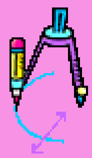
Motto:

„Geometria este cea mai bună şi mai simplă dintre toate logicile, cea mai potrivită să dea inflexibilitate judecăţii şi raţiunii. ”

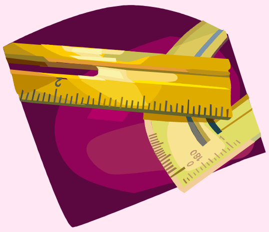
Denis Diderot

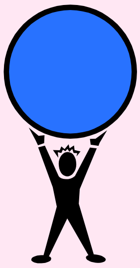
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

PARTEA a II-a

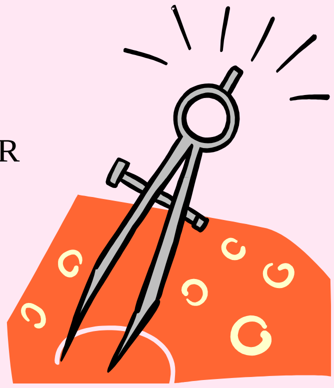


GEOMETRIE, TRIGONOMETRIE



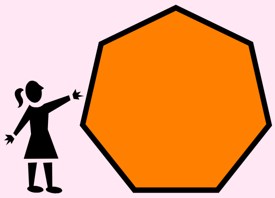


$$L_{cerc} = 2\pi R$$

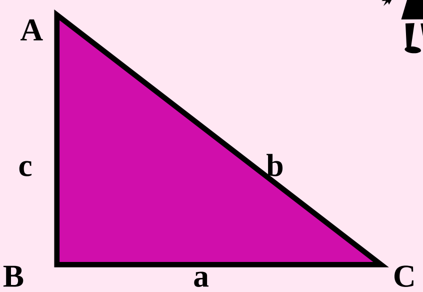


Din cuprins:

$$\sin^2 x^\circ + \cos^2 x^\circ = 1$$

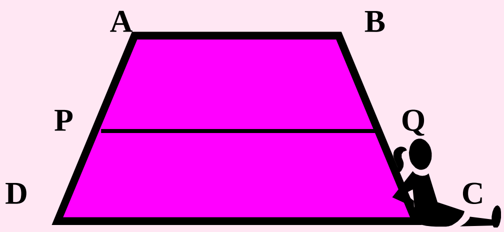


$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$A_{ABC} = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)},\ p = \frac{a+b+c}{2}$$



$$\begin{cases} PQ \parallel AB \parallel CD \\ PQ = \dfrac{AB+CD}{2} \end{cases}$$

A.II. PATRULATERE

A.II.1. PATRULATER CONVEX

Definiţie: Fie patru puncte distincte A, B, C, D situate în acelaşi plan. Figura geometrică, notată ABCD, formată din reuniunea segmentelor [AB], [BC], [CD], [DA] se numeşte ***patrulater*** (*figura II.1*), dacă:

- oricare trei dintre punctele A, B, C, D sunt necoliniare,
- oricare dintre segmentele (AB), (BC), (CD), (DA) sunt disjuncte.

O altă definiţie în formă redusă ar fi: *Poligonul cu patru laturi se numeşte patrulater*.

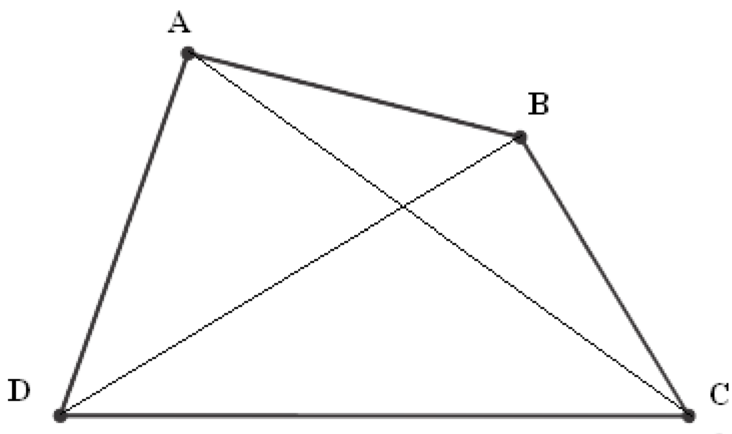


Figura II.1. Reprezentarea unui patrulater

Elementele componente ale patrulaterului ABCD sunt:

- patru vârfuri, reprezentate de punctele A, B, C, D;
- patru laturi, reprezentate de segmentele [AB], [BC], [CD], [DA];
- două diagonale, reprezentate de segmentele [AC], [BD].

Definiţie: Numim ***patrulater convex*** (*figura II.2*), dacă pentru oricare două puncte aflate în interiorul său, segmentul care le uneşte este inclus în interiorul patrulaterului, respectiv ***patrulater concav*** (*figura II.3*), dacă segmentul care uneşte cele două puncte nu este inclus în interiorul patrulaterului.

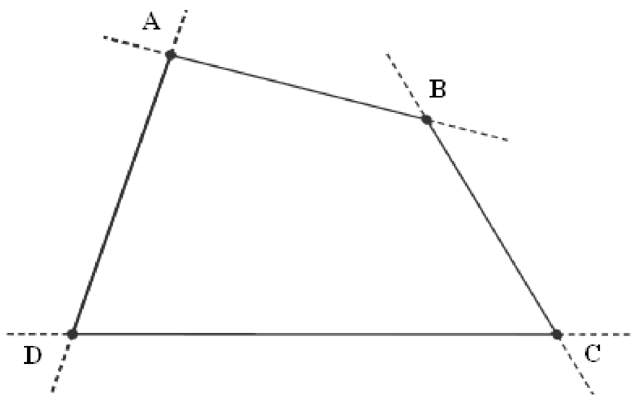


Figura II.2.
Reprezentarea unui patrulater convex

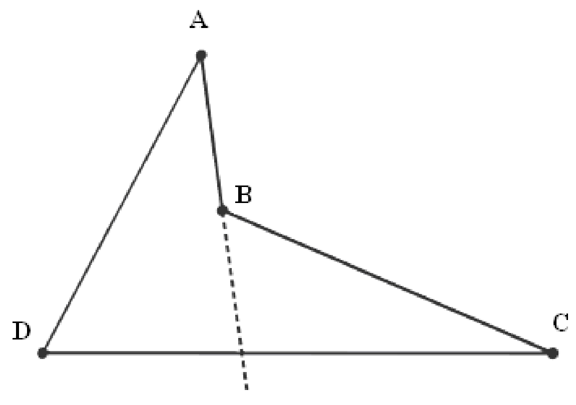


Figura II.3.
Reprezentarea unui patrulater concav

Precizări:

- Orice patrulater convex are 4 unghiuri interioare; de exemplu, pentru patrulaterul convex ABCD acestea sunt: $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$;
- Orice patrulater convex are 8 unghiuri exterioare, prin ***unghi exterior*** înţelegându-se orice unghi adiacent şi suplementar cu un unghi al unui patrulater convex (*figura II.4*); fiecare vârf are câte două unghiuri exterioare opuse la vârf şi congruente; de exemplu, pentru patrulaterul convex ABCD acestea sunt: $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}$.

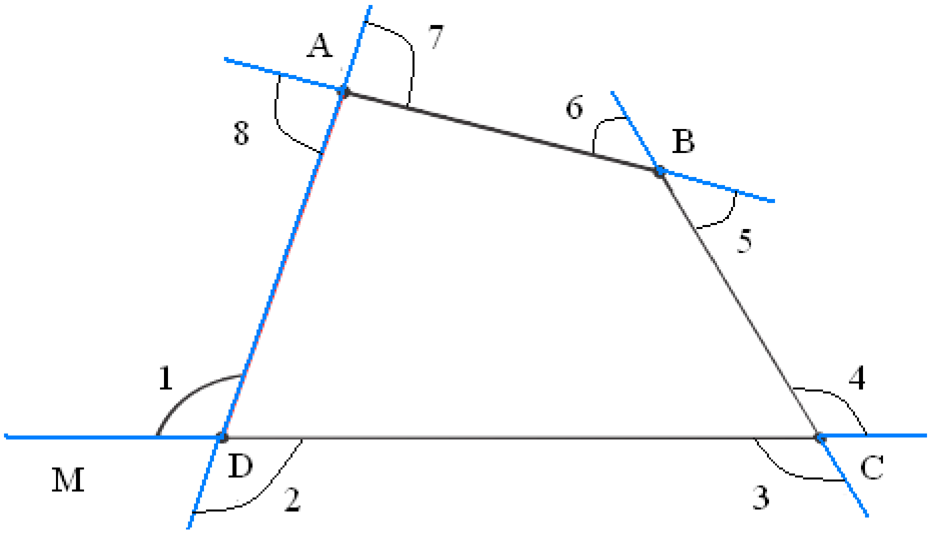


Figura II.4. Reprezentarea unghiurilor exterioare ale patrulaterului convex ABCD

$(\hat{1} \equiv \hat{2};\ \hat{3} \equiv \hat{4};\ \hat{5} \equiv \hat{6};\ \hat{7} \equiv \hat{8})$

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.

Teorema se demonstrează cu uşurinţă astfel: pornind de la un patrulater, se trasează o diagonală, astfel patrulaterul se împarte în două triunghiuri; cum suma unghiurilor unui triunghi este de 180°, iar în acest caz avem două triunghiuri, rezultă că enunţul teoremei este evident.

Definiţie: Numim ***patrulater ortodiagonal*** (*figura II.5*), acel patrulater convex ale cărui diagonale sunt perpendiculare.

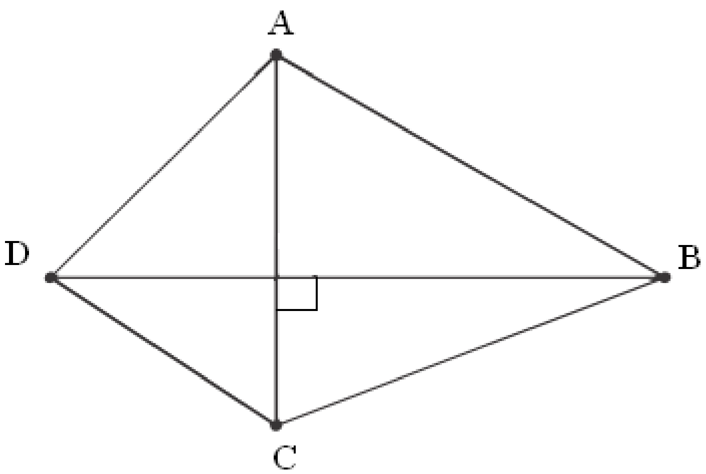


Figura II.5. Reprezentarea unui patrulater ortodiagonal $(AC \perp BD)$

Exemple:

- Ne propunem să determinăm măsurile unghiurilor unui patrulater convex ABCD, ştiind că sunt direct proporţionale cu 2, 3, 6, respectiv cu 7.

$$\frac{\hat{A}}{2}=\frac{\hat{B}}{3}=\frac{\hat{C}}{6}=\frac{\hat{D}}{7}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{2+3+6+7}=\frac{360^\circ}{18}=20^\circ \Rightarrow \begin{cases} m\left(\hat{A}\right)=40^\circ \\ m\left(\hat{B}\right)=60^\circ \\ m\left(\hat{C}\right)=120^\circ \\ m\left(\hat{D}\right)=140^\circ \end{cases}$$

Proba: $m\left(\hat{A}\right)+m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)+m\left(\hat{D}\right)=40^\circ+60^\circ+120^\circ+140^\circ=360^\circ$.

- Vom calcula măsurile unghiurilor unui patrulater convex ABCD, ştiind că:

$m\left(\hat{B}\right)=\frac{1}{3}\cdot m\left(\hat{A}\right)$; $m\left(\hat{C}\right)=\frac{2}{3}\cdot m\left(\hat{A}\right)$; $m\left(\hat{D}\right)=\frac{3}{2}\cdot m\left(\hat{B}\right)$.

Cum $m\left(\hat{A}\right)+m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)+m\left(\hat{D}\right)=360^\circ$, rezultă că:

$m\left(\hat{A}\right)+\frac{1}{3}\cdot m\left(\hat{A}\right)+\frac{2}{3}\cdot m\left(\hat{A}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot m\left(\hat{A}\right)=360^\circ$,

$m\left(\hat{A}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=360^\circ \Rightarrow m\left(\hat{A}\right)=144^\circ$; $m\left(\hat{B}\right)=48^\circ$; $m\left(\hat{C}\right)=96^\circ$; $m\left(\hat{D}\right)=72^\circ$.

A.II.2. PARALELOGRAMUL

Definiţie: Paralelogramul (*figura II.6*) este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două.

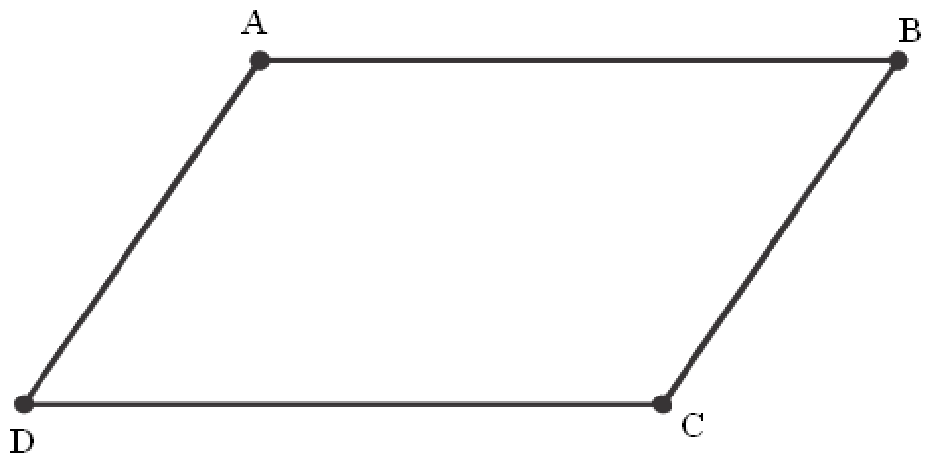


Figura II.6. Reprezentarea unui paralelogram

$AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$

Teoremă: Într-un paralelogram sunt verificate următoarele ***proprietăţi***:

- Laturile opuse sunt congruente două câte două.
- Unghiurile opuse sunt congruente două câte două.
- Două laturi opuse sunt paralele şi congruente.
- Oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare.
- Diagonalele se înjumătăţesc.

Teoremă: (reciproca teoremei anterioare): Dacă într-un patrulater convex este verificată una dintre proprietăţile enunţate în teorema precedentă, atunci patrulaterul este paralelogram.

Cu titlu de ***exemplu*** vom demonstra că paralelogramul are laturile opuse congruente două câte două, dar şi reciproca acestei proprietăţi: dacă un patrulater convex are laturile opuse congruente două câte două, atunci patrulaterul este paralelogram.

Pentru a demonstra că un paralelogram are laturile opuse congruente două câte două, construim paralelogramul ABCD *(figura II.7)*.

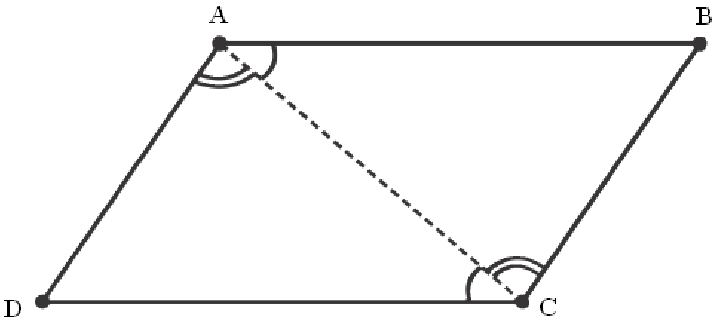


Figura II.7. Reprezentarea paralelogramului ABCD

Din definiţia paralelogramului rezultă:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD} \qquad (1)$$

$$AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{BCA} \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) $\overset{ULU}{\Rightarrow} \Delta BAC \equiv \Delta DCA \Rightarrow [AB] \equiv [CD], [AD] \equiv [BC]$,
ceea ce am dorit să demonstrăm.

Pentru a demonstra că un patrulater convex cu laturile opuse congruente două câte două este paralelogram, construim un patrulater convex ABCD *(figura II.8)* despre care ştim că $[AB] \equiv [CD]$ şi că $[AD] \equiv [BC]$. Rezultă că $\Delta BAC \equiv \Delta DCA$ (LLL) , deci

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD} \Rightarrow AB \parallel CD \qquad (3)$$

$$\widehat{DAC} \equiv \widehat{BCA} \Rightarrow AD \parallel BC \qquad (4)$$

Din relaţiile (3) şi (4), rezultă că ABCD este paralelogram.

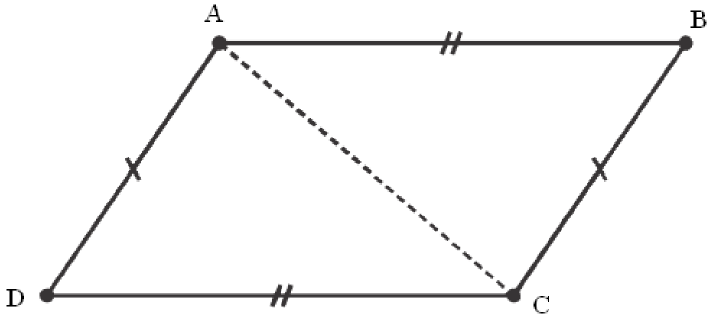


Figura II.8. Reprezentarea patrulaterului convex ABCD

Exemple: Vom utiliza *figura II.9* pentru rezolvarea exemplelor următoare.

