Desenul problemei 4 (III.2)

Notez: $m\left(\hat{AOB}\right) = a$, $m\left(\hat{BOC}\right) = b$.

Rezultă: $m\left(\hat{AOM}\right) = m\left(\hat{MOB}\right) = \frac{a}{2}$ și $m\left(\hat{BON}\right) = m\left(\hat{CON}\right) = \frac{b}{2}$

Deci, $\frac{a+b}{2} = 110^\circ \Rightarrow a+b = 220^\circ$ și $\frac{a}{3^{n+2}} = \frac{b}{3^n} \Rightarrow a \cdot 3^n = b \cdot 3^n \cdot 9 \Rightarrow a = 9b$

$9b + b = 220^\circ \Rightarrow 10b = 220^\circ \Rightarrow b = 22^\circ \Rightarrow a = 9 \cdot 22^\circ = 198^\circ$.

5. Două unghiuri adiacente sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3, iar complementul unghiului format de bisectoarele lor este de 40° . Determinați măsurile lor.

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1359

Rezolvare: Notez cu a și b cele două unghiuri adiacente.

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k \\ 90^\circ - \frac{a+b}{2} = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = k, & \frac{b}{3} = k \\ 100 = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2k, & b = 3k \\ 100 = 5k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 40, & b = 60 \\ k = 20 \end{cases}$$

6. Găsiți numerele de forma $\overline{ab}$, astfel încât fracția $\frac{\overline{ab} + \overline{ba}}{14} \in \mathbb{N}$.

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1361

Rezolvare:

$$\frac{\overline{ab} + \overline{ba}}{14} = \frac{10a + b + 10b + a}{14} = \frac{11 \cdot (a + b)}{14} \in \mathbb{N}, \text{ dacă și numai dacă}$$

$a + b \in M_{14} = \{0, 14, 28, \dots\}$, a și b – cifre.

Cazuri: $a + b = 0 \Rightarrow$ nu se poate, pentru că ar trebui ca $a = b = 0$.

$$a + b = 14 = 5 + 9 = 9 + 5 = 6 + 8 = 8 + 6 = 7 + 7$$

$a + b = 28 \Rightarrow$ nu se poate, căci a și b sunt cifre.

Deci: $a \in \{5, 9, 6, 8, 7\}$, $b \in \{9, 5, 8, 6, 7\}$.

$$\overline{ab} \in \{59, 95, 68, 86, 77\}.$$

7. Rezolvați ecuația: **a)** $2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot 3^{2009} + 2 \cdot 3^{2010} = x^{2011} - 1$.

b) Arătați că $\frac{3^{2011} - 1}{8} \in \mathbb{N}$.

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1314

Soluție dată de Dzițac Ioana

Rezolvare:

a) Cunoaștem că: $(a - 1) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) = a^n - 1$

$$\text{Atunci: } 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2009} + 3^{2010}) = x^{2011} - 1$$

$$(3 - 1) \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2009} + 3^{2010}) = x^{2011} - 1 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{3^{2011} - 1}{8} = \frac{2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2009} + 3^{2010})}{8} = \frac{2 \cdot [(1 + 3) + 3^2(1 + 3) + \dots + 3^{2009} \cdot (1 + 3)]}{8} =$$

$$\text{b) } = \frac{2 \cdot 4 \cdot (1 + 3^2 + \dots + 3^{2009})}{8} = 1 + 3^2 + \dots + 3^{2009} \in \mathbb{N}$$

8. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale pare mai mic sau egale cu 2010, acesta să fie putere a lui 2? Dar a lui 3?

Revista de matematică Alpha, P.P.VI.1363

Rezolvare:

$$2^0 = 1; 2^1 = 2; 2^2 = 4; 2^3 = 8; 2^4 = 16; 2^5 = 32; 2^6 = 64; 2^7 = 128; 2^8 = 256; 2^9 = 512; 2^{10} = 1024; 2^{11} = 2048 > 2010$$

$$\text{Rezultă că avem 10 cazuri favorabile, deci: } P = \frac{10}{1006} = 0,00994$$

3 la orice putere dă un număr impar, deci, în acest caz, $P = 0$.

9. Calculați suma: $S = 2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \dots + \frac{1025}{1024}$.

Revista de matematică Alpha, P.P.C. VI.2

Rezolvare:

$$S = 2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \dots + \frac{1025}{1024} = 2 + \frac{2+1}{2} + \frac{2^2+1}{2^2} + \frac{2^3+1}{2^3} + \dots + \frac{2^{10}+1}{2^{10}}$$

$$S = 11 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$\text{Folosim formula: } 1 - \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right)$$

Rezultă că:

$$S = 11 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{11}} \right) = 11 + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{11}} \right) = 11 + 2 \cdot \frac{2^{11}-1}{2^{11}} = 11 + \frac{2047}{1024} = 11 + 1 \frac{1023}{1024} = 12 \frac{1023}{1024}$$

$$S = 12 \frac{1023}{1024}$$

10. Fie x, y numere naturale nenule. Demonstrați că, dacă $(x + 4y)$ este divizibil cu 7, atunci $\frac{x + 4y}{2x + y}$ este reducibilă.

Revista de matematică Alpha, P.P.C. VI.1

Rezolvare:

Cum $x + 4y = 7z \Rightarrow x = 7z - 4y$

$$\frac{x + 4y}{2x + y} = \frac{7z}{2 \cdot (7z - 4y) + y} = \frac{7z}{14z - 8y + y} = \frac{7z}{14z - 7y} = \frac{7z}{7 \cdot (2z - y)} \stackrel{(7)}{=} \frac{z}{2z - y}$$

Deoarece fracția s-a simplificat cu 7, rezultă că $\frac{x + 4y}{2x + y}$ este reducibilă.

11. Să se determine cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\frac{n}{2}$ este pătrat perfect și $\frac{n}{7}$ este cub perfect.

Revista de matematică Alpha, P.P.C. VI.3

Rezolvare:

$n \in \mathbb{N}^*$ - minim

$$\frac{n}{2} = a^2 \Rightarrow n = 2 \cdot a^2$$

$$\frac{n}{7} = b^3 \Rightarrow n = 7 \cdot b^3$$

Rezultă că: $n = 2^3 \cdot 7^4$

12. Demonstrați că dacă numerele naturale nenule a, b, c , verifică relația

$$\frac{2010a - 1000b}{2010a + 10b} = \frac{2010b - 1000c}{2010b + 10c} = \frac{2010c - 1000a}{2010c + 10a}, \text{ atunci } a = b = c.$$

Revista de matematică Alpha, P.P.C. VI.4

Rezolvare:

$n \in \mathbb{N}^*$ - minim

$$\frac{2010a - 1000b}{2010a + 10b} = \frac{2010b - 1000c}{2010b + 10c} = \frac{2010c - 1000a}{2010c + 10a} = \frac{2010 \cdot (a + b + c) - 1000 \cdot (a + b + c)}{2010 \cdot (a + b + c) + 10 \cdot (a + b + c)} =$$

$$= \frac{(a + b + c) \cdot (2010 - 1000)}{(a + b + c) \cdot (2010 + 10)} = \frac{1010}{2020} = \frac{1}{2}$$

Din această relație rezultă:

$$\frac{2010a - 1000b}{2010a + 10b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot (2010a - 1000b) = 2010a + 10b \mid : 2 \Rightarrow 2010a - 1000b = 1005a + 5b \mid : 1005$$

$$\Rightarrow a = b \quad (1)$$

$$\frac{2010b - 1000c}{2010b + 10c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot (2010b - 1000c) = 2010b + 10c \mid : 2 \Rightarrow 2010b - 1000c = 1005b + 5c \mid : 1005$$

$$\Rightarrow b = c \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2), rezultă că $a = b = c$.

13. Dacă a, b, c sunt cifre nenule în baza zece, astfel încât $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{dd}$, atunci
 $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = \overline{ddd}$.

Revista de matematică Alpha, P.P.C. VI.5

Rezolvare:

$$10a + b + 10b + c + 10c + a = 10d + d$$

$$11 \cdot (a + b + c) = 11d \Rightarrow a + b + c = d$$

$$\overline{abc} +$$

$$\overline{bca}$$

$$\overline{cab}$$

$$\overline{ddd}$$

Observație: Pe fiecare coloană apare suma $a + b + c = d$.

14. Fie numerele $N_1 = \overline{ab} + \overline{ab}^2$ și $N_2 = \overline{ab} + \overline{ab}^3$. Să se arate că (N_1, N_2) este $\overline{ab}$ sau $2\overline{ab}$ după cum $\overline{ab}$ este număr par sau impar.

Revista de matematică Alpha, C.R. VI.3

Rezolvare:

$$N_1 = \overline{ab} + \overline{ab}^2 = \overline{ab} \cdot (1 + \overline{ab})$$

$$N_2 = \overline{ab} + \overline{ab}^3 = \overline{ab} \cdot (1 + \overline{ab}^2)$$

a) Dacă $\overline{ab}$ este par, rezultă că $1 + \overline{ab}$ este impar, rezultă $(N_1, N_2) = \overline{ab}$,

b) Dacă $\overline{ab}$ este impar, rezultă că $1 + \overline{ab}$ este par, rezultă $(N_1, N_2) = 2 \cdot \overline{ab}$.

15. a) Arătați că $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

b) Aflați toate numerele naturale a și b pentru care $(a^b)^a = a^{b^a}$.

Manuela Prajea, Drobeta Turnu-Severin

Gazeta matematică (GM) Seria B nr.12/2010, E: 14099

Rezolvare:

$$\text{a) } (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \cdot (2 - 1) = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n - 1 - 2 - 2^2 - \dots - 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$\text{b) } (a^b)^a = a^{b^a} \Rightarrow a^{ba} = a^{b^a} \Rightarrow ba = b^a \Rightarrow ba = b \cdot b^{a-1} \Rightarrow a = b^{a-1}$$

- pentru $a = b = 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1^1$, iar pentru $a = b = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 = 2^2$.

16. Aflați numerele prime a, b, c, d știind că: $(a + b) \cdot (a + c) \cdot (a + d) = 315$.

*Nicolae Ivășescu, Craiova
GM Seria B nr.12/2010, E: 14100*

Rezolvare:

$$(a + b) \cdot (a + c) \cdot (a + d) = 5 \cdot 7 \cdot 9$$

Deoarece înmulțirea este comutativă putem avea următoarele situații:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a + b = 5 \\ a + c = 7 \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 5, d = 7 \\ a + d = 9 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b = 5 \\ a + c = 9 \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 7, d = 5 \\ a + d = 7 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a + b = 7 \\ a + c = 5 \Rightarrow a = 2, b = 5, c = 3, d = 7 \\ a + d = 9 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b = 7 \\ a + c = 9 \Rightarrow a = 2, b = 5, c = 7, d = 3 \\ a + d = 5 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a + b = 9 \\ a + c = 5 \Rightarrow a = 2, b = 7, c = 3, d = 5 \\ a + d = 7 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b = 9 \\ a + c = 7 \Rightarrow a = 2, b = 7, c = 5, d = 3 \\ a + d = 5 \end{array} \right. \end{array}$$

17. Fie a și b numere naturale nenule, prime între ele și p un număr prim. Dacă p divide $10a+b$ și p divide $a+708b$, determinați p .

*Matei Boteanu, Sălcuța, Dâmbovița
GM Seria B nr.12/2010, E: 14101*

Rezolvare:

$$(a, b) = 1, p - \text{prim}$$

$$\left. \begin{array}{l} p | 10a + b \\ p | a + 708b \end{array} \right\} \Rightarrow p | 10a + b + a + 708b \Rightarrow p | 11a + 709b \Rightarrow (11, 709) = 1 \Rightarrow p = 2$$

18. Aflați numerele naturale de trei cifre care prin împărțire la 7 dau restul 1, prin împărțire la 8 dau restul 4 și prin împărțire la 9 dau restul 7.

*Andrei Răducea-Marin, elev, Iași
GM Seria B nr.1/2011, E: 14115*

Rezolvare:

$$\overline{abc} = 7x + 1 \mid + 20 \Rightarrow \overline{abc} + 20 = 7 \cdot x + 21 \Rightarrow \overline{abc} + 20 = 7 \cdot (x + 3) = m_7$$

$$\overline{abc} = 8x + 4 \mid + 20 \Rightarrow \overline{abc} + 20 = 8 \cdot x + 24 \Rightarrow \overline{abc} + 20 = 8 \cdot (x + 3) = m_8$$

$$\overline{abc} = 9x + 7 \mid + 20 \Rightarrow \overline{abc} + 20 = 9 \cdot x + 27 \Rightarrow \overline{abc} + 20 = 9 \cdot (x + 3) = m_9$$

$$\overline{abc} + 20 \in M_{[7;8;9]} = \{0; 504; 1008; \dots\}$$

$$7 = 7$$

$$8 = 2^3$$

$$9 = 3^2$$

$$\text{Rezultă că: } \overline{abc} + 20 = 504 \Rightarrow \overline{abc} = 484$$

$$\overline{abc} + 20 = 1008 \Rightarrow \overline{abc} = 988.$$

19. Câte numere de forma $\overline{abcd}$ verifică relația: $\overline{abcd} + \overline{dcba} = 101 \cdot (a + d) \cdot (b + c)$?

Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara
GM Seria B nr.12/2010, E: 14102

Rezolvare:

$$1000a + 100b + 10c + d + a + 10b + 100c + 1000d = 101 \cdot (a + d) \cdot (b + c)$$

$$1001 \cdot (a + d) + 110 \cdot (b + c) = 101 \cdot (a + d) \cdot (b + c)$$

$$1001 \cdot (a + d) = 101 \cdot (a + d) \cdot (b + c) - 110 \cdot (b + c)$$

$$1001 \cdot (a + d) = (b + c) \cdot [101 \cdot (a + d) - 110]$$

$$1001 \cdot (a + d) = (b + c) \cdot (101 \cdot a + 101 \cdot d - 110)$$

$b + c \neq 1001$, deoarece b, c sunt cifre în baza 10

$$\Rightarrow b + c = a + d$$

$$101 \cdot a + 101 \cdot d - 110 = 1001$$

$$101 \cdot a + 101 \cdot d = 1111 \mid :101$$

$$a + d = 11$$

$$\Rightarrow a + d = b + c = 11$$

$$11 = 2 + 9$$

$$= 3 + 8$$

$$= 4 + 7$$

$$= 5 + 6$$

$\overline{abcd} = 2992$ nu convine	$\overline{abcd} = 3883$ nu convine
9229 nu convine	8338 nu convine
2929 convine	3838 convine
9292 convine	8383 convine
2 numere	2 numere
$\overline{abcd} = 4774$ nu convine	$\overline{abcd} = 6556$ nu convine
7447 nu convine	5665 nu convine
4747 convine	5656 convine
7474 convine	6565 convine
2 numere	2 numere
Total: 8 numere	

20. Produsul a 2011 numere întregi este 2011. Ce valori poate lua suma acestor numere?

Gabriel Popa, Iași
GM Seria B nr.12/2010, E: 14121

Rezolvare:

Deoarece 2011 este număr prim $\Rightarrow$ 2011 se scrie ca produs de factori 2011, 1 sau -1 în număr par.

I. $2011 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots \cdot 1 \cdot 2011$, în produs cifra 1 apare de 2010 ori.

$$\text{Suma } S = 2010 + 2011 = 4021$$

II. $2011 = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \dots \cdot 2011$, factorul 1 apare de 2008 ori, iar -1 de două ori.

$$\text{Suma } S = 2008 + (-2) + 2011 = 4017$$

III. $2011 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \dots \cdot 2011$, factorul 1 apare de 2006 ori, iar -1 de 4 ori.

$$\text{Suma } S = 2006 + (-4) + 2011 = 4013$$

Suma poate lua valorile: 4021, 4017, 4013, 4009, 4005, ..., 1,
adică numere de forma $4021 - 4k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2010\}$, în total 2011 valori.

21. Determinați suma elementelor mulțimii $M = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n}{2} + \frac{m}{5}; m, n \in \{0; 1; 2; \dots; 100\} \right\}$.

Gabriela Elena Zanoschi, Iași
GM Seria B nr.1/2011, E: 14116

Rezolvare:

Considerăm mulțimea

$$A = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2a + 5b, a, b = 1; 2; 3; \dots; 100\}$$

Observăm că $1 \notin A$, $3 \notin A$

Cel mai mare număr par din A este obținut pentru $a = b = 100$ și este 700.

Numărul 698 este obținut pentru $a = 99$; $b = 100$.

Cel mai mare număr impar din A este obținut pentru $b = 99$; $a = 100$, fiind deci 695.

Așadar $697 \notin A$ și $699 \notin A$.

Demonstrăm că orice număr natural mai mare sau egal cu 4 și mai mic sau egal cu 696 aparține mulțimii A.

Dacă $y \leq 500$, fie r restul împărțirii lui y la 5. Astfel $y = 5c + r$ cu $0 \leq c \leq 100$ și $0 \leq r \leq 4$.

Dacă r este par, atunci $y = 5c + 2k$, unde $r = 2k$,

iar dacă r este impar, atunci $y \geq 5$, deci $c \geq 1$ și $y = 5(c - 1) + 2(k + 3)$, unde $r = 2k + 1$.