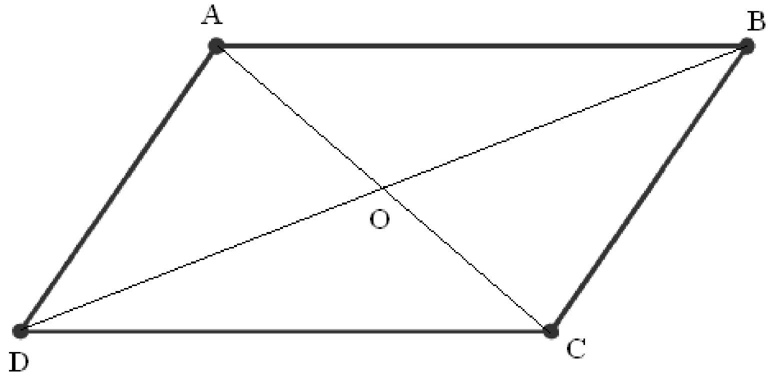


Figura II.9. Desenul aferent exemplelor

- Paralelogramul ABCD are perimetrul egal cu 10,8cm. Ştiind că CD=3,4cm, determinaţi BC.

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot BC + 2 \cdot CD = 2 \cdot BC + 6{,}8$

$P_{ABCD} = 10{,}8$

$\Rightarrow 2 \cdot BC + 6{,}8 = 10{,}8 \Rightarrow 2 \cdot BC = 4 \Rightarrow BC = 2 \text{ cm}$

- Se ştie că în paralelogramul ABCD, $m\left(\hat{A}\right) = 70^\circ$, $CD = 4$cm şi DO=2cm. Calculaţi

măsurile celorlalte unghiuri ale paralelogramului, precum şi lungimea segmentului [BD].

Cum într-un paralelogram unghiurile opuse sunt congruente, rezultă că

$m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{C}\right) = 70^\circ \Rightarrow m\left(\hat{B}\right) = m\left(\hat{D}\right) = (360^\circ - 140^\circ) : 2 = 110^\circ$.

Mai ştim că într-un paralelogram diagonalele se înjumătăţesc, deci: $BD = 4$cm

A.II.3. DREPTUNGHIUL

Definiţie: Dreptunghiul (*figura II.10*) este paralelogramul cu un unghi drept.

Figura II.10. Reprezentarea unui dreptunghi

Observaţie: Dreptunghiul este un caz particular de paralelogram, care, pe lângă toate proprietăţile acestuia, mai are următoarele proprietăţi:

- diagonalele sunt congruente;
- unghiurile unui dreptunghi sunt congruente şi au măsura de 90° fiecare.

Teoremă: Un paralelogram este dreptunghi, dacă şi numai dacă are diagonalele congruente.

Cu titlu de ***exemplu*** vom demonstra că unghiurile unui dreptunghi sunt congruente şi au măsura de 90° fiecare.

Pentru aceasta vom folosi *figura II.9* şi definiţia dreptunghiului. Cum $m\left(\hat{A}\right)=90^\circ$, iar ABCD este paralelogram, rezultă că $m\left(\hat{A}\right)=m\left(\hat{C}\right)=90^\circ$. Folosind o altă proprietate a paralelogramului, prin care oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare, rezultă că:

$m\left(\hat{A}\right)+m\left(\hat{D}\right)=180^\circ \Rightarrow m\left(\hat{D}\right)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$, respectiv

$m\left(\hat{A}\right)+m\left(\hat{B}\right)=180^\circ \Rightarrow m\left(\hat{B}\right)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

Prin urmare, rezultă că $m\left(\hat{A}\right)=m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{C}\right)=m\left(\hat{D}\right)=90^\circ$.

Exemple:

- Un dreptunghi are perimetrul egal cu 100 cm şi lungimile laturilor direct proporţionale cu 4, respectiv 6. Aflaţi lungimile acestora.

P = L + L + *l* + *l*, unde L = latura mare a dreptunghiului, *l* = latura mică a dreptunghiului.
P= 2L+2*l* =100 cm, rezultă că L+*l* =50 cm.

$\frac{l}{4}=\frac{L}{6}=\frac{l+L}{10}=\frac{50}{10}=5 \Rightarrow l$ =20 cm, L=30 cm.

- În dreptunghiul ABCD (*figura II.11*), bisectoare unghiului B intersectează latura [CD] în punctul M. Dacă $m\left(\widehat{MBD}\right)=15^\circ$ şi CM = 10 cm, calculaţi lungimea laturii [AD] şi a diagonalei [AC].

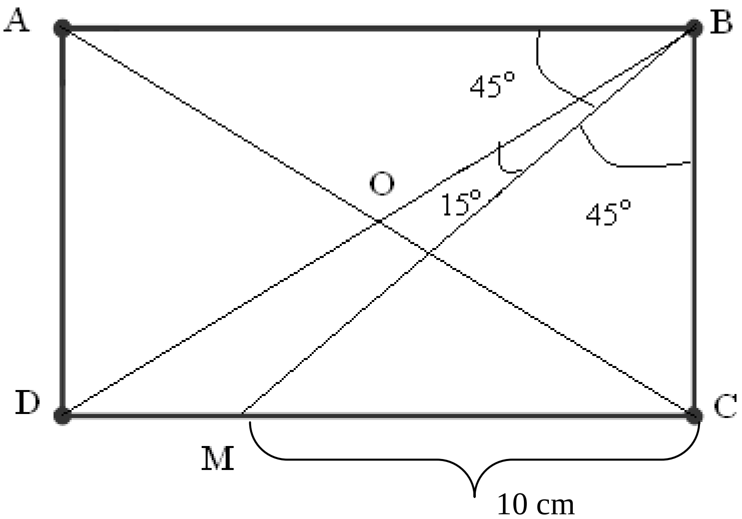


Figura II.11. Desenul aferent exemplului

$m\left(\widehat{ABM}\right)=m\left(\widehat{CBM}\right)=45^\circ$

ΔBCM este dreptunghic, rezultă:

$m\left(\widehat{BMC}\right)=180^\circ-\left(90^\circ+45^\circ\right)=45^\circ$

Deci ΔBCM este dreptunghic isoscel,

$\Rightarrow BC=MC=AD=10\,cm$.

$m\left(\widehat{DMB}\right)=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

$\Rightarrow m\left(\widehat{BDM}\right)=30^\circ$, $m\left(\widehat{ADB}\right)=60^\circ$

Aplicăm teorema $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ în $\Delta ADB \Rightarrow AO=OD=OB=AD$

$\Rightarrow \Delta ADO$ este echilateral

$\Rightarrow AC=2\cdot AD=2\cdot AD=20\,cm$

A.II.4. ROMBUL

Definiţie: Rombul (*figura II.12*) este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.

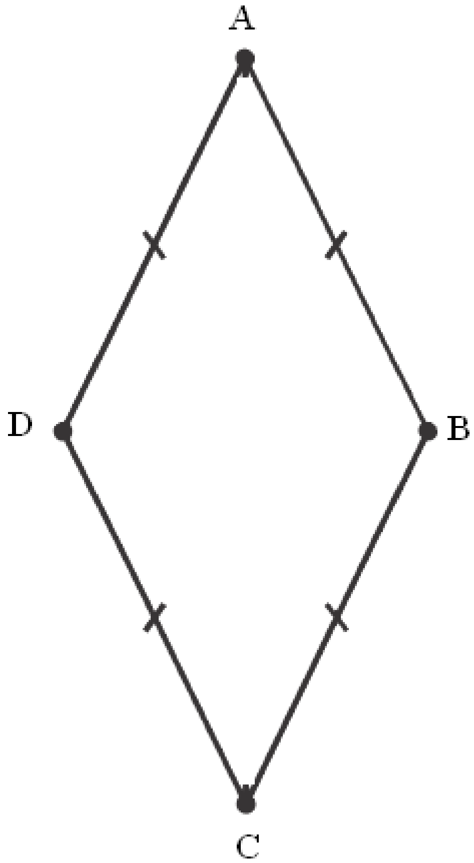


Figura II.12. Reprezentarea unui romb

Observaţie: Rombul este un caz particular de paralelogram, care, pe lângă toate proprietăţile acestuia, mai are următoarele proprietăţi:

- toate laturile sunt congruente;
- diagonalele sunt perpendiculare;
- diagonalele sunt bisectoarele rombului.

Aceste proprietăţi pot fi transpuse în teoreme, astfel:

Teoremă: Dacă un patrulater convex are toate laturile congruente, atunci patrulaterul este romb.

Teoremă: Un paralelogram cu diagonalele perpendiculare este romb.

Teoremă: Dacă într-un paralelogram o diagonală este bisectoarea unui unghi, atunci paralelogramul este romb.

Teoremă: Fiecare diagonală a unui romb este inclusă în bisectoarele a două unghiuri opuse ale rombului.

Definiţie: Înălţimea unui romb este distanţa dintre două laturi opuse ale rombului.

Cu titlu de ***exemplu*** vom demonstra că rombul are diagonalele perpendiculare. Construim rombul ABCD (*figura II.13*), cu $AC \cap BD = \{O\}$.

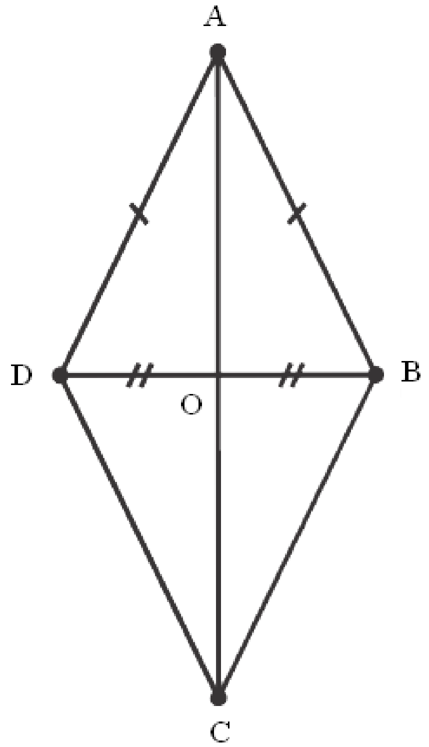


Figura II.13. Desenul aferent exemplului

Se ştie că $[DO] \equiv [OB] \Rightarrow$ [AO] este mediană în ΔADB, triunghi isoscel, deoarece $[AD] \equiv [AB]$. Rezultă că [AO] este şi înălţime în ΔADB, deci $AO \perp BD \Rightarrow AC \perp BD$.

Dacă dorim să demonstrăm, tot cu titlu de ***exemplu***, că fiecare diagonală este inclusă în bisectoarele a două unghiuri opuse ale rombului, vom analiza rombul ABCD din *figura II.13*.

Din ipoteză rezultă că $\Delta ADB \equiv \Delta DCB$ (LLL). Prin urmare, $\widehat{ADB} \equiv \widehat{BDC} \Rightarrow [DB$ este bisectoarea $\widehat{ADC}$, respectiv $\widehat{ABD} \equiv \widehat{CBD} \Rightarrow [BD$ este bisectoarea $\widehat{ABC}$.

Similar pentru diagonala $[AC]$. Din ipoteză rezultă că $\Delta ADC \equiv \Delta ABC$ (LLL). Prin urmare, $\widehat{DAC} \equiv \widehat{BAC} \Rightarrow [AC$ este bisectoarea $\widehat{DAB}$, respectiv $\widehat{DCA} \equiv \widehat{BCA} \Rightarrow [CA$ este bisectoarea $\widehat{DCB}$.

Exemple:

- Se dă ΔABC isoscel cu baza [BC], [BD] înălţime, $D \in (BC)$, $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Arătaţi că AEDF este romb.

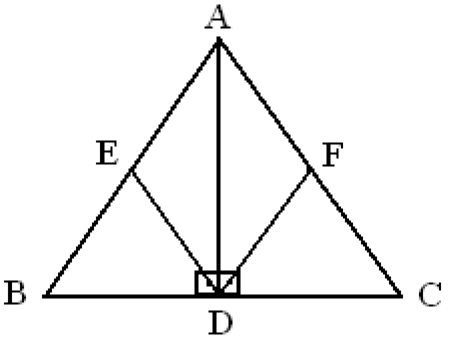


Figura II.14. Desenul aferent exemplului

În *figura II.14* se prezintă desenul corespunzător enunţului.

$\left.\begin{array}{l} DE \parallel AC \\ F \in (AC) \end{array}\right| \Rightarrow DE \parallel AF \quad (1)$

$\left.\begin{array}{l} DF \parallel AB \\ E \in (AB) \end{array}\right| \Rightarrow DF \parallel AE \quad (2)$

ΔABC e isoscel, $AD \perp BC \Rightarrow (AD$ şi bisectoare $\quad (3)$

$\overset{(1),(2),(3)}{\Rightarrow} \quad AEDF = \text{romb}$

- În paralelogramul MNPQ (*figura II.15*) se ştie că NP = 4cm şi PQ =8 cm. Dacă E şi F sunt mijloacele laturilor [MN], respectiv [PQ], arătaţi că $MF \perp QE$

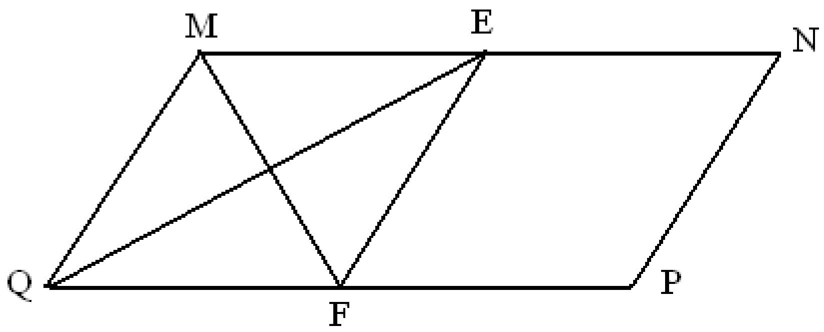


Figura II.15. Desenul aferent exemplului

$$\left.\begin{array}{l} NP = 4\,cm \\ NP = MQ \end{array}\right| \Rightarrow NP = MQ = 4\,cm$$

$$\left.\begin{array}{l} PQ = 8\,cm \\ MN = PQ \end{array}\right| \Rightarrow MN = PQ = 8\,cm$$

$$\left.\begin{array}{l} ME = EN \\ QF = FP \end{array}\right| \Rightarrow ME = EN = QF = FP = 4\,cm$$

$\left.\begin{array}{l} MN \parallel QP \Rightarrow ME \parallel QF \\ ME = QF = 4\,cm \end{array}\right| \Rightarrow MEFQ$ e paralelogram $\Rightarrow MEFQ$ e romb, iar într-un romb diagonalele sunt perpendiculare, adică $MF \perp QE$.

A.II.5. PĂTRATUL

Definiţie: Pătratul (*figura II.16*) este patrulaterul convex cu toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente.

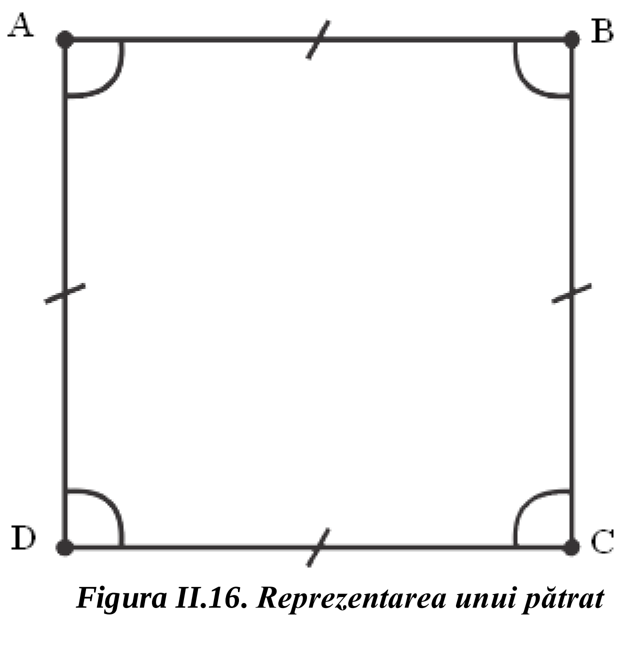


Figura II.16. Reprezentarea unui pătrat

Observaţie: Pătratul este şi romb, deoarece are toate laturile congruente, dar este şi dreptunghi, deoarece are toate unghiurile congruente. Aşadar, pătratul are toate proprietăţile dreptunghiului şi rombului, adică:

- toate laturile sunt congruente;
- toate unghiurile sunt congruente, deci drepte;
- diagonalele sunt congruente, perpendiculare şi au acelaşi mijloc;
- diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor.

Teoremă: Dacă un paralelogram are două laturi consecutive congruente şi un unghi drept, atunci este pătrat.

Teoremă: Dacă un paralelogram are diagonalele congruente şi perpendiculare, atunci este pătrat.

Exemple:

- Se consideră triunghiurile dreptunghice isoscele ABD şi CDB, având ipotenuza [BD] comună. Arătaţi că ABCD este pătrat. (*figura II.17*)

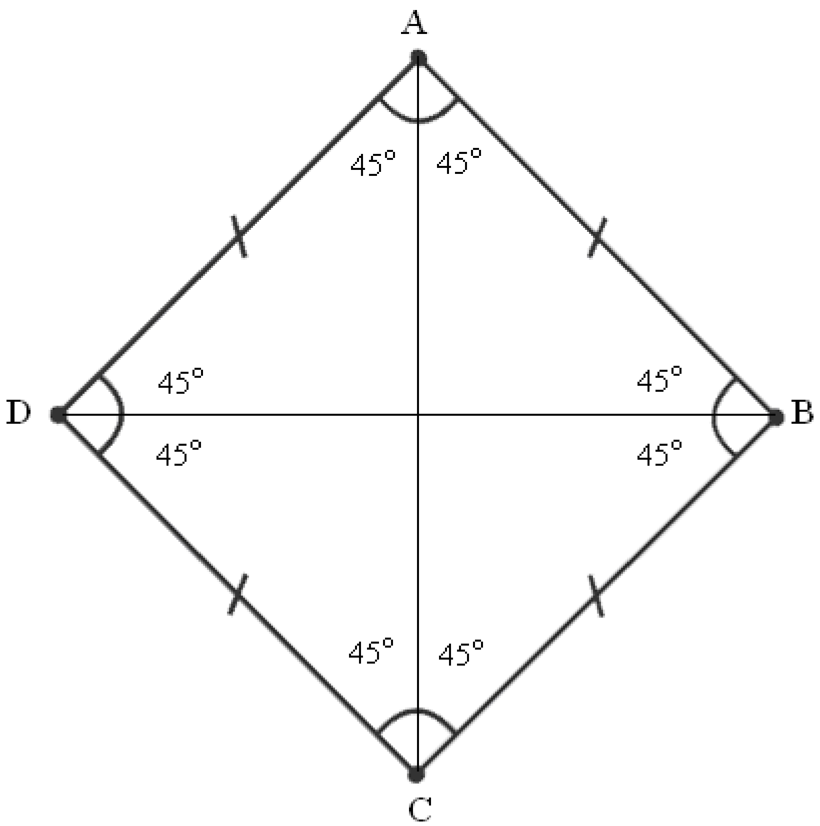


Figura II.17. Desenul aferent exemplului

$\Delta ABD \equiv \Delta BCD \ (IU) \Rightarrow AB = BC$ şi $CD = DA$.