Dacă $y > 500$, atunci $y = 500 + z$ cu $0 < z \leq 200$.

Dacă z este par, atunci $y = 5 \cdot 100 + 2k$, unde $z = 2k$, iar dacă z este impar, atunci $y \leq 695$, deci $z \leq 195$ și $y = 5 \cdot 99 + 2(k + 3)$, unde $z = 2k + 1$

Suma numerelor din A va fi

$$S = (1 + 2 + \dots + 700) - (1 + 3 + 697 + 699) = 350 \cdot 697$$

Prin urmare, suma elementelor lui M este $S:10 = 35 \cdot 697$

22. Cei șapte nepoți ai bunicii sunt în curte, jucând fie fotbal, fie volei. Bunica privește pe fereastră, să vadă cine e la fotbal. Cât întoarce capul către oala de pe aragaz, câțiva fotbaliști pleacă să joace volei. Când bunicul vrea să afle ce copii văzuse ea anterior, bunica se uită din nou pe fereastră și îi vede pe teren pe Andrei, Bogdan și Costel, dar știe precis că erau mai mulți. Memoria însă nu o mai ajută, așa că-i răspunde bunicului pe ghicite. Care este probabilitatea ca răspunsul bunicii să fie corect?

Gabriel Popa, Iași
GM Seria B nr.1/2011, E: 14117

Rezolvare:

$P = \text{nr. cazurilor favorabile} / \text{nr. cazurilor posibile} = 1/14$

Bunica vede nepoții care joacă fotbal: A, B, C + eventual alții de care nu-și amintește

Deci, A, B, C siguri, X, Y, Z, T posibili

A, B, C, X	A, B, C, X, Y	A, B, C, Y, Z
A, B, C, Y	A, B, C, X, Z	A, B, C, Z, T
A, B, C, Z	A, B, C, X, T	A, B, C, Y, T
A, B, C, T		

A, B, C, X, Y, Z

A, B, C, X, Y, T

A, B, C, X, Z, T

A, B, C, X, Y, Z, T

23. Un elev privește pe un ceas electronic și observă ora $\overline{ab} : \overline{ab}$ ($a \neq 0$). Își pune întrebarea care este unghiul maxim între limbile unui ceas (orar și minutar) pentru o oră de tipul celei de mai sus. Care este această oră și cât măsoară unghiul?

Cristian Lazăr, Iași
GM Seria B nr.1/2011, E: 14118

Rezolvare:

$$\overline{ab} : \overline{ab} \ (a \neq 0) =$$

$$= \{10:10; 11:11; 12:12; 13:13; 14:14; 15:15; 16:16; 17:17; 18:18; 19:19; 20:20; 21:21; 22:22; 23:23\}$$

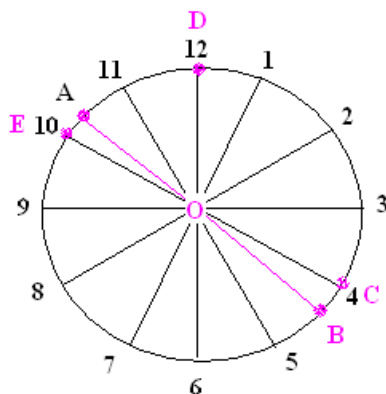


Figura III.4. Desenul problemei 23 (III.2)

- calculăm măsura unghiului AOB la ora 22:22
- între 2 ore consecutive avem un arc de $360^0 : 12 = 30^0$
- pentru fiecare minut $\Rightarrow 30^0 : 5 = 12^0$
- minutarul..... 360^0 1 oră
- orarul..... 30^0 1 oră
- rezultă că orarul parcurge într-o oră un arc de 12 ori mai mic.
- Minutarul a parcurs arcul $DB = 132^0 \Rightarrow$ orarul a parcurs arcul $EA = 132^0 : 12 = 11^0$

$$\text{Soluția: } m(\overset{\wedge}{AOB}) = 5 \cdot 30^0 + 18^0 + 11^0 = 179^0$$

24. a) Găsiți măcar trei valori ale lui p pentru care numerele p , $p+12$, $p+22$ sunt simultan prime.

b) Arătați că numerele p , $p+12$, $p+32$ nu pot fi simultan prime, pentru nici o valoare a numărului natural p .

Mădălina Bejan, elevă, Iași
GM Seria B nr.1/2011, S: E11.13

Rezolvare:

$$\text{a) } \begin{cases} p = 7 \\ p + 12 = 19 \\ p + 22 = 29 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 19 \\ p + 12 = 31 \\ p + 22 = 41 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 31 \\ p + 12 = 43 \\ p + 22 = 53 \end{cases}$$

b) Exemplu:

$$\begin{cases} p \\ p + 12 \\ p + 32 \end{cases}$$

$$1. \text{ Pentru } \begin{cases} p = 2k \\ p = \text{prim} \end{cases} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow p = 2 \text{ singurul număr prim par} \Rightarrow \begin{cases} p = 2k \\ p + 12 = 2k + 12 = 2 \cdot (k + 6) \\ p + 32 = 2k + 32 = 2 \cdot (k + 16) \end{cases}$$

$$\text{Pentru } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} p = 2k = 2 = \text{prim} \\ p + 12 = 2k + 12 = 2 \cdot (k + 6) = 14 \text{ nu e prim} \\ p + 32 = 2k + 32 = 2 \cdot (k + 16) = 34 \text{ nu e prim} \end{cases}$$

$$2. \text{ Pentru } \begin{cases} p = 2k + 1 \\ p = \text{prim} \end{cases}, \text{ pentru } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} p = 2k + 1 = 3 = \text{prim} \\ p + 12 = 2k + 1 + 12 = 2k + 23 = 25 = \text{nu e prim} \\ p + 32 = 2k + 1 + 32 = 2k + 33 = 35 = \text{nu e prim} \end{cases}$$

25. Fie $\widehat{OC}$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, $\widehat{OD}$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$, $\widehat{OE}$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$ și $\widehat{OF}$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOE}$. Calculați măsura unghiului $\widehat{AOB}$, știind că $\widehat{DOF} = 10^\circ$.

Teodor Knielling, elev, Iași
GM Seria B nr.1/2011, S: E11.18

Rezolvare:

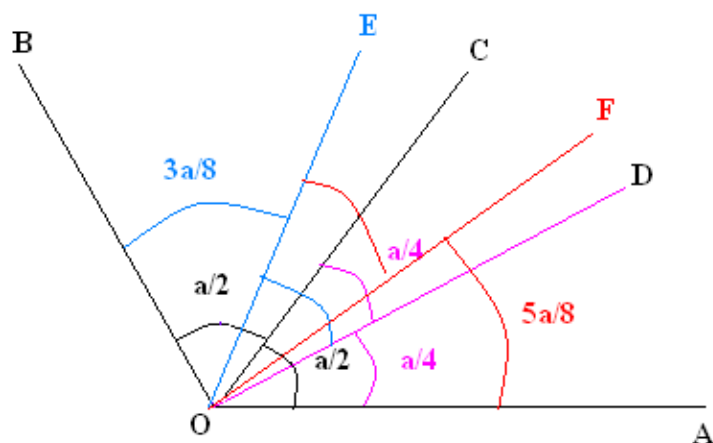


Figura III.5. Desenul problemei 25 (III.2)

Pe figură a^0 se notează cu a , adică $a^0 = a$, $m(\widehat{AOB}) = a^0$

$$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOC}) = \frac{a^0}{2}$$

$$m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{COD}) = \frac{a^0}{4}$$

$$m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) = \frac{a^0}{2} + \frac{a^0}{4} = \frac{3a^0}{4}$$

$$\text{Din } [\widehat{OE} \text{ bisectoarea unghiului } \widehat{BOD}] \Rightarrow m(\widehat{BOE}) = m(\widehat{DOE}) = \frac{3a^0}{8}$$

$$m(\widehat{AOE}) = m(\widehat{DOE}) + m(\widehat{AOD}) = \frac{3a^0}{8} + \frac{a^0}{4} = \frac{5a^0}{8}$$

$$\text{Din } [\widehat{OF} \text{ bisectoarea unghiului } \widehat{AOE}] \Rightarrow m(\widehat{EOF}) = m(\widehat{AOF}) = \frac{5a^0}{16}$$

$$m(\widehat{DOF}) = m(\widehat{AOF}) - m(\widehat{AOD}) = \frac{5a^0}{16} - \frac{a^0}{4} = \frac{a^0}{16}$$

$$m(\widehat{DOF}) = 10^\circ \quad \Rightarrow a^0 = 160^\circ$$

III.3. PROBLEME UTILIZÂND DIFERITE PRINCIPII, METODE, SUME

Principiul parității

Sinteză teoretică: *Principiul parității* constă în separarea cazurilor pare și impare dintr-o anumite situație dată.