Dar AB = AD şi BC = CD, deoarece triunghiurile sunt isoscele $\Rightarrow AB = BC = CD = DA \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ABCD romb.

Cum $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ$ şi ABCD romb $\Rightarrow$ ABCD pătrat.

- În *figura II.18*, ABCD este pătrat şi CED este triunghi echilateral. Aflaţi măsura $\widehat{CBE}$.

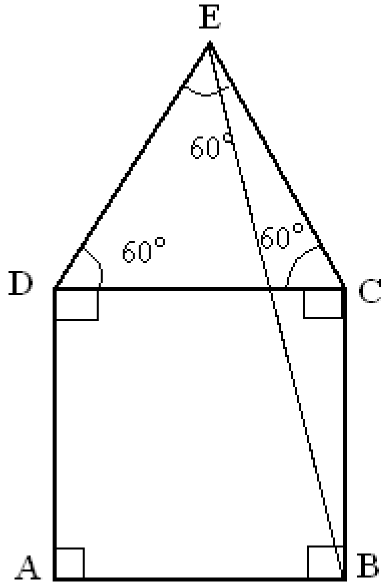


Figura II.18. Desenul aferent exemplului

ΔCED echilateral $\Rightarrow [CE] \equiv [ED] \equiv [CD]$, $m\left(\widehat{DEC}\right) = m\left(\widehat{ECD}\right) = m\left(\widehat{CDE}\right) = 60^\circ$

dar ABCD este pătrat, deci $\Rightarrow [CD] \equiv [DA] \equiv [AB] \equiv [BC]$, $m\left(\widehat{A}\right) = m\left(\widehat{B}\right) = m\left(\widehat{C}\right) = m\left(\widehat{D}\right) = 90^\circ$.

$\Rightarrow m\left(\widehat{ECD}\right) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ şi cum ΔECD este isoscel cu $[EC] \equiv [BC] \Rightarrow$

$m\left(\widehat{CEB}\right) = m\left(\widehat{CBE}\right) = \left(180^\circ - 150^\circ\right) : 2 = 15^\circ$.

A.II.6. TRAPEZUL

Definiţie: Patrulaterul convex cu două laturi opuse paralele şi celelalte două laturi opuse neparalele se numeşte ***trapez.*** Laturile paralele se numesc ***baze*** [latura mai mică – baza mică (AB), iar latura mai mare – baza mare (CD)], iar distanţa dintre bazele trapezului se numeşte ***înălţimea*** trapezului (MN). (*figura II.19*)

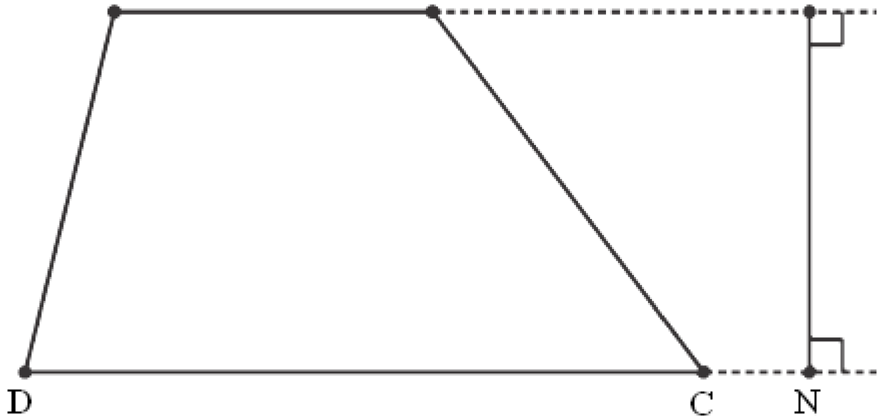


Figura II.19. Reprezentarea unui romb

Definiţie: Trapezul dreptunghic este trapezul cu un unghi drept. (*figura II.20*)

Definiţie: Trapezul isoscel este trapezul cu laturile neparalele congruente. (*figura II.21*)

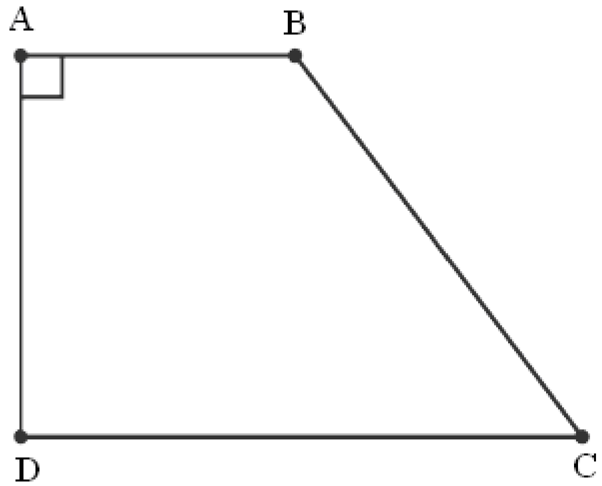


Figura II.20. Reprezentarea unui trapez dreptunghic

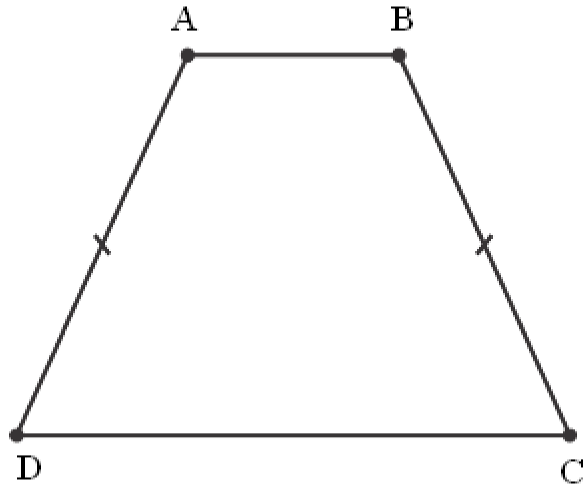


Figura II.21. Reprezentarea unui trapez isoscel

Trapezul isoscel are următoarele ***proprietăţi***:

- unghiurile alăturate unei baze sunt congruente;
- diagonalele sunt congruente.

Teoremă: Un trapez este isoscel, dacă şi numai dacă unghiurile alăturate unei baze sunt congruente.

Teoremă: Un trapez este isoscel, dacă şi numai dacă diagonalele sunt congruente.

Cu titlu de ***exemplu*** vom demonstra că într-un trapez isoscel unghiurile alăturate bazei mari sunt congruente.

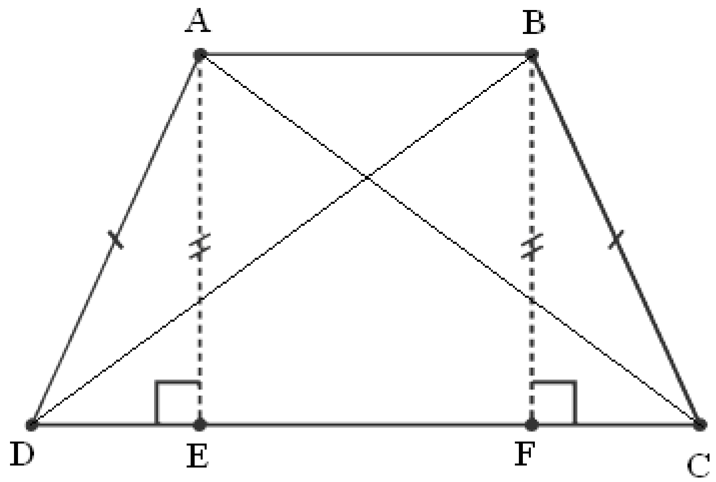


Figura II.22. Desenul aferent exemplului

Construim trapezul isoscel ABCD (*figura II.22*), cu $AB \parallel DC$, $AB < DC$, $[AD] \equiv [BC]$.

Construim $AE \perp DC$, $BF \perp DC$, $E, F \in (DC)$.

Din $AE \perp DC$, $BF \perp DC \Rightarrow AE \parallel BF \Rightarrow$ ABFE este dreptunghi, deci $[AE] \equiv [BF]$

Ştim din ipoteză că $[AD] \equiv [BC] \Rightarrow \Delta AED \equiv \Delta BFC$ (IC)

$\widehat{ADE} \equiv \widehat{BCF}$, deci unghiurile alăturate bazei mari sunt congruente.

Rezultă evident că şi $\widehat{DAE} \equiv \widehat{CBF}$, ceea ce înseamnă că şi unghiurile alăturate bazei mici sunt congruente.

Observaţie: Dacă trasăm şi diagonalele în *figura II.22* şi ţinem cont de ceea ce am demonstrat că $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BCD}$, rezultă că $\Delta ADC \equiv \Delta BCD$ (LUL), $[AC] \equiv [BD]$ adică diagonalele sunt congruente într-un trapez isoscel.

Exemple:

- Determinaţi măsurile unghiurilor unui trapez ABCD şi natura acestuia, ştiind că unghiurile sunt invers proporţionale cu $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$.

$$\frac{\hat{A}}{6} = \frac{\hat{B}}{5} = \frac{\hat{C}}{6} = \frac{\hat{D}}{7} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{6+5+6+7} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ \Rightarrow \begin{cases} m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ \\ m\left(\hat{B}\right) = 75^\circ \\ m\left(\hat{C}\right) = 90^\circ \\ m\left(\hat{D}\right) = 105^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{ trapez dreptunghic.}$$

- Fie trapezul dreptunghic ABCD cu $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ$, $AB \parallel DC$, $AB > DC$, $m\left(\widehat{CAB}\right) = 60^\circ$,

$AC \perp BC$. Arătaţi că $AB = 4 \cdot CD$.

Construim în *figura II.23* trapezul dreptunghic ABCD, conform cerinţelor din enunţ.

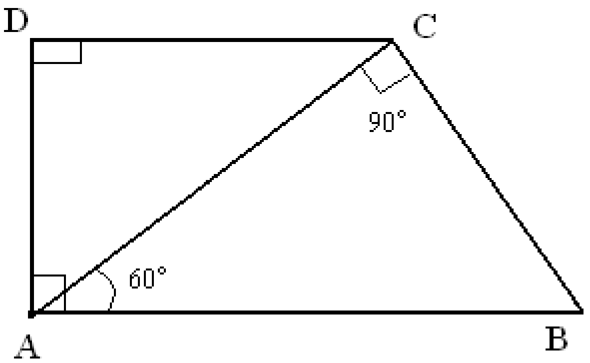


Figura II.23. Desenul aferent exemplului

ΔADC - dreptunghic

$m\left(\widehat{CAB}\right) = m\left(\widehat{ACD}\right) = 60^\circ$ - unghiuri alterne interne, $\Rightarrow m\left(\widehat{CAD}\right) = 180^\circ - \left(90^\circ + 60^\circ\right) = 30^\circ$

Aplicând teorema $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ \Rightarrow CD = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2 \cdot CD$ (1)

ΔACB - dreptunghic

$m\left(\widehat{CAB}\right) = 60^\circ \Rightarrow m\left(\widehat{CBA}\right) = 180^\circ - \left(90^\circ + 60^\circ\right) = 30^\circ$

Aplicând teorema $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ \Rightarrow AC = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2 \cdot AC$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2), rezultă că: $AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot 2 \cdot CD = 4 \cdot CD$

$AB = 4 \cdot CD$

A.II.7. LINIA MIJLOCIE ÎN TRIUNGHI ŞI TRAPEZ

Linia mijlocie în triunghi

Definiţie: Linia mijlocie într-un triunghi (*figura II.24*) este segmentul care uneşte mijloacele a două laturi ale triunghiului.
Dacă $[AP] \equiv [PB]$ şi $[AQ] \equiv [QC] \Rightarrow [PQ]$ este linie mijlocie.

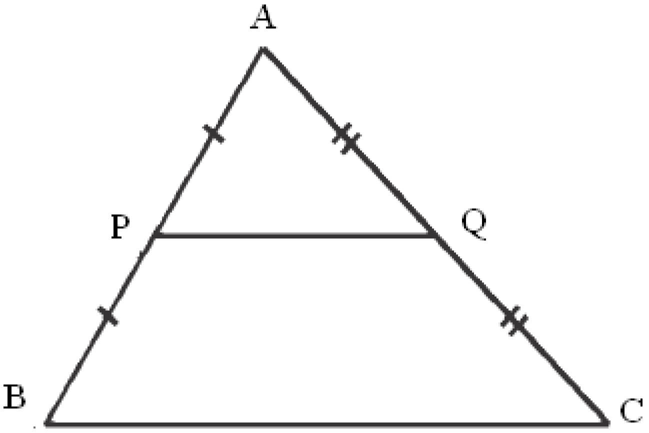


Figura II.24. Linia mijlocie într-un triunghi

Observaţie: Într-un triunghi există trei linii mijlocii.

Teorema liniei mijlocii în triunghi: Fiecare linie mijlocie a unui triunghi este paralelă cu a treia latură a triunghiului şi este egală cu jumătate din lungimea acesteia.

Deci, dacă $[PQ]$ este linie mijlocie, conform teoremei enunţate anterior, $\Rightarrow \begin{cases} PQ \parallel BC \\ PQ = \dfrac{BC}{2} \end{cases}$

Reciproca teoremei liniei mijlocii în triunghi: Dacă o dreaptă este paralelă cu o latură a unui triunghi şi trece prin mijlocul altei laturi a triunghiului, atunci ea conţine o linie mijlocie.

Deci, dacă $\begin{cases} PQ \parallel BC \\ [AP] \equiv [PB] \end{cases}$, atunci, pe baza reciprocei teoremei liniei mijlocii, PQ este linie mijlocie.

Definiţie: Dat fiind ΔABC, iar M, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ se defineşte ΔMPQ ca ***triunghi median*** ΔABC (*figura II.25*).

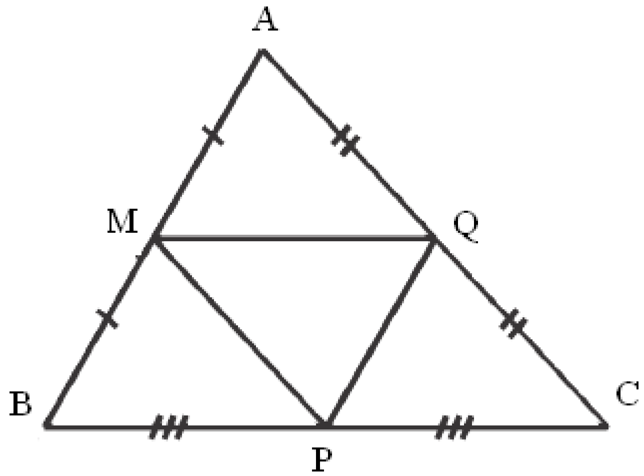


Figura II.25. Reprezentarea unui triunghi median

Exemplu:

- În *figura II.26*, M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $[AB],[AC],[AM],[AN]$. Dacă PQ=2,5cm, calculaţi lungimile segmentelor $[MN],[BC]$.

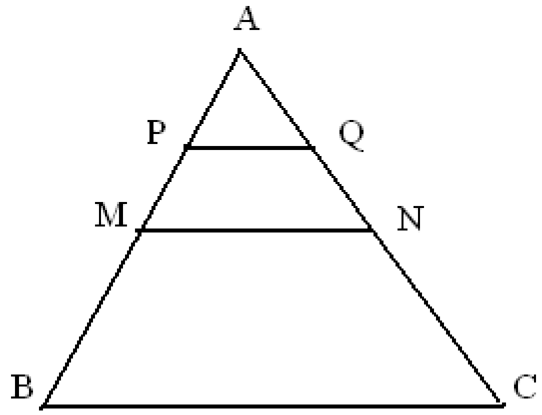


Figura II.26. Desenul aferent exemplului

$$\begin{cases}[AM]\equiv[MB]\\ [AN]\equiv[NC]\end{cases}\Rightarrow MN=\frac{BC}{2}$$

$$\begin{cases}[AP]\equiv[PM]\\ [AQ]\equiv[QN]\end{cases}\Rightarrow PQ=\frac{MN}{2}\Rightarrow MN=2\cdot PQ=5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow BC=2\cdot MN=10\text{ cm}$$

Teoremă: Centrul de greutate al unui triunghi este situat pe fiecare mediană la două treimi de vârf şi o treime faţă de bază.

Exemplu:

- Fie paralelogramul ABCD (*figura II.27*) , punctul O, punctul de intersecţie a diagonalelor $\{O\}=AC\cap BD$, iar E şi F sunt mijloacele laturilor (AB) şi (BC). Arătaţi că O este centrul de greutate al ΔDEF.