Regulile parității:

- suma a două numere pare este un număr par;
- suma a două numere impare este un număr par;
- suma dintre un număr par și unul impar este un număr impar;
- produsul a două numere pare este un număr par;
- produsul a două numere impare este un număr impar;
- produsul dintre un număr par și unul impar este un număr par.

1. Se consideră numărul $a = 111...11_{(2)}$, 2011 de 1. Demonstrați că $a+1$ se poate scrie ca suma a patru numere impare consecutive.

Sergiu Prisacariu, Iași GM Seria B nr.1/2011, S: E11.9.

Rezolvare:

$$a = 111...11_{(2)}$$

$$a = 2^{2010} + 2^{2009} + \dots + 2^2 + 2^1 + 1 \mid (2-1)$$

$$(2-1) \cdot a = (2-1) \cdot (2^{2010} + 2^{2009} + \dots + 2^2 + 2^1 + 1)$$

$$a = (2^{2011} + 2^{2010} + 2^{2009} + \dots + 2^2 + 2^1) - (2^{2010} + 2^{2009} + \dots + 2^2 + 2^1 + 1)$$

$$a = 2^{2011} - 1 \Rightarrow a + 1 = 2^{2011} \Rightarrow a + 1 = 2^2 \cdot 2^{2009} = 4 \cdot 2^{2009} = 2^{2009} + 2^{2009} + 2^{2009} + 2^{2009}$$

$$a = (2^{2009} - 3) + (2^{2009} - 1) + (2^{2009} + 1) + (2^{2009} + 3)$$

2. Demonstrați că, dacă suma a două numere întregi este un număr impar, produsul lor este un număr par.

Rezolvare:

Fie a și $b \in \mathbb{Z}$.

Din datele problemei avem: $a + b = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Rezultă că unul dintre cele două numere este par.

Dacă $a = 2m \Rightarrow b = 2k + 1 - 2m = 2 \cdot (k - m) + 1 \Rightarrow b = \text{impar}$.

Rezultă, că unul dintre numere este par, celălalt impar, deci produsul $a \cdot b = \text{par}$.

3. Se consideră numerele impare $k, n_1, n_2, \dots, n_k$. Să se demonstreze că printre numerele

$$\frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_2 + n_3}{2}, \dots, \frac{n_{k-1} + n_k}{2}, \frac{n_k + n_1}{2} \text{ există un număr impar de numere impare.}$$

T. Andreescu, D. Andrica

Rezolvare: Suma a două numere impare este un număr par, deci numerele

$$\frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_2 + n_3}{2}, \dots, \frac{n_{k-1} + n_k}{2}, \frac{n_k + n_1}{2} \text{ sunt naturale.}$$

Presupunem că printre aceste numere se află un număr par de numere impare. Atunci, suma lor

$$\frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_2 + n_3}{2} + \dots + \frac{n_{k-1} + n_k}{2} + \frac{n_k + n_1}{2} = n_1 + n_2 + \dots + n_k \text{ este un număr par.}$$

Dar aceeași sumă este suma unui număr impar de numere impare, deci un număr impar. Contradicție. Deci, presupunerea făcută a fost falsă, deci printre numerele considerate în ipoteză există un număr impar de numere impare.

Observație: În rezolvare apare și metoda reducerii la absurd, prezentată la pagina 131.

Principiul cutiei sau principiul lui Dirichlet

Enunț:

“Dacă repartizăm $n+1$ obiecte în n cutii, atunci cel puțin două obiecte vor fi în aceeași cutie”.

Forma generală a principiului lui Dirichlet: “Dacă repartizăm $kn+1$ obiecte în n cutii, atunci cel puțin $k+1$ obiecte, $k \in \mathbb{N}$ vor fi în aceeași cutie”.

4. Să se arate că oricum am alege 7 numere pătrate perfecte distincte există cel puțin două a căror diferență se divide cu 10.

Rezolvare:

Dacă p este numărul a cărui pătrat perfect este p^2 , atunci la împărțirea cu 10 a lui p obținem unul din resturile: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Atunci p^2 , la împărțirea cu 10 va da unul din resturile: 0, 1, 4, 5, 6, 9. deoarece avem 7 pătrate perfecte și doar 6 resturi posibile, rezultă că există cel puțin două pătrate perfecte care dau același rest la împărțirea cu 10, deci diferența lor se divide cu 10.

Adică,
$$\begin{aligned} p^2 &= 10k + r \\ q^2 &= 10m + r \end{aligned} \Rightarrow p^2 - q^2 = 10 \cdot (k - m), \text{ adică un număr divizibil cu 10.}$$

5. La un turneu de șah au participat $n \geq 2$ șahiști. Să se demonstreze că în orice moment al turneului dinaintea ultimei runde cel puțin 2 șahiști au același număr de victorii.

Rezolvare: În orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, fiecare șahist a jucat maxim $n-2$ partide și a putut obține 0, 1, 2, ..., $n-2$ victorii, deci un total de $n-1$ posibilități. Deoarece la turneu au participat n șahiști rezultă că cel puțin doi șahiști au același număr de victorii înaintea ultimei runde.

Principiul invariantului

Prin **invariant** se înțelege o mărime, o relație sau o proprietate care rămâne neschimbată în urma aplicării sau invarianței unei transformări.

6. Pe o tablă sunt scrise semne de „+” și „-”. Ștergem două semne și le înlocuim cu un semn după următoarea regulă: dacă cele două semne șterse sunt identice le înlocuim cu „+”, iar dacă ștergem două semne diferite le înlocuim cu „-”. Arătați că ultimul semn care rămâne după un număr de pași nu depinde de ordinea alegerii perechilor.

Rezolvare: Invariantul va fi paritatea numărului de minusuri. Dacă la început numărul de minusuri este impar, ultimul semn care va rămâne va fi „-”. Dacă la început numărul de minusuri este par, la sfârșit va rămâne „+”.

7. Un cerc este împărțit în șase părți egale în care sunt plasate în sensul acelor de ceasornic numerele 0,0,1,0,1,0. Este permisă adăugarea câte unei unități la oricare două numere vecine. Procedul poate fi repetat de un număr de ori. Se poate ajunge ca în final cele șase numere să fie egale?

Rezolvare: Notăm cu $x_1, x_2, \dots, x_6$ cele șase numere în ordinea menționată.

Considerăm suma $S = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6$. După o transformare de tipul considerat suma rămâne invariantă. Valoarea inițială a sumei este 2, deci nu e posibil ca cele 6 numere să devină egale, deoarece în acest caz suma ar fi zero.

Probleme legate de numărul divizorilor și suma divizorilor unui număr natural

Sinteză teoretică:

Teorema 1:

a) Numărul divizorilor numărului $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ este $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_n + 1)$.

b) Suma divizorilor unui număr natural este:
$$S = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

Teoremă: Dacă $d_1, d_2, \dots, d_k$ sunt toți divizorii naturali ai numărului n , atunci are loc relația:
 $(d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k)^2 = n^k$.

8. Fie S suma divizorilor naturali ai numărului 2001. Să se arate că $5 \cdot S$ este un număr natural pătrat perfect.

Rezolvare:

$2001 = 3^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1$, iar suma divizorilor lui 2001 este:

$$S = \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{23^2 - 1}{23 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{29^2 - 1}{29 - 1} = 4 \cdot 24 \cdot 30$$

Rezultă că: $5 \cdot S = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 120^2$ este pătrat perfect.

Observație: Cum $2001 = 3^1 \cdot 23^1 \cdot 29^1$, rezultă că numărul divizorilor lui 2001 este: 8, rezultă că avem relația: $(d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_8)^2 = 2001^8$.

Probleme de ordonare a două numere a și b

Sinteză teoretică – procedee:

- Stabilim semnul diferenței: $a - b$.
 - Dacă $a - b > 0 \Rightarrow a > b$;
 - Dacă $a - b < 0 \Rightarrow a < b$;
 - Dacă $a - b = 0 \Rightarrow a = b$.
- Dacă $a, b > 0$, $b \neq 0$, se compară raportul $\frac{a}{b}$ cu 1.

- Dacă $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow a < b$;
- Dacă $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow a > b$;
- Dacă $\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$.

• Există situații în care e suficient să se demonstreze că există un număr c situat între cele două numere: $a < c < b \Rightarrow a < b$.

• În anumite situații operația de ordonare ajută la stabilirea egalității a două numere a și b prin stabilirea simultană a inegalităților: $a \leq b$ și $b \leq a$.

- Mai există situații în care este nevoie de ingeniozitate pentru rezolvarea unor probleme.