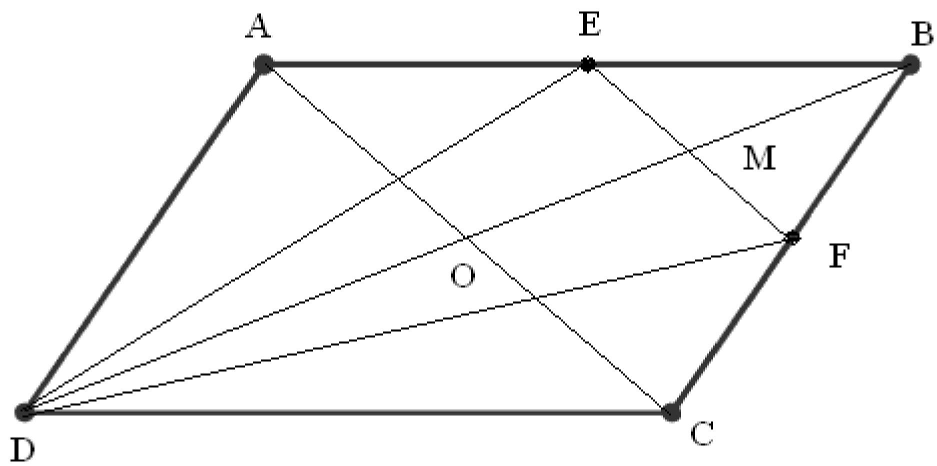


Figura II.27. Desenul aferent exemplului

Notăm cu $\{M\}=EF\cap BD$

$$\begin{cases}[AE]\equiv[EB]\\ [BF]\equiv[FC]\end{cases}\Rightarrow EF=\frac{AC}{2}\text{ = linie mijlocie în }\Delta ABC\Rightarrow[OM]=[MB]\Rightarrow OM=\frac{OB}{2}=\frac{OD}{2}\Rightarrow$$

că O este centrul de greutate al ΔDEF.

Linia mijlocie în trapez

Definiţie: Linia mijlocie în trapez (*figura II.28*) este segmentul de dreaptă determinat de mijloacele neparalele ale trapezului.
Dacă $[AP]\equiv[PD]$ şi $[BQ]\equiv[QC]\Rightarrow[PQ]$ este linie mijlocie.

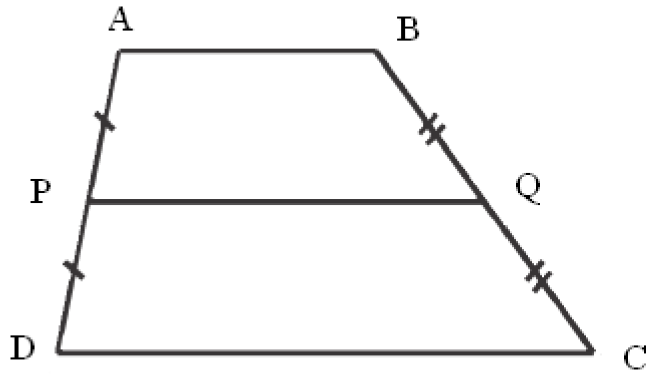


Figura II.28. Linia mijlocie într-un trapez

Teorema liniei mijlocii în trapez: Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele şi are lungimea egală cu semisuma lungimilor acestora.

Deci, dacă [PQ] este linie mijlocie, conform teoremei enunţate anterior, $\Rightarrow\begin{cases} PQ \parallel AB \parallel CD \\ PQ=\dfrac{AB+CD}{2}\end{cases}$

Exemple:

- În trapezul ABCD lungimile bazelor sunt de 14 cm, respectiv 6 cm. Determinaţi lungimea liniei mijlocii, respectiv lungimile segmentelor determinate de diagonale pe linia mijlocie.

Fie trapezul ABCD din *figura II.29*, în care: $AB < CD$, [PQ] este linie mijlocie.
Notăm cu $\{M\}=PQ\cap BD$, $\{N\}=PQ\cap AC$.

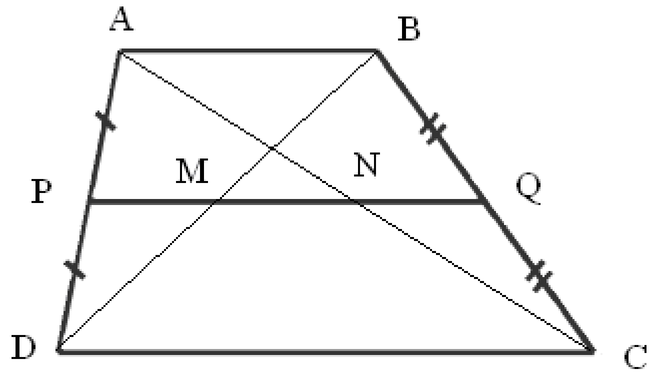


Figura II.29. Desenul aferent exemplului

$PQ=\dfrac{AB+CD}{2}=\dfrac{6+14}{2}=10\text{cm}$

În ΔADB, $[PM]$ este linie mijlocie, deci $PM=\dfrac{AB}{2}=3\text{cm}$.

În ΔABC, $[NQ]$ este linie mijlocie, deci $NQ=\dfrac{AB}{2}=3\text{cm}$.

În ΔBCD, $[MQ]$ este linie mijlocie, deci $MQ=\dfrac{CD}{2}=7\text{cm}$.

Rezultă că $MN=MQ-NQ=7-3=4$ cm

- Arătaţi că diagonalele unui trapez determină pe linia mijlocie un segment de lungime egală cu jumătatea diferenţei dintre baza mică şi baza mare a trapezului.

Folosind trapezul ABCD din *figura II.29*, avem:

În ΔADC, $[PN]$ este linie mijlocie, deci $PN = \frac{CD}{2}$.

În ΔADB, $[PM]$ este linie mijlocie, deci $PM = \frac{AB}{2}$.

Rezultă că: $MN = PN - PM = \frac{CD - AB}{2}$

Deci, ***diagonalele unui trapez determină pe linia mijlocie un segment de lungime egală cu semidiferenţa dintre baza mare şi baza mică a trapezului.***

A.II.8. CENTRUL DE SIMETRIE ŞI AXELE DE SIMETRIE ALE POLIGOANELOR STUDIATE

Definiţie: Două puncte A şi A* sunt simetrice faţă de un punct O, dacă O este mijlocul segmentului [AA*]. Punctul A* se numeşte simetricul punctului A faţă de punctul O, iar punctul A se numeşte simetricul punctului A* faţă de punctul O.

Definiţie: Două puncte A şi A* sunt simetrice faţă de o dreaptă **d**, dacă dreapta este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte. Punctul A* se numeşte simetricul punctului A faţă de dreapta **d**, iar punctul A se numeşte simetricul punctului A* faţă de dreapta **d**.

Definiţie: Două figuri F1 şi F2 sunt simetrice faţă de o dreaptă **d**, dacă prin pliere după dreapta **d** figurile coincid.

Definiţie: Două figuri F1 şi F2 sunt simetrice faţă de o dreaptă **d**, dacă orice punct al figurii F1 are ca simetrie faţă de dreapta **d** un punct al figurii F2 şi invers. Dreapta **d** se numeşte ***axă de simetrie.***

Exemplu: În *figura II.30* se prezintă două puncte simetrice **A**, **B**, două segmente simetrice **[CD]**, **[C*D*]** şi două triunghiuri simetrice **XZY** şi **X*Y*Z***, faţă de axa de simetrie care este dreapta **d**.

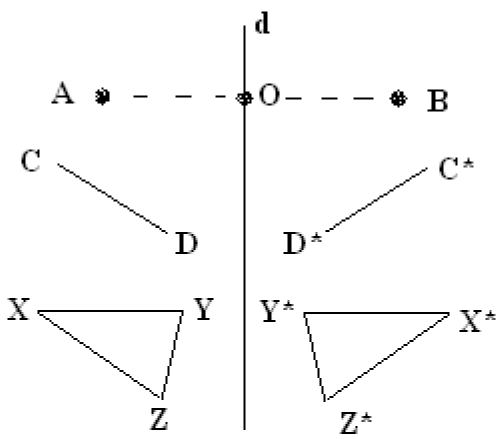


Figura II.30. Reprezentarea simetriei

Definiţie: Fie o figură geometrică F şi un punct O al figurii F. Dacă simetricul fiecărui punct A al figurii O este un punct A* al figurii, spunem că O este ***centrul de simetrie*** al figurii.

Particularizări ale centrului de simetrie şi axelor de simetrie pentru diverse poligoane

Paralelogramul

Teoremă: Punctul de intersecţie al diagonalelor unui paralelogram este centrul de simetrie al acestuia.

Observaţie: Paralelogramul nu are axe de simetrie.

Cu titlu de ***exemplu*** vom arăta că mijlocul unei diagonale a unui paralelogram este centru de simetrie. Construim în acest sens paralelogramul din *figura II.31*; trasăm diagonala AC a paralelogramului şi considerăm punctul O ca mijloc al diagonalei AC. Vom demonstra că punctul O este centrul de simetrie al paralelogramului.

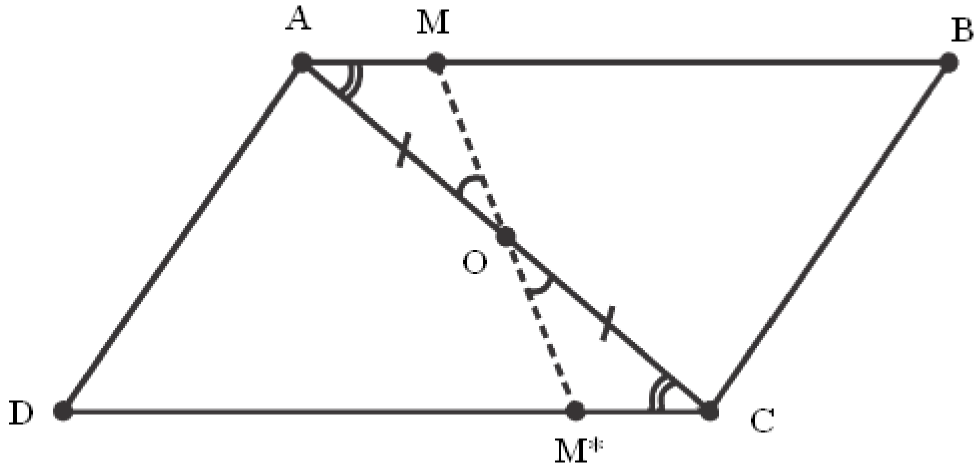


Figura II.31. Desenul aferent exemplului

Considerăm un punct M oarecare al paralelogramului şi arătăm că simetricul lui M faţă e O aparţine paralelogramului. Fie $\{M^*\} = MO \cap CD$. Din ABCD paralelogram, avem $AB \parallel CD$, deci $\widehat{MAO} \equiv \widehat{M^*CO}$. Cum $[AO] \equiv [OC] \Rightarrow \Delta MAO \equiv \Delta M^*CO$ (ULU). Prin urmare, M* este simetricul punctului M faţă de O şi aparţine paralelogramului ABCD, deci O este centrul de simetrie al paralelogramului.

Dreptunghiul

Observaţie: Dreptunghiul (*figura II.32*) are:

- două axe de simetrie: mediatoarele laturilor opuse,
- un centru de simetrie: punctul de intersecţie al diagonalelor.

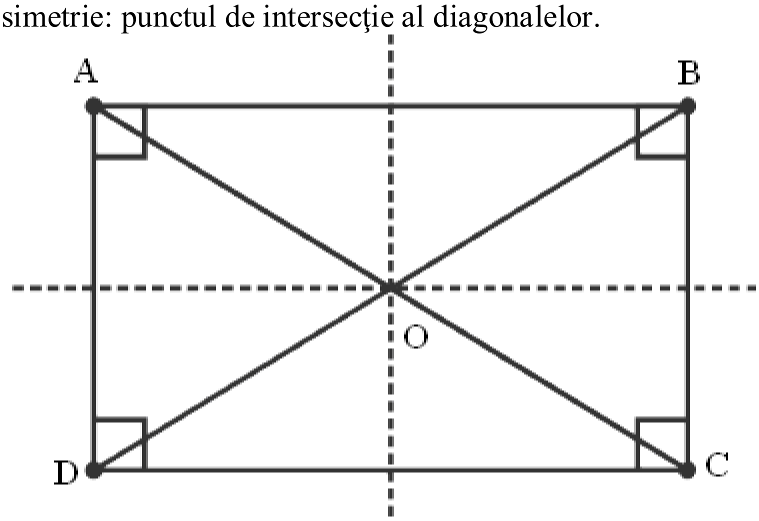


Figura II.32. Reprezentarea axelor de simetrie şi a centrului de simetrie pentru un dreptunghi

Rombul

Observaţie: Rombul (*figura II.33*) are:

- două axe de simetrie: dreptele-suport ale diagonalelor;
- un centru de simetrie: punctul de intersecţie al diagonalelor.

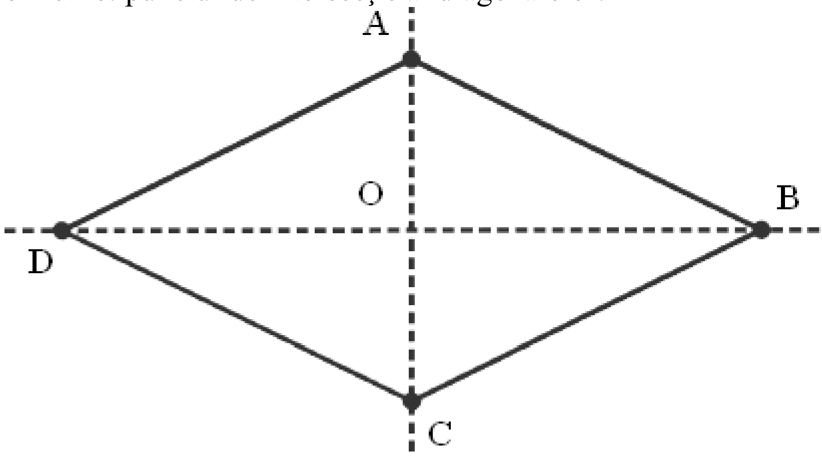


Figura II.33. Reprezentarea axelor de simetrie şi a centrului de simetrie pentru un romb

Pătratul

Observaţie: Pătratul (*figura II.34*) are:

- patru axe de simetrie: mediatoarele laturilor opuse şi dreptele-suport ale diagonalelor;
- un centru de simetrie: punctul de intersecţie al diagonalelor.

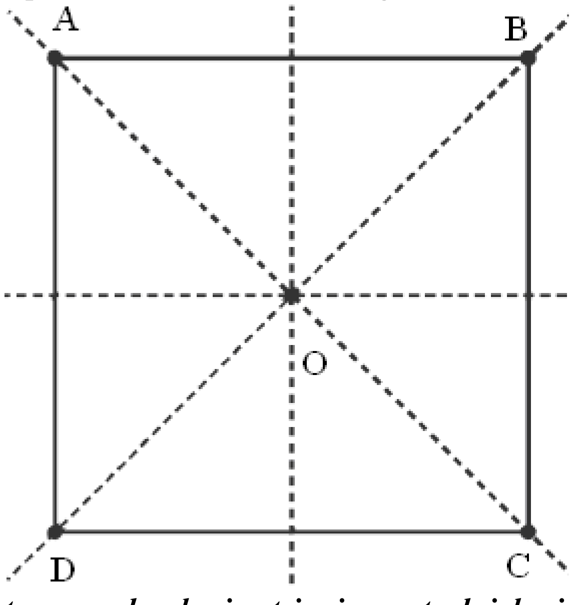


Figura II.34. Reprezentarea axelor de simetrie şi a centrului de simetrie pentru un pătrat

Trapezul isoscel

Observaţie: Trapezul isoscel (*figura II.35*) are o axă de simetrie: mediatoarea bazelor.

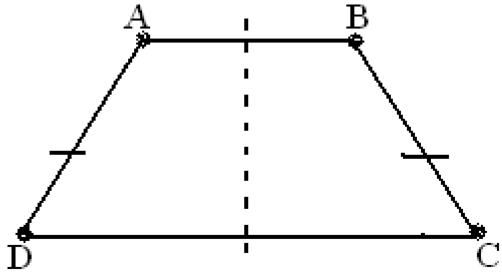


Figura II.35. Reprezentarea axei de simetrie pentru un trapez isoscel

A.II.9. ARIILE FIGURILOR GEOMETRICE

Triunghi

Aria triunghiului se calculează cu diferite formule, în funcţie de tipul de triunghi (*figurile II.36 ÷ II.41*), de datele cunoscute, după cum vom putea constata în cele ce urmează:

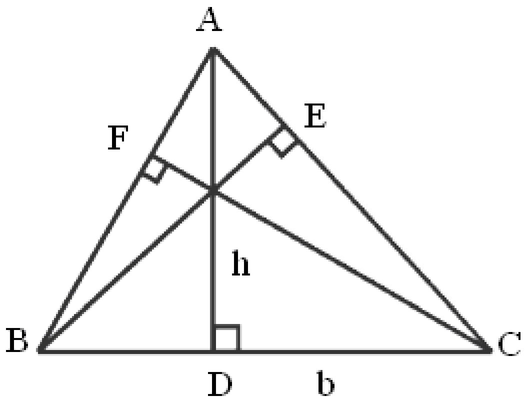


Figura II.36.
Reprezentarea unui triunghi oarecare

Formula de bază a ariei unui triunghi este:

$$\boxed{\boldsymbol{A}_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{BE \cdot AC}{2} = \frac{CF \cdot AB}{2} = \frac{h \cdot b}{2}}$$

unde $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$,
h = înălţime, b = bază.