9. Să se arate că pentru orice numere naturale a și b avem: $\frac{a + 2^{360}}{a + 3^{240}} < \frac{b + 5^{1800}}{b + 7^{1440}}$.

Rezolvare: $2^{360} = (2^3)^{120} = 8^{120}$, $3^{240} = (3^2)^{120} = 9^{120} \Rightarrow 2^{360} < 3^{240} \Rightarrow a + 2^{360} < a + 3^{240}$,

deci $\frac{a + 2^{360}}{a + 3^{240}} < 1$, fracție este subunitară*

$5^{1800} = (5^5)^{360} = 3125^{360}$, $7^{1440} = (7^4)^{360} = 2401^{360} \Rightarrow 2^{360} < 3^{240} \Rightarrow b + 5^{1800} > b + 7^{1440}$,

deci $\frac{b + 5^{1800}}{b + 7^{1440}} > 1$, fracție supraunitară**

Din * și ** $\Rightarrow$ relația dată este adevărată.

10. Comparați fracțiile A și B unde

$$A = \frac{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{1997}}} \text{ și } B = \frac{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1331}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{1331}}}.$$

Rezolvare: Se amplifică fracția A cu 2^{1998} , respectiv fracția B cu 3^{1332} . Rezultă:

$$A = \frac{2^{1998} \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997})}{2^{1998} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{1997}}\right)} = \frac{2^{1998} \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997})}{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997}} = 2^{1998} = (2^3)^{666} = 8^{666}$$
$$B = \frac{3^{1332} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1331})}{3^{1332} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{1331}}\right)} = \frac{3^{1332} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1331})}{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1331}} = 3^{1332} = (3^2)^{666} = 9^{666}$$

Deci $A < B$.

Probleme rezolvabile cu metoda reducerii la absurd

Sinteză teoretică: Metoda reducerii la absurd constă în a admite în mod provizoriu, ca adevărată propoziția contradictorie propoziției de demonstrat, apoi pe baza acestei presupuneri se deduc o serie de consecințe care duc la un rezultat absurd, deoarece ele contrazic ipoteza problemei date sau un adevăr stabilit anterior.

11. Arătați că pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{4n+9}{3n+7}$ este ireductibilă.

Rezolvare: Presupunem că fracția este reductibilă și fie $d = (4n+9; 3n+7)$, cu $d \in \mathbb{N}^*, d \neq 1$.

Din $d|4n+9$, $d|3n+7 \Rightarrow d|3 \cdot (4n+9)$, $d|4 \cdot (3n+7)$,

$\Rightarrow d|12n+27$, $d|12n+28 \Rightarrow d|12n+28-12n-27 \Rightarrow d|1$, absurd, deoarece $d \neq 1$, rezultă $(4n+9, 3n+7)=1$

Probleme de logică

Problemele de logică se realizează printr-o serie de judecăți logice care solicită perspicacitate, inventivitate și puțin calcul.

12. La un turneu de minibaschet participă 15 echipe, fiecare dintre acestea jucând cu toate celelalte. Pentru victorie se acordă 3 puncte, pentru meci egal 2 puncte, iar pentru înfrângere un punct. În clasamentul întocmit la sfârșitul turneului nu există echipe cu același număr de puncte. Știind că ultima echipă are 21 de puncte, să se arate că prima a făcut cel puțin un meci egal (sau nul).

Rezolvare: Fiecare echipă a jucat 14 meciuri, iar numărul de meciuri disputate a fost $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$.

Deoarece echipa de pe ultimul loc are 21 de puncte, iar în clasament nu există echipe cu același număr de puncte, rezultă că numărul de puncte este

$$\geq 21 + (21+1) + \dots + (21+14) = 15 \cdot 21 + \frac{14 \cdot 15}{2} = 420.$$

Fiindcă la fiecare meci s-au acordat 4 puncte, rezultă că numărul de puncte acordat a fost de $105 \cdot 4 = 420$. Deci punctajele obținute de echipe au fost: 21, 22, 23, 24, ..., 34, 35.

Arătăm că echipa de pe primul loc care a acumulat 35 de puncte a făcut cel puțin un meci egal (sau nul).

Presupunem că nu a făcut un meci egal (sau nul).

Atunci, dacă a = numărul victoriilor și b = numărul înfrângerilor, avem:

$$a + b = 14$$

$$3a + b = 35$$

De aici rezultă că $a = \frac{21}{2} \notin \mathbb{N}$, $b = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$, deci presupunerea făcută este falsă.

Prin urmare, echipa de pe primul loc a făcut cel puțin un meci nul.

Probleme cu sume

Relații utilizate: simbolul sumei = $\sum$

Exemplu de citire: $\sum_{k=1}^n k$ = sumă de k când k ia valori de la 1 la n .

- Suma primelor n numere naturale: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$;

- Suma pătratelor primelor n numere naturale:
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$;

- Suma cuburilor primelor n numere naturale: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2$

13. a) Să se arate că $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{n \cdot (n+2)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Să se afle numărul de fracții care se adună în suma:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot (n+1)} + \frac{1}{n \cdot (n+2)}$$

pentru a avea $\frac{1}{2 \cdot (n+1)} + S = \frac{751}{1002}$.

Olimpiada județeană, Giurgiu, 2002

Rezolvare:

a) $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+4} = \frac{n+2-n}{2n \cdot (n+2)} = \frac{2}{2n \cdot (n+2)} = \frac{1}{n \cdot (n+2)}$

b) Aplicând rezultatul de la punctul a) obținem:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot (n+1)} - \frac{1}{2 \cdot (n+2)} \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{2 \cdot (n+2)} = \frac{751}{1002} \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot (n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{751}{1002} \Rightarrow n = 1000.$$

14. Se consideră suma $S = 1^{2011} : 1^{2010} + 2^{2009} : 2^{2008} + 3^{2007} : 3^{2006} + \dots + n^1 : n^0$.

Determinați numărul n și calculați suma S .

Mara Slătineanu, elevă, Iași GM Seria B nr.1/2011, S: E11.1.

Rezolvare:

$$S = 1^{2011} : 1^{2010} + 2^{2009} : 2^{2008} + 3^{2007} : 3^{2006} + \dots + n^1 : n^0 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Se observă că:

$$1 \rightarrow (2011; 2010)$$

$$2 \rightarrow (2009; 2008)$$

.....

$$n \rightarrow (1; 0)$$

Rezultă că $n = 1006$ și

$$S = \frac{1006 \cdot 1007}{2} = 503 \cdot 1007 = 506521.$$

III.4. MATEMATICA ÎN VIAȚA COTIDIANĂ

1. Factura pentru plata energiei electrice

SC Electrica SA furnizează populației energie electrică; populația folosește energia electrică în viața de zi cu zi pentru iluminat și pentru circuitele de priză care alimentează diversele aparate electrocasnice folosite. Fiecare familie este un **client** al societății și plătește acesteia cantitatea de energie consumată.

Contorul este aparatul care înregistrează consumul de energie electrică, aceasta având ca unitate de măsură kWh; se mai vorbește și de 1MWh = 1000 kWh. Reprezentanți ai societății citesc periodic contorul și emit un document numit **factură**, prin intermediul căruia clientul plătește energia pe care a consumat-o.

Plata facturii include diverse taxe dintre care amintesc:

- TVA (taxa pe valoarea adăugată) = 19% și este o taxă stabilită de Guvern;
- Taxa radio = 2,5 lei/lună;
- Taxa TV = 4 lei/lună.

Factura se poate împărți în 3 părți:

Partea I

- Calculați numărul de zile pentru care se calculează consumul de energie;
- Calculați consumul de energie pentru fiecare din cele două perioade menționate în factură și consumul total.
- Calculați numărul de kWh consumați zilnic.

Perioada de citire	Serie contor	Index vechi	Index nou	Consum [kWh]
18.12.- 31.12	543514	11381	11514	11514 -11381=133
31.12.- 21.02	543514	11514	12044	12044 -11514 = 530
Zile	kWh/zi			Total
66	663/66 =10,045			133+530 = 663

Partea a II-a: d) Să se completeze tabelul:

Servicii facturate	UM	Cantitate	Preț unitar fără TVA [lei]	Valoare fără TVA [lei]	Valoare cu TVA [lei]
Rezervare	Zile	13	0,15030	13*0,1503 = 1,95	1,95 + 0,19*1,95 =2,32
Energie activă	kWh	133	0,3125	133*0,3125 = 41,56	41,56 + 0,19*41,56 =49,46
Rezervare	Zile	52	0,1562	52*0,1562 = 8,12	8,12 + 0,19*8,12 =9,66
Taxa radio	Luni	2	2,5	2*2,5 = 5	5
Taxa TV	Luni	2	4	2*4= 8	8
Energie activă	kWh	530	0,3247	530*0,3247=172,09	172,09+0,19*172,09=204,79
Accize	MWh	0,663		2,83	3,37
TOTAL	239,55	282,6			

Partea a III-a: e) Să se completeze tabelul:

Produse și servicii facturate	Suma facturată (fără TVA)
Energia electrică activă	41,56+172,09 = 213,65
Abonament/rezervare	1,95 + 8,12 =10,07
Taxa Radio	5
Taxa TV	8
Accize	x+0,19*x = 3,37, rezultă x = 2,83
Total factură fără TVA	239,55
TVA 19%	282,6 - 239,55 = 43,05
Total factură cu TVA	282,6
Alte sume (încasat din sold creditor)	0
Total de plată	282,6

2. Sucul de mere

Un pahar de 250 ml conține apă și 85% suc de mere.

- a) Care este cantitatea, în ml, de suc de mere ce se găsește în pahar?
b) Deduceți ce cantitate, în ml, de apă se află în pahar.
c) Cât la sută din conținutul paharului este apă?

Rezolvare:

a) $\frac{85}{100} \cdot 250 = 212,5 \text{ ml};$

b) $250 - 212,5 = 37,5 \text{ ml};$

c) 250 ml.....100%

37,5 ml.....x

Rezultă: $x = 15\%$

3. Factura pentru plata telefonului

O societate comercială (exemplu RDS, Orange, Vodafone) furnizează populației servicii de telefonie, internet și transfer de date. Aceste servicii se plătesc. Societatea emite factură prin care se aduce la cunoștința clientului de ce servicii a beneficiat și care sunt costurile acestora.

Exemplu:

Abonamente	lei
Abonamente servicii telefonie	28,56
Abonamente servicii de internet și date	53,04
Consum/Alte servicii	
Convorbiri	11,57
Reduceri	-12,42
Total factură curentă fără TVA	$28,56 + 53,04 + 11,57 - 12,42 = 80,75$
TVA 19%	
Total factură curentă cu TVA	$80,75 + 0,19 \cdot 80,75 = 96,09$
Rate echipamente	4,13
Total rate	4,13
Sold precedent	56,79
Plăți efectuate	-57
Total de plată până la 29.03.2010	$96,09 + 4,13 + 56,79 - 57 = 100,01$

4. Laboratorul de cofetărie

Un laborator de cofetărie a produs într-o zi 411 bomboane de ciocolată de tip A și 685 bomboane de tip B. Bomboanele respective trebuie ambalate în cutii identice, astfel încât numărul cutiilor rezultate să fie cel mai mare posibil și fiecare cutie să conțină același număr de bomboane de tip A și același număr de bomboane de tip B.

Stabiliți numărul de bomboane de tip A și de tip B din fiecare cutie și numărul total al cutiilor.

Rezolvare: Notăm cu n – numărul cutiilor.

Pentru îndeplinirea cerinței calculăm: $n = \text{c.m.m.d.c}(411; 685) = 137$

$411 = 3 \cdot 137; 685 = 5 \cdot 137.$

În concluzie, avem 137 de cutii, fiecare cu câte 3 bomboane de tip A și 5 bomboane de tip B.

5. Tâmplărie

O scândură cu lungimea de 236 mm, trebuie tăiată în bucăți de câte 20 mm, fiecare. Lățimea tăieturii este de 4 mm. Câte bucăți rezultă?

Rezolvare: Fie n – numărul scândurilor. Numărul tăieturilor este cu 1 mai mic decât numărul scândurilor.

$20 \cdot x + 4 \cdot (x - 1) = 236 \Rightarrow 24 \cdot x = 240 \Rightarrow x = 10$ scânduri.

6. Bonul fiscal

Pentru produsele cumpărate de către un client, angajatul de la casa de marcaj emite un bon fiscal.

- Calculați, copiați și completați bonul;
- Pentru a achita cumpărăturile, clientul îi dă casierului o bancnotă de 50 de lei și două de 10 lei. Care este restul pe care trebuie să-l primească?
- Câte grame de musaca de cartofi a cumpărat clientul? Dar de pulpe de pui?

Bon fiscal			
Cantitate/tip produs		Preț unitar [lei]	Total [lei]
1,000 x File somon		14,99	14,99
0,3200 x Musaca cartofi kg		17,90	5,72
0,1820 x Pulpe pui kg		19,90	3,62
2,000 x Apă minerală plată		2,09	4,18
3,000 x Cereale		7,99	23,97
3,000 x Lapte		3,99	11,97
4,000 x Iaurt cu fructe		0,49	1,96
Total			66,41
TVA 19%			66,41 x 0,19 = 12,62
Total de plată			66,41

b) $1 \times 50 + 2 \times 10 = 70$ lei ; $70 - 66,41 = 3,59$ lei rest

c) 320 g de musaca de cartofi și 182 g pulpe de pui

7. Gruparea creioanelor

Grupând creioanele într-o cutie câte 5, rămân 3, câte 6 rămân 4, iar câte 9, rămân 7. Aflați câte creioane sunt în cutie, știind că numărul lor este cuprins între 200 și 300.

Rezolvare: Aplic teorema împărțirii cu rest:

$$\begin{cases} x = 5 \cdot C_1 + 3 & | + 2 \\ x = 6 \cdot C_1 + 4 & | + 2 \\ x = 9 \cdot C_1 + 7 & | + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 5 \cdot (C_1 + 1) \\ x + 2 = 6 \cdot (C_2 + 1) \\ x + 2 = 9 \cdot (C_3 + 1) \end{cases} \Rightarrow x + 2 \in M_5 \cap M_6 \cap M_9$$

$$5 = 5$$

$$6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow \text{c.m.m.m.c.} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

$$9 = 3^2$$

$$M_{90} = \{0, 90, 180, 270, 360, \dots\}$$

$$x + 2 = 270 \Rightarrow x = 268$$

8. Amenajarea ștrandului

Orașul Drobeta-Turnu - Severin este un port mic la Dunăre. La ce distanță, în aval, de portul orașului trebuie amenajat un ștrand, pentru ca o cursă cu vaporul dus-întors să dureze cel mai mult 1 minute? Nu se ține cont de opriri și se cunosc:

c) viteza vaporului v_1 (km/min); viteza curentului v_2 (km/min).

Notă: 1. Viteza vaporului/curentului este distanța parcursă de vapor/curent în unitatea de timp.

2. aval = parte către care curge un râu.

Rezolvare: Fie x = distanța pe care dorim s-o aflăm.

t_1 = timpul la dus; t_2 = timpul la întors;

$$t_1 + t_2 \leq t$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \frac{x}{t_1} \\ v_1 - v_2 = \frac{x}{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{x}{v_1 + v_2} \\ t_2 = \frac{x}{v_1 - v_2} \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{x}{v_1 + v_2} + \frac{x}{v_1 - v_2} \leq t \Rightarrow x \leq \frac{t}{\frac{1}{v_1 + v_2} + \frac{1}{v_1 - v_2}}$$

9. La cumpărături

Două eleve au cumpărat portocale și kiwi. O elevă a plătit 140 lei pentru 5 kg de portocale și 4 kg de kiwi, iar a doua elevă a plătit 106 lei pentru 7 kg de portocale și 2 kg de kiwi. Cât costă 4 kg de portocale și 5 kg de kiwi?

Rezolvare:

Notez cu : P_p prețul unui kg de portocale

P_k prețul unui kg de kiwi

Pentru a rezolva problema voi afla cât costă 1 kg de portocale și 1 kg de kiwi.

Rezultă:

$$\begin{cases} 5 \cdot P_p + 4 \cdot P_k = 140 \\ 7 \cdot P_p + 2 \cdot P_k = 106 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot P_p + 4 \cdot P_k = 140 \\ 14 \cdot P_p + 4 \cdot P_k = 212 \end{cases} \Rightarrow (2) - (1) \Rightarrow 9 \cdot P_p = 72 \Rightarrow \begin{cases} P_p = 8 \text{ lei} \\ P_k = 25 \text{ lei} \end{cases}$$

$$4 \cdot P_p + 5 \cdot P_k = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 25 = 32 + 125 = 157 \text{ lei.}$$

10. Apartamente dintr-un bloc

Într-un bloc sunt apartamente cu două și trei camere, în total fiind 41 de camere și 17 apartamente. Calculați câte apartamente cu două camere sunt în bloc.

Rezolvare: Presupunem că toate apartamentele au 2 camere.

Rezultă: $17 \cdot 2 = 34$ camere.

Atunci $41 - 34 = 7$ camere sunt cu câte 3 camere, deci $7 \cdot 3 = 21$ camere.

Rezultă astfel că mai rămân 10 apartamente cu câte 2 camere.