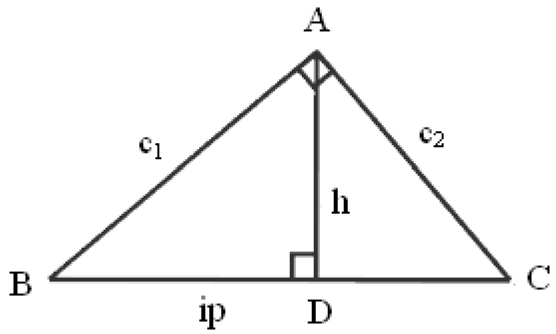


Figura II.37.
Reprezentarea unui triunghi dreptunghic

Formula ariei unui triunghi dreptunghic este:

$$\boxed{\boldsymbol{A}_{ABC} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{h \cdot ip}{2}}$$

unde c_1, c_2 – catete, ip – ipotenuză.

$$\boxed{h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}}$$

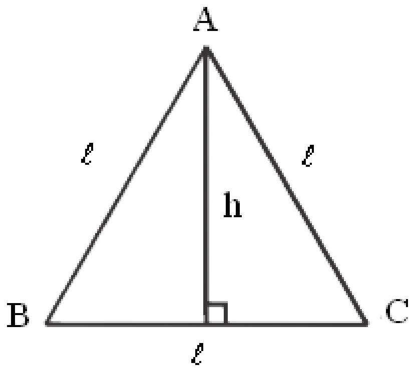


Figura II.38.
Reprezentarea unui triunghi echilateral

Formula ariei unui triunghi echilateral este:

$$\boxed{\boldsymbol{A}_{ABC} = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

unde ℓ=AB=BC=AC

$$\boxed{h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}}$$

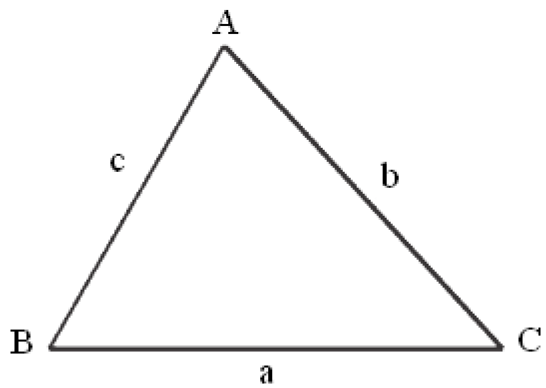


Figura II.39.
Reprezentarea unui triunghi oarecare
de laturi a, b, c

Formula lui Heron:

$$\boxed{A_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}$$

unde p = semiperimetrul triunghiului

$$\boxed{p = \frac{a+b+c}{2}}$$

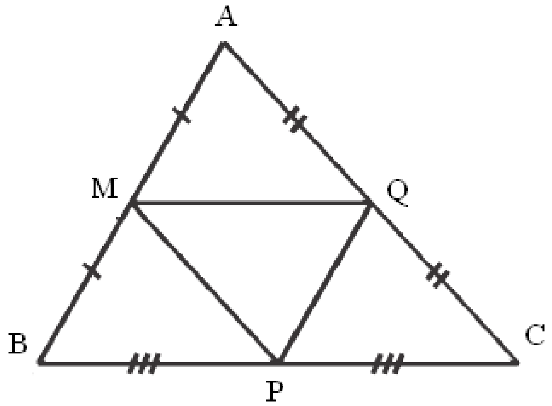


Figura II.40.
Reprezentarea unui triunghi median

Formula ariei unui triunghi median este:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\mathrm{MPQ}} = \frac{A_{ABC}}{4}}$$

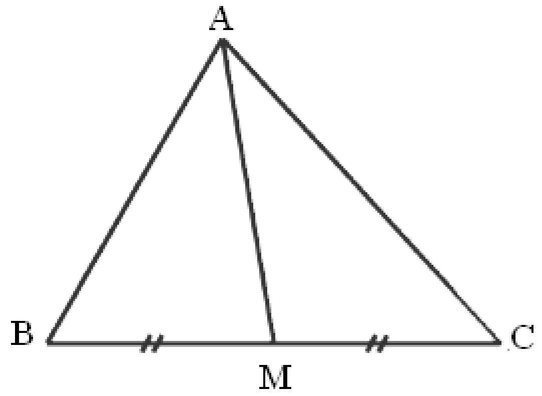


Figura II.41.
Reprezentarea unui triunghi cu $[BM] \equiv [MC]$

Proprietatea medianei: $\boxed{\mathbf{A}_{\mathrm{ABM}} = \mathbf{A}_{\mathrm{ACM}}}$

triunghiuri echivalente=triunghiuri cu arii egale

Mediana împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente.

Patrulatere

Aria unui patrulater oarecare se poate calcula prin descompunerea patrulaterului în triunghiuri şi însumarea ariilor acestora. (*figura II.42*)

$$\boxed{\mathcal{A}\,(ABCD) = \mathcal{A}\,(ABD) + \mathcal{A}\,(CBD)}$$

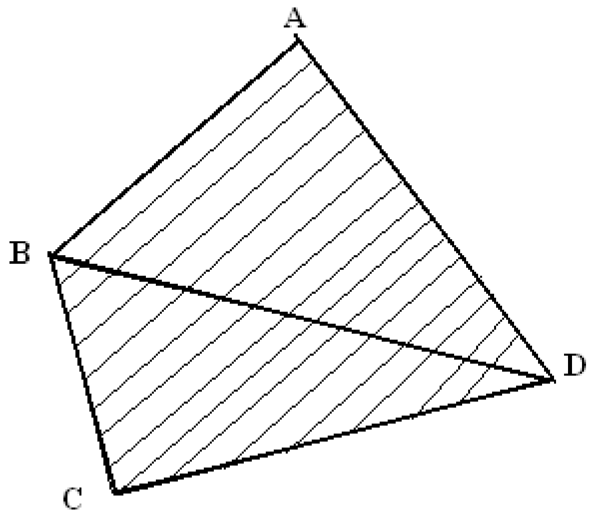


Figura II.42. Descompunerea unei suprafeţe patrulatere în suprafeţe triunghiulare

Generalizare: Orice suprafaţă poligonală se poate descompune în suprafeţe poligonale disjuncte, deci aria acelei suprafeţe este egală cu suma ariilor suprafeţelor ce o compun.

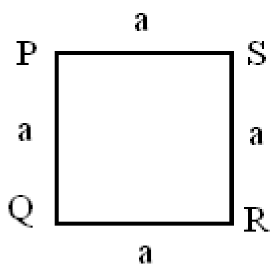


Figura II.43. Reprezentarea unui pătrat

$$\boxed{\mathcal{A}_{\mathrm{PQRS}} = a^2 = PQ^2}$$

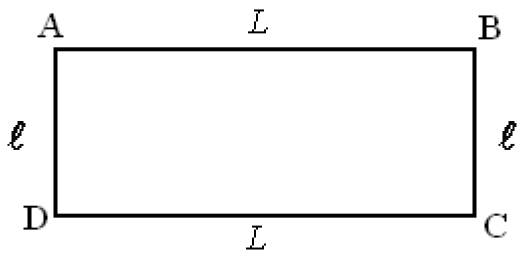


Figura II.44. Reprezentarea unui dreptunghi

$$\boxed{\mathbf{A}_{\mathrm{ABCD}} = L \cdot \ell}$$

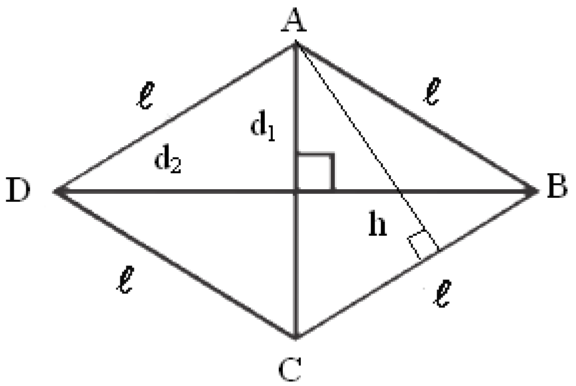


Figura II.45. Reprezentarea unui romb

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \ell \cdot h$$

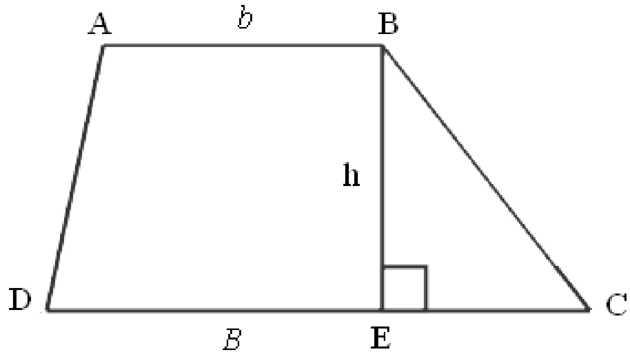


Figura II.46. Reprezentarea unui trapez

$$\boldsymbol{A}_{ABCD} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

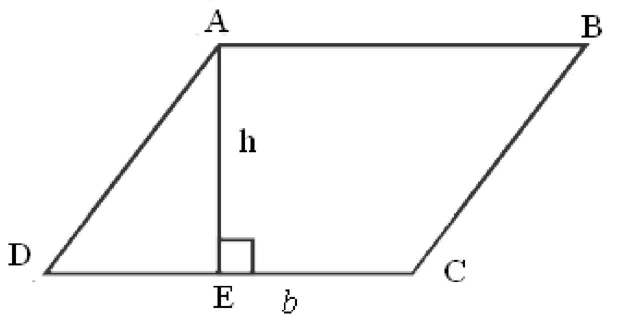


Figura II.47. Reprezentarea unui paralelogram

$$\mathcal{A}_{ABCD} = b \cdot h$$

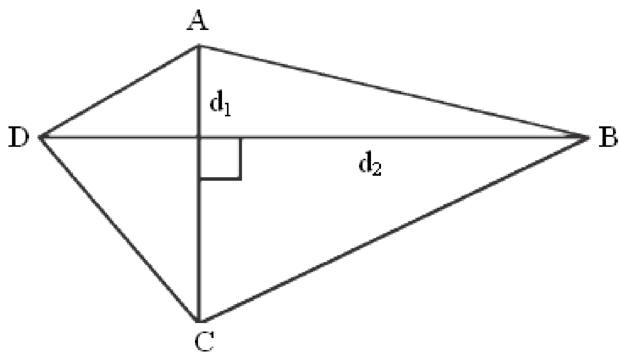


Figura II.48.
Reprezentarea unui patrulater ortodiagonal

$d_1 \perp d_2$

$$\boldsymbol{A}_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Exemple:

- În ΔABC se construieşte $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Dacă $m\left(\widehat{DAC}\right) = 60^\circ$, BC = 9,8 cm,

AC=10 cm. Aflaţi aria ΔABC şi distanţa de la B la AC.

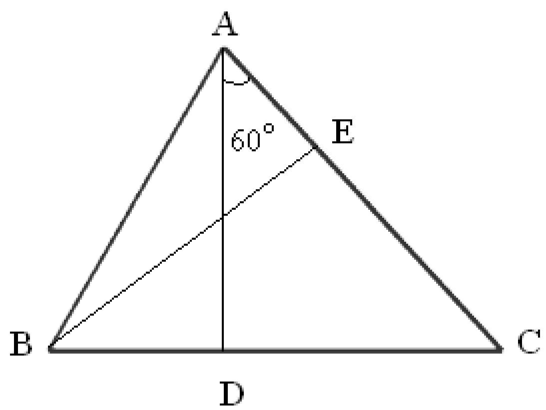


Figura II.49. Desenul aferent exemplului

În *figura II.49* este reprezentat desenul aferent cerinţelor problemei.

În ΔADC dreptunghic, $m\left(\widehat{ADC}\right) = 90^\circ$,

$$\Rightarrow m\left(\widehat{ACD}\right) = 30^\circ \Rightarrow AD = \frac{AC}{2} = 5\,cm$$

$$A_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{5 \cdot 9{,}8}{2} = 24{,}5 \ cm^2$$

Fie $BE \perp AC$, $E \in (AC)$

$$A_{ABC} = \frac{BE \cdot AC}{2} = \frac{BE \cdot 10}{2} = 24{,}5\,cm^2 \Rightarrow BE = 4{,}9 \text{ cm}$$

- Calculaţi aria pătratului care are diagonalele egale cu 4 cm.

Putem aplica formula rombului: $A = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$

- Câte dreptunghiuri există cu lungimile şi lăţimile numere naturale, dacă un dreptunghi are aria egală cu 12 cm^2?

Avem 3 dreptunghiuri cu laturile: $(L;l) = \{(12;1);(6;2);(4;3)\}$, L > l.

- Ştiind că aria unui patrulater ortodiagonal este de 400 cm^2, iar una dintre diagonalele acestuia este de 25 cm, calculaţi lungimea celeilalte diagonale.

$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \Rightarrow 400 = \frac{25 \cdot d_2}{2} \Rightarrow 800 = 25 \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = 32 \text{ cm}.$

- Un triunghi dreptunghic are laturile direct proporţionale cu numerele 3, 4, 5, iar perimetrul egal cu 36 cm. Calculaţi aria triunghiului.

Fie un triunghi dreptunghic cu catetele AB = c, AC = b şi ipotenuza BC = a şi P = a+b+c=48 cm

Avem: $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{12} = \frac{48}{12} = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 14 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84 \text{ cm}^2$

- Trapezul isoscel ABCD are $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $m\left(\hat{A}\right) = 45^\circ$, $CD = 8$ cm, $AB = \frac{5}{2} \cdot CD$.

Calculaţi aria trapezului.

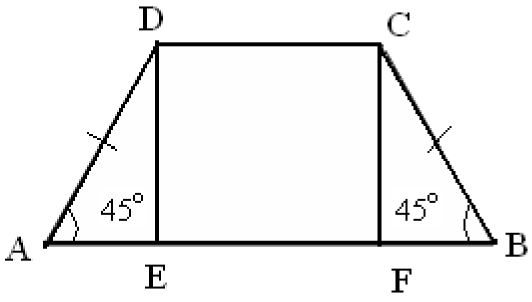


Figura II.50. Desenul aferent exemplului

În *figura II.50* este reprezentat desenul aferent cerinţelor problemei.

Deoarece trapezul este isoscel,

$m\left(\hat{A}\right) = 45^\circ \Rightarrow m\left(\hat{B}\right) = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta AED \equiv \Delta BFC \Rightarrow AE = DE = BF = CF = \frac{AB - CD}{2}$

$AB = \frac{5}{2} \cdot CD = \frac{5}{2} \cdot 8 = 20 \text{ cm}$

$\Rightarrow AE = DE = BF = CF = \frac{20 - 8}{2} = 6 \text{ cm}$

$A_{ABCD} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(20 + 8) \cdot 6}{2} = 84 \text{cm}^2$

- Un romb ABCD are latura egală cu 14 cm. Calculaţi aria rombului ştiind că perimetrul ΔABC este de 42 cm, iar perimetrul ΔABD este de 46 cm.

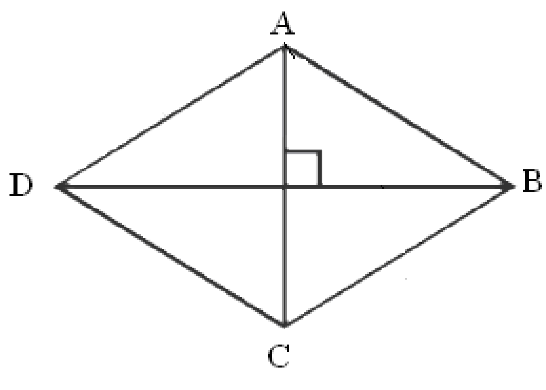


Figura II.51. Desenul aferent exemplului

În *figura II.51* este reprezentat desenul aferent cerinţelor problemei.

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 14 + 14 + AC = 42 \text{ cm}$

$\Rightarrow AC = 14 \text{cm}$

$P_{\Delta ABD} = AB + BD + DA = 14 + BD + 14 = 46 \text{ cm}$

$\Rightarrow BD = 18 \text{cm}$

$A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{14 \cdot 18}{2} = 126 \text{cm}^2$

A.II.10. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Patrulaterul ABCD are două perechi de laturi consecutive congruente: $[AB] \equiv [BC]$ şi $[CD] \equiv [DA]$. Demonstraţi că:

a) $[BD]$ este bisectoarea unghiurilor ABC şi ADC;

b) $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$;

c) $AC \perp BD$.

Un patrulater care îndeplineşte aceste condiţii se numeşte ***patrulater zmeu***.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.52*.

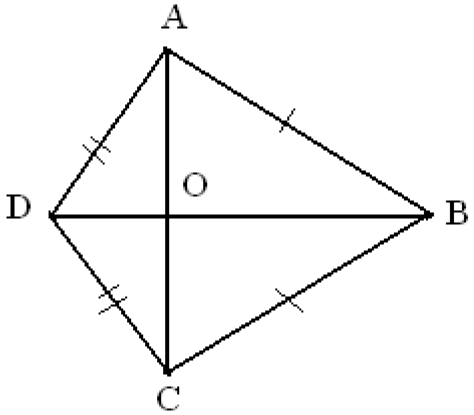


Figura II.52. Desenul problemei 1 (A.II.10)

a) $\Delta ABD \equiv \Delta CBD \quad (LLL) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABD} \equiv \widehat{CBD} \\ \widehat{ADB} \equiv \widehat{CDB} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{C} \end{cases} \Rightarrow [BD]$ este bisectoare pentru $\widehat{ABC}$ şi $\widehat{ADC}$;

b) $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$, demonstrate anterior;

c) ΔBAC isoscel $[AB] \equiv [BC] \Rightarrow [AC]$ e baza acestui triunghi, iar $[BD]$ e bisectoare $\Rightarrow [BD]$ este şi înălţime $\Rightarrow AC \perp BD$.

2. În *figura II.53,* triunghiurile ABC şi DCE sunt isoscele, $[AB] \equiv [AC] \equiv [DC] \equiv [DE]$ şi $[BC] \equiv [CE]$. Demonstraţi că ABCD este paralelogram.

Demonstraţie:

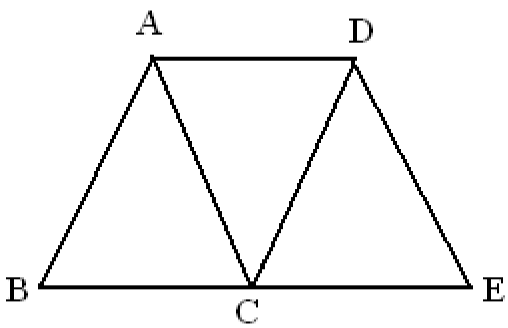


Figura II.53. Desenul problemei 2 (A.II.10)

$m\left(\widehat{BAC}\right)+m\left(\widehat{ABC}\right)+m\left(\widehat{ACB}\right)=180^\circ$

$\Delta ABC \equiv \Delta DCE$ isoscele $\Rightarrow$

$m\left(\widehat{ACB}\right)=m\left(\widehat{DCE}\right)=m\left(\widehat{ABC}\right)=m\left(\widehat{DEC}\right)$, iar

$m\left(\widehat{BCE}\right)=180^\circ=m\left(\widehat{ACB}\right)+m\left(\widehat{DCE}\right)+m\left(\widehat{ACD}\right)$

$m\left(\widehat{ACD}\right)=m\left(\widehat{BAC}\right)=m\left(\widehat{CDE}\right)$

$$\Delta ABC,\ \Delta ACD:\begin{cases} AC=AC \text{ (latură comună)} \\ AB=DC \\ m\left(\widehat{BAC}\right)=m\left(\widehat{ACD}\right)\end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta ACD\ (LUL) \Rightarrow [AD]\equiv[BC] \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BAC}\equiv\widehat{ACD} \\ AC-\text{secantă}\end{array}\right| \Rightarrow AD \parallel BC \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ ABCD este paralelogram

3. Se dă dreptunghiul ABCD, cu $AE \perp BD$, $CF \perp BD$. Să se demonstreze că AECF este paralelogram.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.54.*

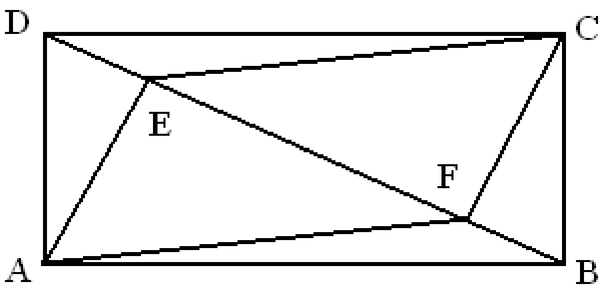


Figura II.54. Desenul problemei 3 (A.II.10)

În triunghiurile dreptunghice DAB şi BCD avem:

$$\left.\begin{array}{l}[AD]\equiv[BC] \\ [AB]\equiv[DC]\end{array}\right| \overset{CC}{\Rightarrow} \Delta DAB \equiv \Delta BCD \Rightarrow \begin{cases}\widehat{DBA}\equiv\widehat{BDC} \\ \widehat{ADB}\equiv\widehat{DBC}\end{cases}$$

În triunghiurile dreptunghice ADE şi CBF avem:

$$\left.\begin{array}{l}[AD]\equiv[BC] \\ \widehat{ADE}\equiv\widehat{CBF}\end{array}\right| \overset{IU}{\Rightarrow} \Delta ADE \equiv \Delta CBF \Rightarrow \begin{cases}[AE]\equiv[CF] \\ \widehat{DAE}\equiv\widehat{BCF}\end{cases} \quad (1)$$

FE este secantă şi $\widehat{AEF}\equiv\widehat{CFE}$ (alterne interne) (2)

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ AECF este paralelogram, deoarece are două laturi paralele şi congruente.

4. Fie ABCD un dreptunghi şi $\{O\} = AC \cap BD$. Pe diagonala [BD] se consideră punctele M şi N , astfel încât $[BM] \equiv [ND]$. Arătaţi că:
a) O este mijlocul segmentului [MN];
b) AMCN este paralelogram.
Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.55*.

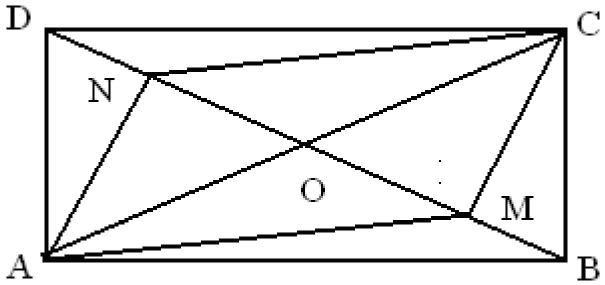


Figura II.55. Desenul problemei 4 (A.II.10)

a) $OM = |OB - MB|$, $ON = |OD - DN|$, $DN = BM$, $OB = OD$ $\Rightarrow OM = ON$;
b) Din $AO = OC$ şi $NO = MO \Rightarrow AMCN$ este paralelogram.

5. Rombul ABCD are $m\left(\hat{A}\right) = 60^\circ$. Fie E mijlocul laturii (AB) şi F mijlocul laturii (BC). Notăm $AC \cap BD = \{O\}$.
a) Demonstraţi că $[DE] \equiv [AO]$;
b) Demonstraţi că triunghiul DEF este echilateral.
Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.56*.

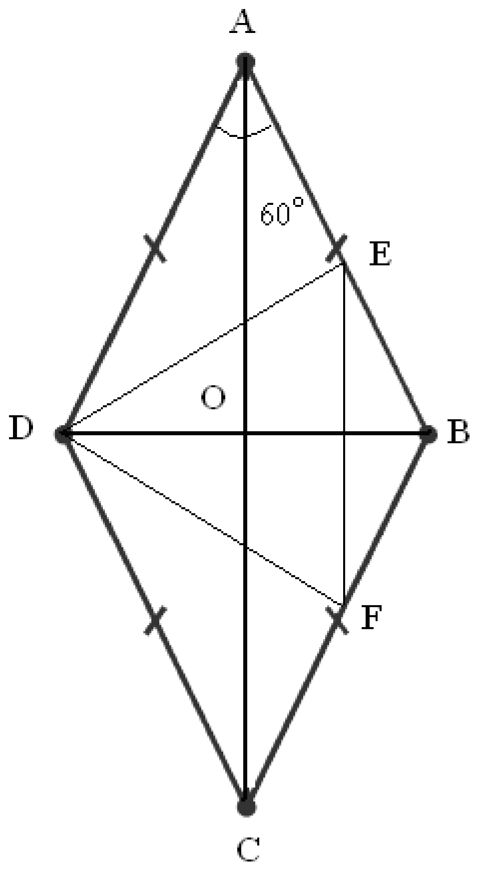


Figura II.56. Desenul problemei 5 (A.II.10)

a) $\begin{cases} \Delta ABD \text{ isoscel} \\ m\left(\hat{A}\right) = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD$ echilateral

[AO] este bisectoare, mediană, înălţime, iar AE = EB $\Rightarrow$ [DE] mediană, înălţime, bisectoare, rezultă că $[DE] \equiv [AO]$.

b) În ΔBAC, $\begin{cases} AE = EB \\ BF = FC \end{cases} \Rightarrow EF$ e linie mijlocie

$\Rightarrow EF \parallel AC$, $EF = \dfrac{AC}{2}$ (1)

$\begin{cases} \Delta CBD \text{ isoscel} \\ m\left(\hat{A}\right) = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta CBD$ echilateral

[DF] mediană, înălţime
Analizând ΔCBD şi ΔABD, avem

$[AD] \equiv [BC]$; $[CD] \equiv [AB]$; $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{C}\right) = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta CBD \equiv \Delta ABD$, rezultă că liniile importante sunt congruente: DE = DF (2)
Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ DE = EF = DF , deci ΔDEF este echilateral.

6. Fie rombul ABCD din *figura II.57* şi M, N, P, Q mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD], respectiv [DA] ale rombului. Demonstraţi că MNPQ este dreptunghi.

Demonstraţie:

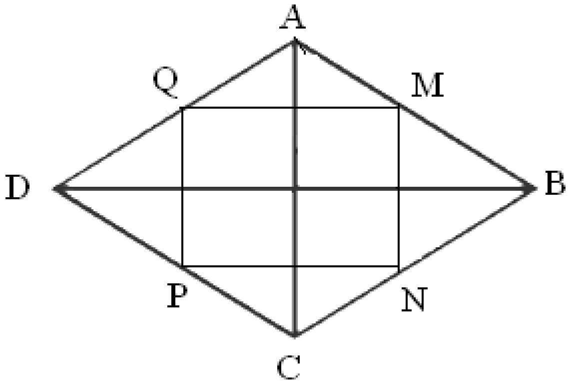


Figura II.57. Desenul problemei 6 (A.II.10)

$\left.\begin{array}{l}[AM]\equiv[MB]\\ [BN]\equiv[NC]\end{array}\right| \Rightarrow$ MN este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC$ şi $MN = \dfrac{AC}{2}$ (1)

$\left.\begin{array}{l}[AQ]\equiv[QD]\\ [DP]\equiv[PC]\end{array}\right| \Rightarrow$ PQ este linie mijlocie în $\Delta ADC \Rightarrow PQ \parallel AC$ şi $PQ = \dfrac{AC}{2}$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $[PQ]\equiv[NM]$ şi $PQ \parallel NM$, deci PNMQ este paralelogram.

$\left.\begin{array}{l}[AQ]\equiv[QD]\\ [AM]\equiv[MB]\end{array}\right| \Rightarrow$ QM este linie mijlocie în $\Delta ABD \Rightarrow MQ \parallel BD$ şi $MQ = \dfrac{BD}{2}$ (3)

$\left.\begin{array}{l}[DP]\equiv[PC]\\ [BN]\equiv[NC]\end{array}\right| \Rightarrow$ PN este linie mijlocie în $\Delta BCD \Rightarrow PN \parallel BD$ şi $PN = \dfrac{BD}{2}$ (4)

Din relaţiile (3) şi (4) rezultă că $[PN]\equiv[QM]$ şi $PN \parallel QM$.

$\left.\begin{array}{l}BD \perp AC\\ BD \parallel MQ\end{array}\right| \Rightarrow MQ \perp MN$

Din PNMQ este paralelogram şi $MQ \perp MN \Rightarrow$ MNPQ este dreptunghi.

7. Fie rombul ABCD din *figura II.58,* $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă lungimea segmentului [OB] este media aritmetică a lungimilor segmentelor [OA], [OC], [OD], demonstraţi că ABCD este pătrat.

Demonstraţie:

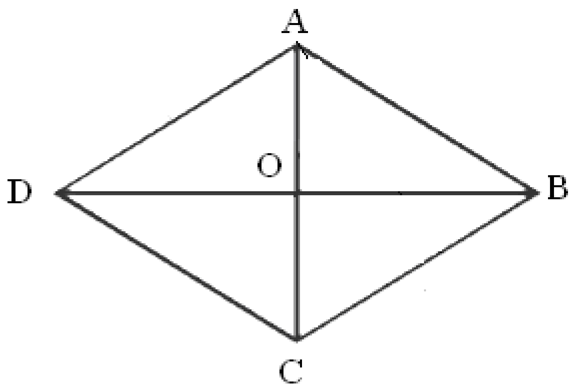


Figura II.58. Desenul problemei 7 (A.II.10)

$OB = \dfrac{OA + OC + OD}{3} \Rightarrow OB = \dfrac{2\cdot OA + OD}{3}$

$AO = OC$, $DO = OB$

$3\cdot OB = 2\cdot OA + OD \Rightarrow$

$3\cdot OB = 2\cdot OA + OB$

$2\cdot OB = 2\cdot OA \Rightarrow OB = OA$

$\Rightarrow OB = OA = OD = OC$

Din ABCD romb şi $[AC]\equiv[BD]$

$\Rightarrow$ ABCD este pătrat.

8. Fie dreptunghiul ABCD din *figura II.59*. Se notează cu E, F, G, mijloacele segmentelor [CD], [AE], respective [BE]. Stabiliţi natura patrulaterului CDFG.

Demonstraţie:

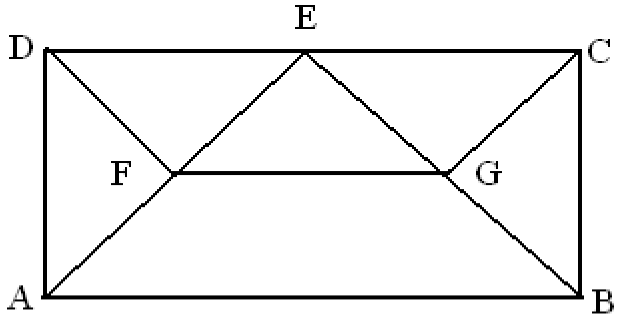


Figura II.59. Desenul problemei 8 (A.II.10)

$\left.\begin{array}{l}[AF]\equiv[FE]\\ [BG]\equiv[GE]\end{array}\right| \Rightarrow$ FG este linie mijlocie în $\Delta AEB \Rightarrow FG \parallel AB$ şi $FG=\dfrac{AB}{2}$

Din $FG \parallel AB$ şi $AB \parallel DC \Rightarrow FG \parallel DC$

Cum $FG \parallel DC$ şi DF nu este paralel cu CG, rezultă că CDFG este trapez.

9. În triunghiul ABC, M, N şi P sunt mijloacele laturilor (AB), (AC), respectiv (BC). Dacă $AP \cap MN=\{Q\}$, demonstraţi că $[MQ]\equiv[QN]$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.60.*

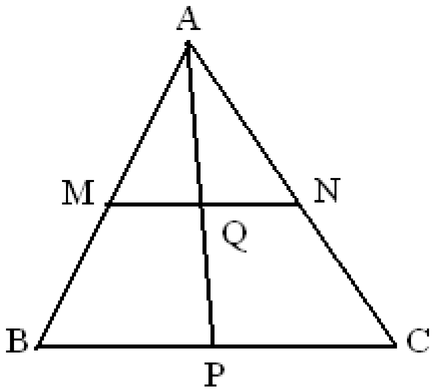


Figura II.60. Desenul problemei 9 (A.II.10)

$\left.\begin{array}{l}[AM]\equiv[MB]\\ [AN]\equiv[NC]\end{array}\right| \Rightarrow$ MN este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel BC$ şi $MN=\dfrac{BC}{2}$

Cum $MN \parallel BC$ şi $MN=BP=PC$, rezultă că Q este mijlocul lui MN, deci $[MQ]\equiv[QN]$.

10. Fie trapezul ABCD din *figura II.61,* cu $AB \parallel CD$, $AB<CD$, $\{O\}=AC\cap BD$. Arătaţi că $A_{\Delta AOD}=A_{\Delta BOC}$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.61.*

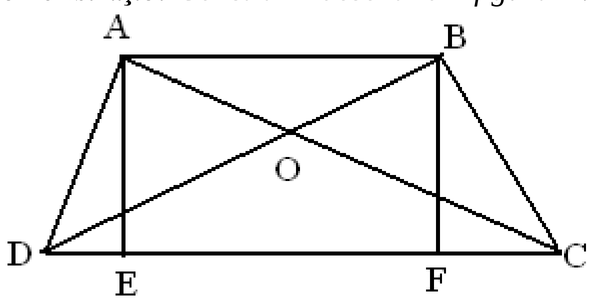


Figura II.61. Desenul problemei 10 (A.II.10)

Fie $AE\perp DC, BF\perp DC$, iar $AE=BF$

$A_{\Delta AOD}=A_{\Delta ADC}-A_{\Delta DOC}=$

$=\dfrac{AE\cdot DC}{2}-A_{\Delta DOC}=\dfrac{BF\cdot DC}{2}-A_{\Delta DOC}=$

$=A_{\Delta BCD}-A_{\Delta DOC}=A_{\Delta BOC}$

B.II. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

B.II.1. RAPORTUL A DOUĂ SEGMENTE

Definiţie: Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor, exprimat în aceeaşi unitate de măsură.

Exemplu: $AB = 70\text{ cm}$, $CD = 3{,}5\text{ dm} \Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{7\text{ dm}}{3{,}5\text{ dm}} = 2$

Definiţie: Dacă se poate forma o proporţie cu lungimile a patru segmente, acestea se numesc ***segmente proporţionale***.

Exemplu: $AB = 70\text{ cm}$, $BC = 35\text{ cm}$, $CD = 36\text{ cm}$, $DE = 18\text{ cm}$.

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{70}{35} = 2 = \dfrac{CD}{DE} = \dfrac{36}{18}$.

Teorema paralelelor echidistante: Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

În *figura II.62* prezentăm aplicarea teoremei paralelelor echidistante.

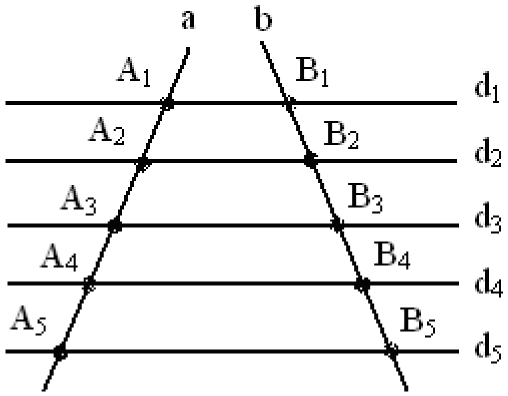


Figura II.62. $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5$ şi $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$

$\Rightarrow$ conform teoremei paralelelor echidistante că $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$

Exemplu: Folosind *figura II.61* şi, ştiind că $B_1B_4 = 15\text{ cm}$, să se calculeze B_2B_4, B_3B_6, B_1B_6.

$B_1B_4 = B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 = 3 \cdot B_1B_2 = 15\text{ cm} \Rightarrow 3 \cdot B_1B_2 = 15\text{ cm} \Rightarrow B_1B_2 = 5\text{ cm}$

$B_2B_4 = B_2B_3 + B_3B_4 = 2 \cdot B_1B_2 = 10\text{ cm}$

$B_3B_6 = B_3B_4 + B_4B_5 + B_5B_6 = 3 \cdot B_1B_2 = 15\text{ cm}$

$B_1B_5 = B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + B_4B_5 = 4 \cdot B_1B_2 = 20\text{ cm}$.

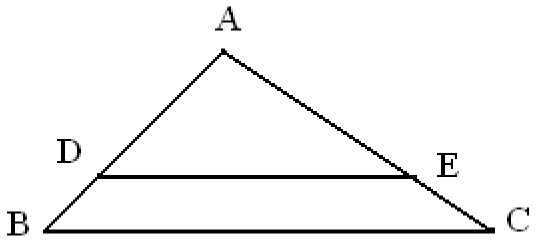
B.II.2. TEOREMA LUI THALES

Teorema lui Thales: O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile acestora, segmente proporţionale.

Dacă $DE \parallel BC$, atunci $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ sau $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.

Reciproca teoremei lui Thales: Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in AB$, $E \in AC$, aflate în acelaşi plan determinat de paralela prin A la BC.
Dacă $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$.