11. La cumpărături de rechizite

4 caiete și 6 creioane costă 26 lei, iar 2 caiete și 1 creion costă 11 lei. Cât costă împreună 1 caiet și 1 creion?

Rezolvare: Notez cu : P_c prețul unui caiet; P_{cr} prețul unui creion

Pentru a rezolva problema voi afla cât costă 1 caiet și 1 creion.

Rezultă:

$$\begin{cases} 4 \cdot P_c + 6 \cdot P_{cr} = 26 \\ 2 \cdot P_c + P_{cr} = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot P_c + 6 \cdot P_{cr} = 26 \\ 4 \cdot P_c + 2 \cdot P_{cr} = 22 \end{cases} \Rightarrow (1) - (2) \Rightarrow 4 \cdot P_{cr} = 4 \Rightarrow \begin{cases} P_{cr} = 1 \text{ lei} \\ P_c = 5 \text{ lei} \end{cases}$$

$$1 \cdot P_c + 1 \cdot P_{cr} = 5 + 1 = 6 \text{ lei}$$

12. La recoltat

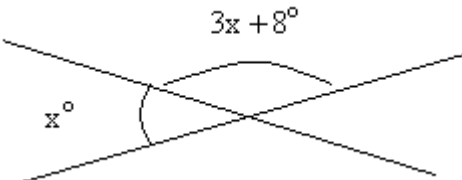
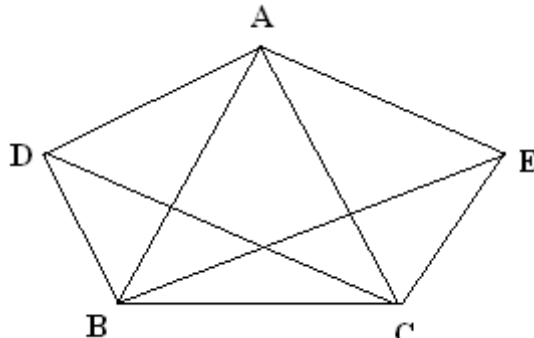
Într-o zi s-a recoltat $\frac{1}{2}$ din suprafața cultivată, a doua zi $\frac{1}{3}$ din rest, a treia zi $\frac{1}{4}$ din noul rest, iar a patra zi ultimele 10 ha. Ce suprafață a fost cultivată?

Rezolvare: Fie X – suprafața căutată

$$\text{În prima zi: } \frac{1}{2} \cdot X; \text{ În a doua zi: } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot X = \frac{1}{6} \cdot X; \text{ În a treia zi: } \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot X = \frac{5}{24} \cdot X$$

$$\text{În a patra zi: } 10 \text{ ha, rezultă: } \frac{1}{2} \cdot X + \frac{1}{6} \cdot X + \frac{5}{24} \cdot X + 10 = X \Rightarrow 10 = \frac{24X - 21X}{24} \Rightarrow X = 80 \text{ ha}$$

III.5. TESTE DE EVALUARE SEMESTRIALE

1. MODEL DE TEZĂ – SEMESTRUL I	
START 10p	
45 p	Partea I – Scrieți pe foaia de teză numai rezultatele
5p	1. Cel mai mare divizor comun al numerelor 40 și 16 este.....
5p	2. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 8 și 12 este.....
5p	3. Media aritmetică a numerelor 17; 9 și 16 este.....
5p	4. Media aritmetică ponderată a numerelor 20 și 25 cu ponderile 4 și respectiv 6 este.....
5p	5. $\frac{5}{9}$ din 180kg este egal cu.....
5p	6. Suplementul unghiului cu măsura de $63^{\circ}17'29''$ este.....
5p	7. Diferența măsurilor a două unghiuri cu mărimea de $48^{\circ}12'36''$ și respectiv $12^{\circ}6'26''$
5p	8. Unghiurile formate de bisectoarea unui unghi de 68° cu laturile unghiului, au fiecare măsura de
5p	9. Măsura x° din figura 1 este de.....
	 Figura 1.
45 p	Partea a II-a – Scrieți pe foaia de teză rezolvările complete
15 p	1. Efectuați: $\left[\frac{1}{5} - 0,1(6)\right] : [1, (2)] + 0,3^2$
15 p	2. Aflați toate numerele naturale mai mari decât 200 și mai mici decât 400, care împărțite la 5; 16 și 20 dau resturile 3; 14 și respectiv 18.
15 p	3. În figura 2, $\triangle ABC$ este isoscel de bază $[BC]$, $[AD] \equiv [AE]$ și $\hat{DAB} \equiv \hat{EAC}$. Demonstrați că: a) $[DB] \equiv [EC]$; b) $[DC] \equiv [EB]$.
	 Figura 2.
Total 100 p p -puncte	Timp de lucru: 50 minute.

2. MODEL DE TEZĂ – SEMESTRUL I	
START 10p	
45 p	Partea I – Scrieți pe foaia de teză numai rezultatele
5p	1. Un divizor al numărului 16 este.....
5p	2. Valoarea lui x din ecuația $\frac{x}{5} + \frac{3}{10} = 1$ este.....
5p	3. Suma numerelor naturale impare mai mici decât 11 este.....
5p	4. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{17x}$ divizibil cu 2 este.....
5p	5. Cel mai mare divizor comun al numerelor 20 și 24 este.....
5p	6. Suma dintre cel mai mare număr natural prim de forma $\overline{ab}$ și cel mai mic număr natural prim este.....
5p	7. Dacă $x \cdot y = 57464$ și $(x, y) = 44$, atunci $[x, y] = \dots\dots\dots$
5p	8. Dacă a și b sunt numere naturale prime și $a + 6b = 44$, atunci $b = \dots\dots\dots$
5p	9. Media aritmetică a trei numere este 24. Valoarea numărului x care trebuie adăugat celor trei numere pentru ca media lor să devină 25 este.....
45 p	Partea a II-a – Scrieți pe foaia de teză rezolvările complete
15 p	1. Efectuați: $\left(\frac{1}{2} - 0,2 + 0,15\right) : 10 + \left(\frac{2011}{2010}\right)^0$
15 p	2. Se consideră numărul $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2007}$. Arătați că A este divizibil cu 10.
15 p	3. Se consideră dreptele AB și CD concurente în O. Știind că măsura unghiului $\angle AOC$ format de bisectoarea unghiului $\angle BOD$ cu semidreapta [OB este de 125° , aflați măsura unghiului $\angle BOD$.
Total 100 p p - puncte	Timp de lucru: 50 minute.



3. MODEL DE TEZĂ – SEMESTRUL I	
START 10p	
45 p	Partea I – Scrieți pe foaia de teză numai rezultatele
5p	1. Suma a trei numere impare consecutive este 51. Unul dintre numere este.....
5p	2. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{13x}$ divizibil cu 6 este.....
5p	3. Numărul divizorilor numărului 54 este.....
5p	4. Restul împărțirii numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20 + 8$ la 7 este.....
5p	5. $\frac{2}{6}$ din 180 este egal cu.....
5p	6. Un multiplu a numărului 8 este.....
5p	7. C.m.m.c al numerelor 18 și 20 este.....
5p	8. C.m.m.d.c. al numerelor 20 și 24 este.....
5p	9. Media aritmetică a numerelor 10; 11 și respectiv 12 este.....
45 p	Partea a II-a – Scrieți pe foaia de teză rezolvările complete
15 p	1. Calculați: $\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{303} + \frac{1}{3003} + \frac{1}{30003}\right) : \left(\frac{1}{55} + \frac{1}{505} + \frac{1}{5005} + \frac{1}{50005}\right)$.
15 p	2. Considerăm 4 unghiuri $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$ situate în jurul unui punct O. Acestea au măsurile x° , 30° , $3x^\circ + 10^\circ$, $5x^\circ + 5^\circ$. Aflați măsurile unghiurilor necunoscute.
15 p	3. Fie triunghiul oarecare $\triangle ABC$, $AB < AC$, D un punct aparținând laturii $[AC]$, astfel încât $[AD] \equiv [AB]$ și M mijlocul lui $[BD]$. Dreptele AM și BC se intersectează în N. Demonstrați că: a) $\triangle ABM \equiv \triangle ADM$; b) $\triangle BND$ este isoscel.
Total 100 p p -puncte	Timp de lucru: 50 minute.

4. MODEL DE TEZĂ – SEMESTRUL II	
START 10p	
10p	1. Determinați valoarea maximă a expresiei: $E(x) = 11 - 3 - x $.
10p	2. Fie $x = (-1)^n \cdot (-245) + (-1)^{n+1} \cdot (-136) + 2$. Pentru ce numere naturale n, numărul $\frac{x}{3} \in \mathbb{Z}$?
10p	3. Numerele a și b sunt direct proporționale cu 2 și 4, iar $a + b = 120$. Aflați numerele a și b.
10p	4. Un triunghi isoscel are perimetrul de 40 cm, iar lungimea unei laturi de 16 cm. Aflați lungimile celorlalte două laturi.
10p	5. Rezolvați ecuațiile: a) $3 \cdot (x + 2) - 5 = 13$; b) $ x - 1 + x - 2 = 0$.
10p	6. Enunțați teorema $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.
10p	7. Calculați: $a = (-2)^3 : (-4) + 12 : (-3) + 100^0$.
20p	8. Măsurile unghiurilor A, B, C ale unui triunghi sunt direct proporționale cu 4, 3 și 2. Știind că $AD \perp BC$ și $[AE]$ este bisectoarea $\widehat{BAC}$, să se afle măsura unghiurilor triunghiului, precum și a unghiului $\widehat{DAE}$.
Total 100 p p -puncte	Timp de lucru: 50 minute.

5. MODEL DE TEZĂ – SEMESTRUL II	
START 10p	
45 p	Partea I – Scrieți pe foaia de teză numai rezultatele
5p	1. Enunțați axioma lui Euclid.
5p	2. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau.....
5p	3. Punctul de concurență a medianelor unui triunghi se numește
5p	4. Calculați: $(529-1^2) \cdot (529-2^2) \cdot \dots \cdot (529-1000^2)$.
5p	5. Arătați că numărul $2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n+1}$ se divide cu 14, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
5p	6. Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c al numerelor 225 și -75.
5p	7. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $ x+1 - 4 = 2$.
5p	8. Calculați suma: $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + 99 - 100$.
5p	9. Rezolvați în $\mathbb{Z}$: $x^2 - x = 2$.
45 p	Partea a II-a – Scrieți pe foaia de teză rezolvările complete
10 p	1. Calculați: $-3 \cdot (-1)^{n \cdot (n+1)} + 5 \cdot (-1)^{n^2 - n + 5}$.
15 p	2. Fie M mijlocul medianei $[AA']$ a unui triunghi ABC și $CM \cap AB = \{N\}$. Demonstrați că: dacă $[AN] \equiv A'N$, atunci $BC = 2 \cdot AC$ și dacă $BC = 2 \cdot AC$, atunci $[AN] \equiv A'N$
20 p	3. În triunghiul ABC oarecare, $[AE]$ și $[CF]$ sunt înălțimi ($E \in BC, F \in AB$), iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Fie T mijlocul segmentului $[AH]$, D mijlocul $[AC]$ și M mijlocul $[BC]$. Demonstrați că: $TD \parallel HC$; $DM \parallel AB$; $TD \perp MD$.
Total 100 p p -puncte	Timp de lucru: 50 minute.

6. MODEL DE TEZĂ – SEMESTRUL II	
START 10p	
10p	1. Dacă distanța de la centrul de greutate al unui triunghi echilateral la o latură este egală cu 6 cm, atunci lungimea înălțimii triunghiului este egală cu.....cm.
10p	2. Enunțați teorema liniei mijlocii în triunghi.
10p	3. Calculați c.m.m.m.c al numerelor -24; 48; -72.
10p	4. Calculați: $ x $ și $ y $, știind că $ x+y+2 + x-y = 0$.
10p	5. Găsiți numerele a și b a căror medie aritmetică este 200 și care sunt invers proporționale cu 8, respectiv $4\frac{1}{2}$.
10p	6. Arătați că numerele de forma $225^n + 3^{2n+3} \cdot 5^{2n+1} + 9^{n+1} \cdot 25^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ se divid cu 435.
15p	7. Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează în E, astfel încât $AC=BD$ și $AC \parallel BD$. Demonstrați că E este mijlocul segmentului $[AB]$ și că $AD \parallel BC$.
15p	8. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\hat{A})=90^\circ$ și $m(\hat{B})=15^\circ$ se construiesc înălțimea $[AD]$, bisectoarea $[AE]$ și mediana $[AO]$. Dacă $DE=a$ și $CD=b$, să se calculeze perimetrul triunghiului AOE.
Total 100 p p -puncte	Timp de lucru: 50 minute.

III.6. PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ȘCOLARE

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea lui x din egalitatea:
$$\frac{0,(3) + \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot x}{0,0(3) + 13} = \frac{2620}{5083}.$$
2. Dacă $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1$ și $\frac{b}{a} = \frac{0,(3)}{0,(6)}$, $\frac{c}{b} = \frac{0,(36)}{0,(63)}$, atunci aflați $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x}$.
3. Demonstrați că suma tuturor divizorilor numărului $A = 2011^{2011}$ nu se divide cu 2011.
4. Determinați numărul natural A știind că $27A$ are cu 15 divizori mai mult decât A , iar $8A^2$ are de 4 ori mai mulți divizori decât A .
5. Facem un aliaj cu titlul 0,825 din trei bucăți de metal, una cu masa de 6,250 kg și titlul 0,725, a doua cu masa de 9,225 kg și titlul 0,800, iar a treia cu masa de 15,450 kg și titlul necunoscut. Aflați titlul celei de-a treia bucăți de metal.
6. Fie numărul $A = 45 \cdot 15^{2n+1} + 9^{n+1} \cdot 5^{2n+3} + 25^{n+2} \cdot 3^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este dat. Determinați valoarea minimă și valoarea maximă ale numărului natural a , pentru care $\frac{A}{3^a}$ este număr natural pătrat perfect.
7. Fie $S = (-1)^{a_0} + (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + \dots + (-1)^{a_{100}}$. Știind că $a_0, a_1, \dots, a_{100}$ sunt numere naturale, calculați:
 - a) valoarea minimă și valoarea maximă a lui S ;
 - b) demonstrați că $S \neq 0$, $\forall a_i \in \mathbb{N}$.
8. Precizați valorile lui n pentru care:
 - a) $(a-b)^n = (b-a)^n$;
 - b) $(a-b)^n = -(b-a)^n$.
9. Arătați că, dacă a, b, c, d sunt numere întregi și pătrate perfecte diferite între ele, atunci:
$$abc + abd + acd + bcd + 332 \leq 2abcd.$$
10. Determinați numerele întregi pozitive x, y, z, t, u care verifică ecuația:
$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^{2+z} \cdot 7^u = t!, \text{ cu } t! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot t.$$

GEOMETRIE

11. Fie un triunghi isoscel $\triangle ABC$ cu baza $[BC]$ și D mijlocul laturii $[AC]$. Paralela prin D la AB intersectează BC în E și bisectoarea unghiului $\angle ABC$ în F . Demonstrați că:
a) triunghiurile $\triangle DEC$ și $\triangle ADE$ sunt isoscele;
b) $AE \perp BC$; $(BE) \equiv (EC) \equiv (EF)$.
12. Fie $\triangle ABC$ echilateral și D piciorul înălțimii din A . Perpendiculara din D pe AB intersectează paralela prin A la BC în E . Arătați că $2AE = 3AB$.
13. Dreapta care unește vârful A al unui triunghi $\triangle ABC$ cu mijlocul medianei din B intersectează pe BC în D . Demonstrați că $BD = BC/3$.
14. Se consideră cinci semidrepte având aceeași origine. Câte unghiuri determină aceste semidrepte? (studiați toate posibilitățile).
15. Fie unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$, astfel încât $m(\angle AOB) = 3 \cdot m(\angle BOC)$. Știind că măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri este 60° , să se afle măsurile unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$.
16. Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente. Bisectoarea unghiului $\angle AOB$ formează cu semidreapta $[OC]$ un unghi de 100° , iar unghiul format de bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$ are măsura de 70° .
a) Calculați măsurile unghiurilor $\angle AOC$, $\angle AOB$ și $\angle BOC$.
b) Cercetați dacă unghiurile $\angle AOP$ și $\angle BOC$ sunt congruente, unde $[OP]$ este opusă bisectoarei unghiului $\angle BOC$.
17. Desenați un unghi $\angle AOB$, M mijlocul segmentului $[OB]$ și punctul C pe semidreapta (AM) pentru care $MA = MC$. Demonstrați că $BC \parallel OA$.
18. Fie un triunghi isoscel $\triangle ABC$ cu baza $[BC]$ și $[AD]$ înălțime. Dacă $P \in (AB)$, $R \in (AC)$ și $\angle ADP \equiv \angle ADR$, arătați că $AD \perp PR$.
19. Demonstrați implicația: $d_1 \parallel d_2$ și $d_3 \nparallel d_2 \Rightarrow d_1 \nparallel d_3$.
20. Fie un punct M pe latura $[BC]$ a unui triunghi $\triangle ABC$. Paralela prin M la AB intersectează $[AC]$ în D , iar paralela prin M la AC intersectează $[AB]$ în E . Demonstrați că $\angle BEM \equiv \angle CDM$.