În *figura II.63* se prezintă aplicarea teoremei şi reciprocei teoremei lui Thales.



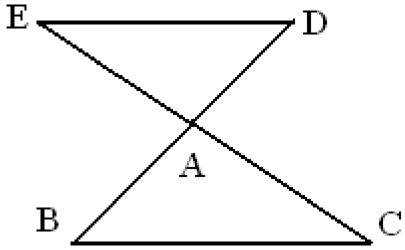


Figura II.63. Aplicarea teoremei şi reciprocei teoremei lui Thales

Observaţie: Dacă $\frac{AD}{DB} \neq \frac{AE}{EC} \Rightarrow$ DE nu e paralel cu BC.

Teorema paralelelor neechidistante: Mai multe drepte paralele determină pe două secante oarecare segmente proporţionale.

Dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5$ şi a, b sunt două secante (a se vedea figura II.61), atunci, conform teoremei paralelelor neechidistante avem:

$$\frac{A_1A_1}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{A_4A_5}{B_4B_5}.$$

Exemplu: Fie punctele M şi N situate pe laturile [AC], respectiv [BC] ale triunghiului dreptunghic ABC, $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ$, $m\left(\hat{C}\right) = 30^\circ$, $MN \parallel AB$, $MN = 6\,cm$, $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}$. Calculaţi lungimile NC, BC şi AB.

În *figura II.64* se prezintă desenul aferent exemplului considerat.

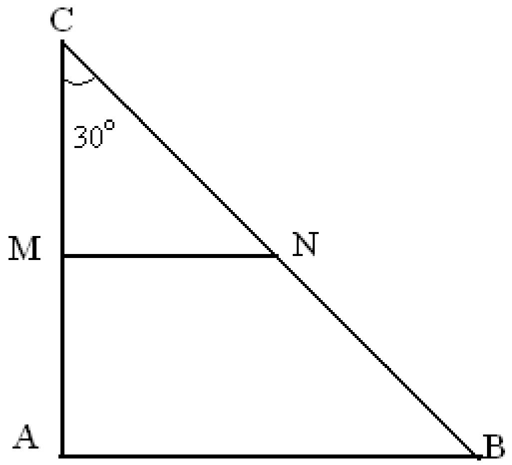


Figura II.64. Desenul aferent exemplului

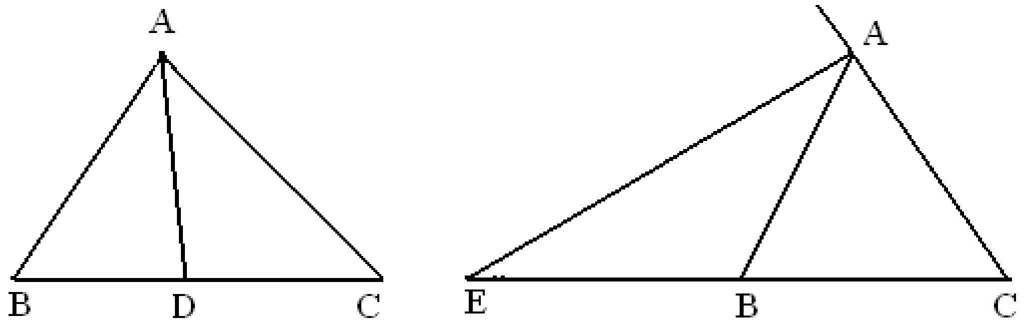
În triunghiul dreptunghic CMN, $NC = 2 \cdot MN = 12$ cm

Notăm $BN = x$. Din $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}$ şi $\frac{AM}{AC} = \frac{x}{x+12} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x}{x+12} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow BC = NC + x = 20\,cm$

În triunghiul dreptunghic BAC, $BC = 2 \cdot AB \Rightarrow AB = 10\,cm$.

Teorema bisectoarei: Într-un triunghi, bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporţionale cu celelalte două laturi.

În *figura II.65* se prezintă aplicarea teoremei bisectoarei.



$[AD]$ bisectoarea $\widehat{BAC}$ $\qquad$ $[AE]$ bisectoarea exterior $\widehat{BAC}$, $AB \neq AC$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ $\qquad$ $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$

Figura II.65. Aplicarea teoremei bisectoarei

Exemplu: Ştiind că în *figura II.64* din stânga, AB= 9 cm, AC = 15 cm, BC = 20 cm, să se afle BD.

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BC - BD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{20 - BD} = \frac{9}{15} \Rightarrow 15 \cdot BD = 180 - 9 \cdot BD \Rightarrow 24 \cdot BD = 180 \Rightarrow$

$BD = 7{,}5\,cm$

În *figura II.66* se prezintă un ***exemplu*** de împărţire a segmentului [AB] în patru părţi $\{a; b; c; d\}$ direct proporţionale cu $\{2; 5; 3; 3\}$.

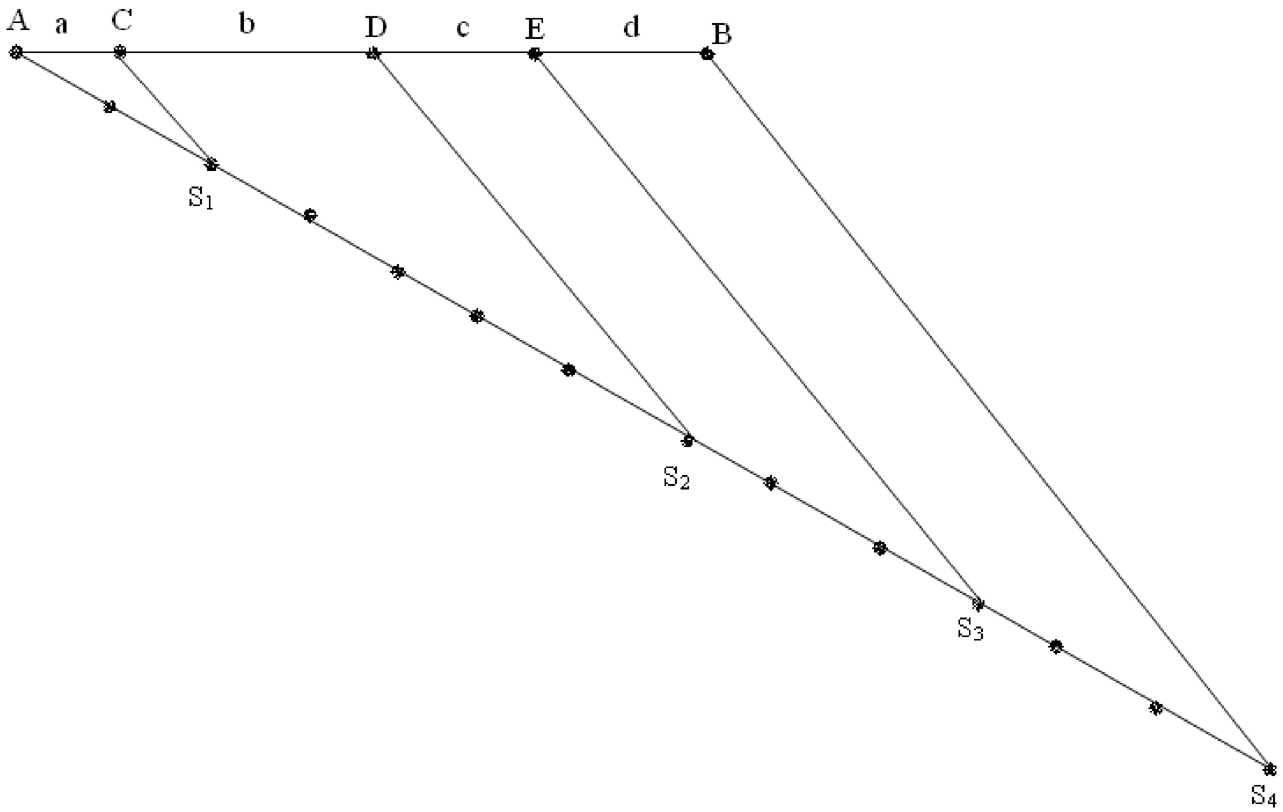


Figura II.66. Împărţirea unui segment în părţi proporţionale cu numere date

B.II.3. TRIUNGHIURI ASEMENEA

Definiţie: Două triunghiuri sunt asemenea *(figura II.67)*, dacă au unghiurile corespondente congruente şi laturile corespondente proporţionale.

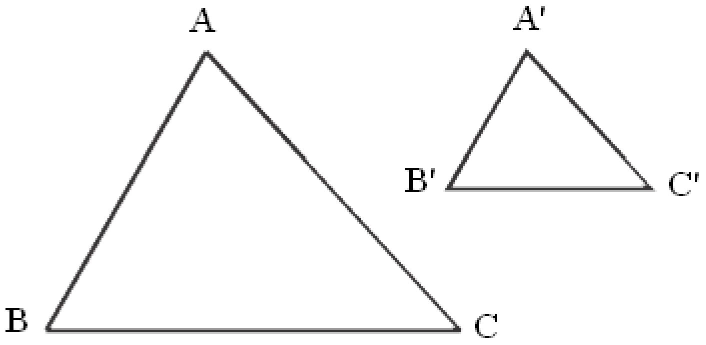


Figura II.67. Triunghiuri asemenea

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A'},\ \hat{B} \equiv \hat{B'},\ \hat{C} \equiv \hat{C'} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} \end{cases}.$$

Exemplu: Dacă $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $AB = 25cm$, $AC = 30cm$, $A'C' = 18$ cm, $m\left(\hat{A}\right) = 75^\circ$, aflaţi

A'B' şi $m\left(\hat{A'}\right)$.

Din relaţia de asemănare rezultă că:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow \frac{25}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{30}{18} = k \Rightarrow k = \frac{30}{18} \Rightarrow k = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{25}{A'B'} = \frac{5}{3} \Rightarrow A'B' = 15 \text{ cm} \text{, iar } m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{A'}\right) = 75^\circ$$

Teorema fundamentală a asemănării: O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte laturi sau cu prelungirile acestora un triunghi asemenea cu cel dat.

În *figura II.68* se prezintă aplicarea teoremei fundamentale a asemănării.

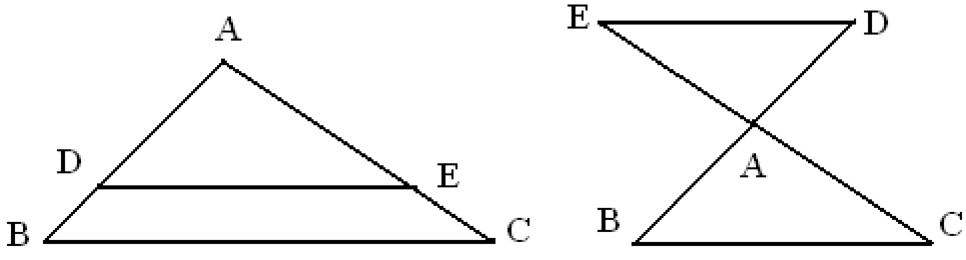


Figura II.68. Aplicarea teoremei fundamentale a asemănării

$$DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Exemplu: În ΔABC, $AB = 12 cm$, $AC = 9 cm$, $BC = 12$ cm, $AD = 4$ cm, $AE = 3$ cm, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, să se stabilească, dacă $DE \parallel BC$ şi să se calculeze DE.

Utilizând, pentru rezolvare, *figura II.68* (stânga) avem:

În ΔABC avem $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{3}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \overset{RTT}{\Rightarrow} DE \parallel BC$.

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = \frac{1}{3} \cdot BC = 4$ cm.

B.II.4. CAZURILE DE ASEMĂNARE ALE TRIUNGHIURILOR

Se vor face exemplificări pe *figura II.67*.

Teoremă – Criteriul UU: Două triunghiuri sunt asemenea, dacă au două perechi de unghiuri corespondente congruente.

$$\text{Dacă } \hat{A} \equiv \hat{A'},\ \hat{B} \equiv \hat{B'} \overset{UU}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Teoremă – Criteriul LUL: Două triunghiuri sunt asemenea, dacă au două perechi de laturi corespondente proporţionale şi unghiurile dintre ele congruente.

$$\text{Dacă } \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A'} \end{cases} \overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Teoremă – Criteriul LLL: Două triunghiuri sunt asemenea, dacă au laturile corespondente proporţionale.

$$\text{Dacă } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \overset{LLL}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Observaţii:

- Raportul înălţimilor, medianelor şi bisectoarelor ce pornesc din vârfurile corespondente a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri.
- Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Exemple: Se va demonstra cu titlu de *exemple* observaţiile făcute (*figura II.69*).

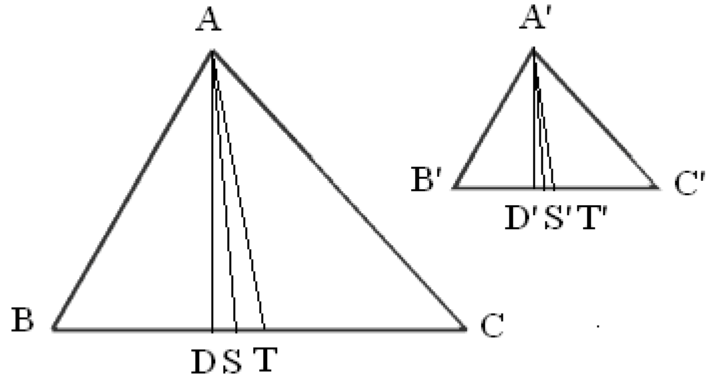


Figura II.69. Desenul aferent exemplelor : [AD-înălţime, AS – bisectoare, AT – mediană]

$$AD \perp BC,\ A'D' \perp B'C',\ \widehat{BAS} \equiv \widehat{B'A'S'},\ [BT] \equiv [TC], [B'T'] \equiv [T'C']$$

- Se cere: $\frac{AD}{A'D'} = k$.

Notăm raportul de asemănare $\frac{AB}{A'B'} = k$

În ΔABD şi $\Delta A'B'D'$ avem: $\hat{B} \equiv \hat{B'}$ şi $\hat{D} \equiv \hat{D'} \overset{UU}{\Rightarrow} \Delta ABD \sim \Delta A'B'D' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{BD}{B'D'}$

Cum $\frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = k$.

- Se cere: $\frac{AT}{A'T'} = k$.

Notăm raportul de asemănare $\frac{AB}{A'B'} = k$

În ΔABT şi $\Delta A'B'T'$ avem: $\hat{B} \equiv \hat{B'}$ şi $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BT}{B'T'} \overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta ABT \sim \Delta A'B'T' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AT}{A'T'} = \frac{BT}{B'T'}$

Cum $\frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow \frac{AT}{A'T'} = k$.

- Se cere: $\frac{AS}{A'S'} = k$.

Notăm raportul de asemănare $\frac{AB}{A'B'} = k$

În ΔABS şi $\Delta A'B'S'$ avem: $\widehat{BAS} \equiv \widehat{B'A'S'}$ şi $\hat{B} \equiv \hat{B'} \overset{UU}{\Rightarrow} \Delta ABS \sim \Delta A'B'S' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AS}{A'S'} = \frac{BS}{B'S'}$

Cum $\frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow \frac{AS}{A'S'} = k$.

- $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow AB = k \cdot A'B' \\ \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow BC = k \cdot B'C' \\ \frac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow AC = k \cdot A'C' \\ \frac{AD}{A'D'} = k \Rightarrow AD = k \cdot A'D' \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\Delta ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{k \cdot A'D' \cdot k \cdot B'C'}{2} = \frac{k^2 \cdot A'D' \cdot B'C'}{2} \\ A_{\Delta A'B'C'} = \frac{A'D' \cdot B'C'}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\Delta ABC} = k^2 \cdot A_{\Delta A'B'C'} \Rightarrow \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta A'B'C'}} = k^2$$

B.II.5. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Se consideră ΔABC şi punctele D şi F, $D \in (AB)$, $E \in (BC)$, astfel încât $DE \parallel AC$. Dacă $BD = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$, $BE = 4\text{cm}$, calculaţi AB, EC şi BC.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.70*.

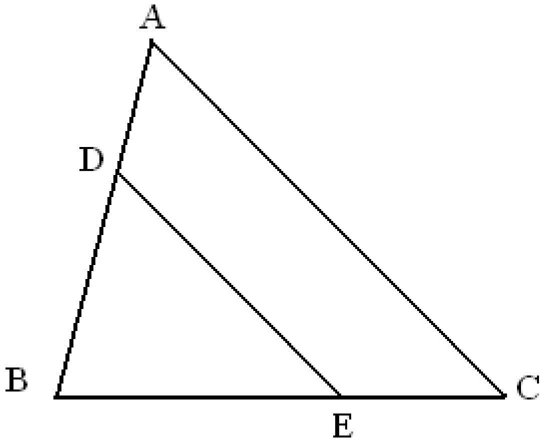


Figura II.70. Desenul problemei 1 (B.II.5)

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ DE \parallel AC\end{array}\right| \overset{\text{Teorema Thales}}{\Rightarrow} \frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{CE}{4} \Rightarrow CE = 3\text{ cm} \Rightarrow AB = 14\text{cm},\ BC = 7\text{cm}.$$

2. În trapezul ABCD, $AC \cap BD = \{O\}$, $BD = 35\text{cm}$, $\frac{CO}{OA} = \frac{3}{4}$. Calculaţi OD şi OB.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.71*.

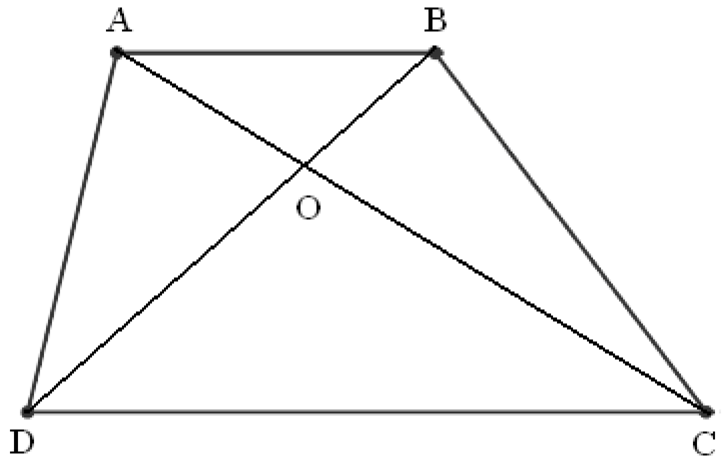


Figura II.71. Desenul problemei 2 (B.II.5)

$$\left.\begin{array}{l}\Delta DOC\\ AB \parallel DC\end{array}\right| \overset{\text{Teorema Thales}}{\Rightarrow} \frac{CO}{AO} = \frac{DO}{OB} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{DO}{BD - DO} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{DO}{35 - DO} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot DO = 3 \cdot (35 - DO) \Rightarrow 7 \cdot DO = 105 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DO = 15\text{cm} \Rightarrow OB = 35 - 15 = 20\text{cm}$$

3. Pe laturile ΔABC se consideră punctele D şi E, $D \in (AB)$, $E \in (BC)$. Verificaţi dacă $DE \parallel BC$, în cazul în care $AB = 28cm$, $AC = 42cm$, $AD = 8cm$, $AE = 12cm$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.72*.

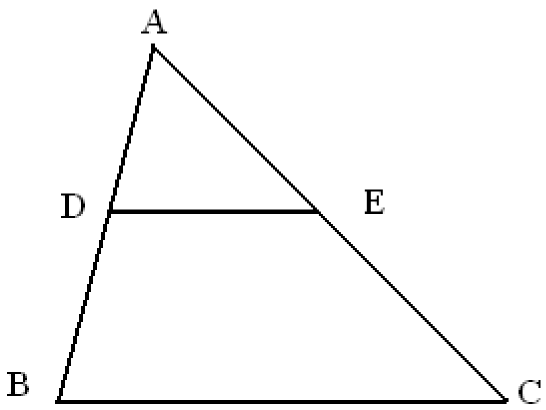


Figura II.72. Desenul problemei 3 (B.II.5)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{8}{28} = \frac{12}{42} \Rightarrow 8 \cdot 42 = 28 \cdot 12 \Rightarrow 336 = 336 \overset{\text{Re ciproca teoremei lui Thales}}{\Rightarrow} DE \parallel BC.$$

4. Fie MNPQ un patrulater convex, $MP \cap NQ = \{O\}$. Dacă $OR \parallel NP$, $R \in (MN)$, $OS \parallel PQ$, $S \in (MQ)$, demonstraţi că $SR \parallel QN$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.73*.

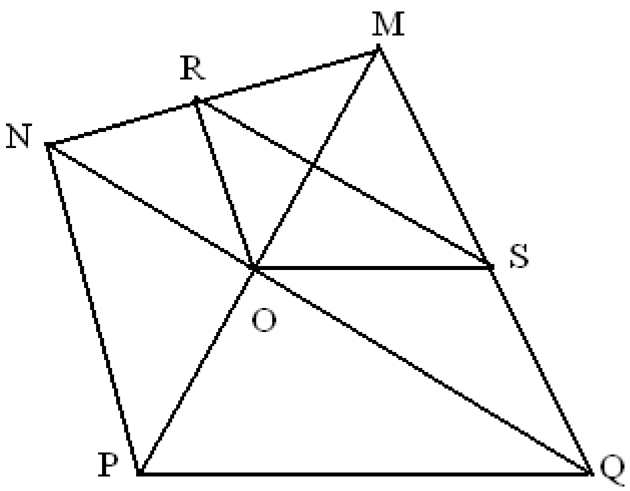


Figura II.73. Desenul problemei 4 (B.II.5)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\Delta PNM \\ RO \parallel NP\end{array}\right| \overset{\text{Teorema Thales}}{\Rightarrow} \dfrac{MR}{RN} = \dfrac{MO}{OP} \\ \left.\begin{array}{l}\Delta MPQ \\ OS \parallel PQ\end{array}\right| \overset{\text{Teorema Thales}}{\Rightarrow} \dfrac{MS}{SQ} = \dfrac{MO}{OP} \end{array}\right| \overset{\text{tranzitivi tate}}{\Rightarrow} \frac{MR}{RN} = \frac{MS}{SQ} \overset{\text{Re ciproca teoremei lui Thales}}{\Rightarrow} SR \parallel NQ.$$

5. În paralelogramul ABCD, considerăm $M \in (AC)$, $N \in AD, P \in DC$, astfel încât $MN \parallel AB$ şi $MP \parallel BC$. Demonstraţi că $\dfrac{ND}{AD} + \dfrac{DP}{DC} = 1$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.74*.

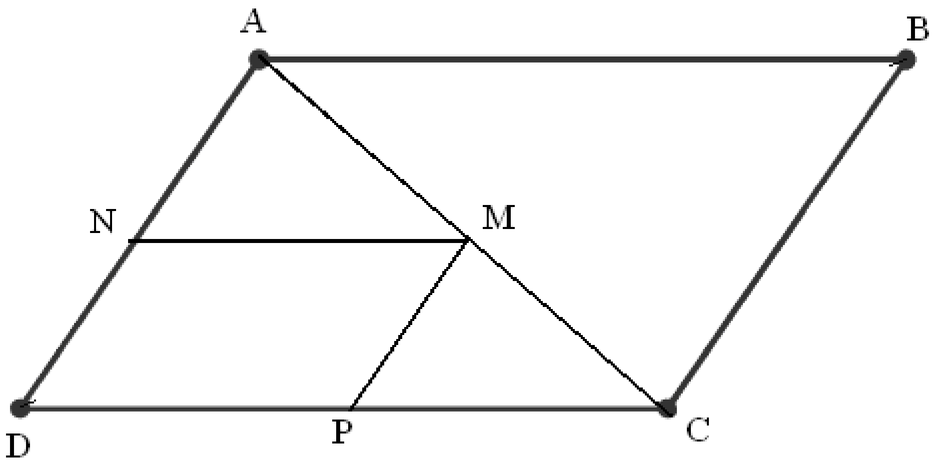


Figura II.74. Desenul problemei 5 (B.II.5)

$MN \parallel AB$ şi $AB \parallel DC \Rightarrow NM \parallel DC$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ADC\\ NM \parallel DC\end{array}\right| \overset{\text{Teorema Thales}}{\Rightarrow} \frac{ND}{AD}=\frac{MC}{AC} \qquad (1)$$

$PM \parallel BC$ şi $BC \parallel AD \Rightarrow PM \parallel AD$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ADC\\ PM \parallel AD\end{array}\right| \overset{\text{Teorema Thales}}{\Rightarrow} \frac{DP}{DC}=\frac{AM}{AC} \qquad (2)$$

Adunând relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{ND}{AD}+\frac{DP}{DC}=\frac{MC}{AC}+\frac{AM}{AC}=\frac{MC+AM}{AC}=\frac{AC}{AC}=1$.

6. În ΔABC, E este mijlocul laturii $[AB]$, $(EF$ este bisectoarea $\widehat{AEC}$, $F \in (AC)$, $(EG$ este bisectoarea $\widehat{CEB}$, $G \in (BC)$. Arătaţi că $FG \parallel AB$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.75*.

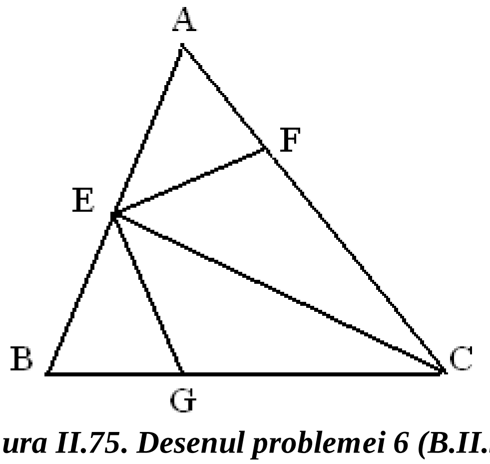


Figura II.75. Desenul problemei 6 (B.II.5)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Delta AEC\\ EF-\text{bisectoare}\end{array}\right| \overset{\text{Teorema bisectoarei}}{\Rightarrow} \frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EC}\\ \left.\begin{array}{l}\Delta EBC\\ EG-\text{bisectoare}\end{array}\right| \overset{\text{Teorema bisectoarei}}{\Rightarrow} \frac{BG}{GC}=\frac{EB}{EC}\end{array}\right| \overset{AE=EB}{} \overset{\text{tranz}}{\Rightarrow} \frac{AF}{FC}=\frac{BG}{GC} \overset{\text{Reciproca teoremei lui Thales}}{\Rightarrow} FG \parallel AB.$$

7. Fie ΔABC cu $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ$ şi $AD \perp BC$. Demonstraţi că.

a) $\Delta ABD \sim \Delta CBA$;
b) $\Delta ABD \sim \Delta CAD$;
c) $\Delta ADC \sim \Delta BAC$.
Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.76*.

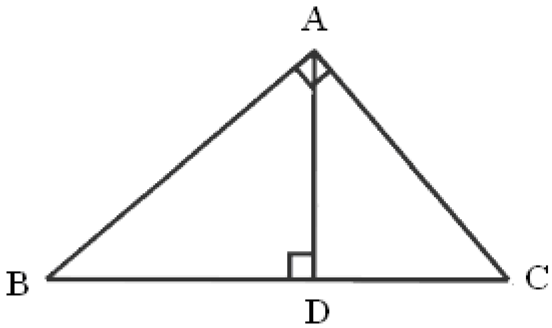


Figura II.76. Desenul problemei 7 (B.II.5)

a) Referitor la ΔABD şi ΔCBA avem: $\begin{cases} \hat{ADB} \equiv \hat{CAB} \\ \hat{ABD} \equiv \hat{ABC} \end{cases} \overset{UU}{\Rightarrow} \Delta ABD \sim \Delta CBA$;

b) Referitor la ΔABC şi ΔADB avem:

$$\begin{cases} m\left(\hat{B}\right) + m\left(\hat{C}\right) = 90^\circ \\ m\left(\hat{B}\right) + m\left(\hat{DAB}\right) = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow m\left(\hat{DAB}\right) = m\left(\hat{C}\right)$$

Referitor la ΔABD şi ΔCAD avem:

$$\begin{cases} \hat{ADB} \equiv \hat{ADC} \\ m\left(\hat{DAB}\right) = m\left(\hat{C}\right) \end{cases} \overset{UU}{\Rightarrow} \Delta ABD \sim \Delta CAD;$$

c) S-a demonstrat la punctele anterioare că $\Delta ABD \sim \Delta CBA$ şi $\Delta ABD \sim \Delta CAD$.
Rezultă, prin tranzitivitate, că $\Delta ADC \sim \Delta BAC$ sau $\Delta CBA \sim \Delta CAD$.

8. Fie M un punct pe latura [BC] a paralelogramului ABCD. Dacă $AM \cap DC = \{N\}$ şi $DM \cap AB = \{P\}$, demonstraţi că:
a) $\Delta ABM \sim \Delta NCM$;
b) $\Delta CDM \sim \Delta BPM$;
c) $CD^2 = CN \cdot BP$.
Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.77*.
a) $AB \parallel DC \Rightarrow AB \parallel CN$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CN \\ BC - \text{secantă} \end{array}\right| \Rightarrow \hat{ABM} \equiv \hat{MCN} \qquad (1)$$

$\hat{BMA} \equiv \hat{CMN}$ (opuse la vârf) (2)

Din relaţiile (1) şi (2) $\overset{UU}{\Rightarrow} \Delta ABM \sim \Delta NCM$.

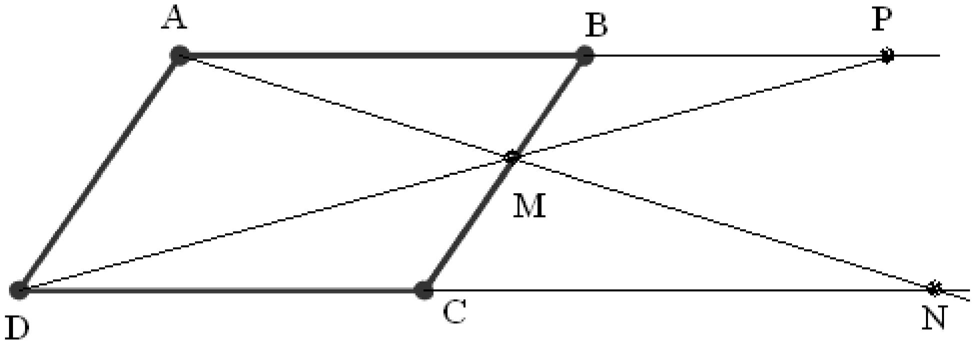


Figura II.77. Desenul problemei 8 (B.II.5)

b) $AB \parallel DC \Rightarrow BP \parallel CN$

$$\left.\begin{array}{l} BP \parallel DC \\ BC - \text{secantă} \end{array}\right| \Rightarrow \widehat{DCM} \equiv \widehat{MBP} \qquad (3)$$

$$\widehat{BMC} \equiv \widehat{BMP} \text{ (opuse la vârf)} \qquad (4)$$

Din relaţiile (3) şi (4) $\overset{UU}{\Rightarrow}$ $\Delta CDM \sim \Delta BPM$.

c) $CD^2 = CN \cdot BP \Rightarrow CD \cdot CD = CN \cdot BP \Rightarrow \dfrac{CD}{CN} = \dfrac{BP}{CD}$.

$$\text{Din } \Delta ABM \sim \Delta NCM \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{AM}{MN} = \dfrac{AB}{CN} \\ AB = CD \end{cases} \qquad (5)$$

$$\text{Din } \Delta CDM \sim \Delta BPM \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{PM}{MD} = \frac{BP}{DC} \qquad (6)$$

Din relaţiile (5) şi (6) $\overset{\text{tranzitivitate}}{\Rightarrow} \dfrac{CD}{CN} = \dfrac{BP}{CD} \Rightarrow CD^2 = CN \cdot BP$.

9. Fie ΔABC isoscel cu $AB = AC$. Mediatoarea laturii (AB) intersectează pe BC în M. Demonstraţi că $AC^2 = AM \cdot BC$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.78*.

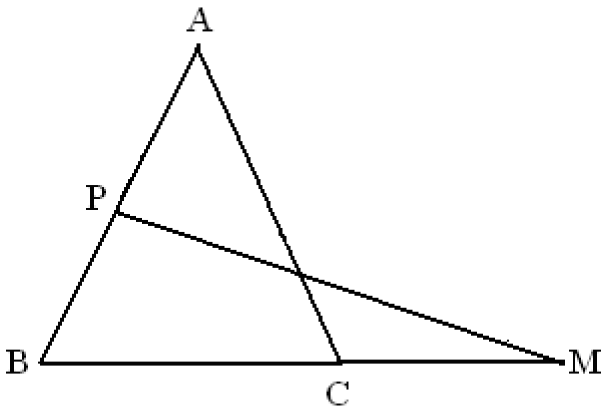


Figura II.78. Desenul problemei 9 (B.II.5)

Relaţia care trebuie demonstrată se poate scrie astfel:

$$AC^2 = AM \cdot BC \Rightarrow AC \cdot AC = AM \cdot BC \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AM}{AC},\ AC = AB \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{AB}.$$

Analizăm ΔABC şi ΔAMB.

MP este mediatoare pe [AB] $\Rightarrow MB = MA \Rightarrow \Delta AMB$ isoscel $\Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{BAM}$ (1)

ΔABC isoscel $\Rightarrow \hat{B} \equiv \widehat{ACB}$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow \widehat{ACB} \equiv \widehat{BAM} \equiv \widehat{ABM} \overset{UU}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta MBA \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{MA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow AC \cdot AB = BC \cdot MA$, iar $AC = AB \Rightarrow AC^2 = AM \cdot BC$.

10. În trapezul ABCD, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, notăm $AD \cap BC = \{P\}$.
Se dau $AB = 9\,cm, DC = 15\,cm, AD = 8\,cm, PB = 6\,cm$.
a) Calculaţi perimetrul ΔPAB;
b) Calculaţi raportul $\frac{A_{\Delta PAB}}{A_{ABCD}}$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.79*.

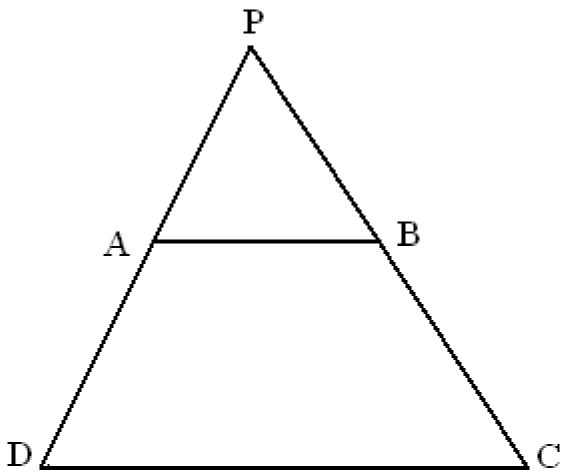


Figura II.79. Desenul problemei 10 (B.II.5)

a) $P_{\Delta PAB} = PA + AB + PB = PA + 9 + 6 = PA + 15$

$\Delta PAB \sim \Delta PDC \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{DC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{PA}{PA+8} = \frac{3}{5} \Rightarrow PA = 12\,cm \Rightarrow P_{\Delta PAB} = 27\,cm$

b) $\Delta PAB \sim \Delta PDC \Rightarrow \frac{A_{\Delta PAB}}{A_{\Delta PDC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$A_{ABCD} = A_{\Delta PDC} - A_{PAB} \Rightarrow \frac{A_{\Delta PAB}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{\Delta PAB}}{A_{\Delta PDC} - A_{PAB}}$

$\Rightarrow \frac{A_{\Delta PAB}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{\Delta PAB}}{A_{\Delta PDC} - A_{PAB}} = \frac{9}{25-9} = \frac{9}{16}$

Sau, dacă dorim să calculăm efectiv ariile, folosind rezultatele de la punctul a) şi aplicând formula lui Heron în ΔPAB şi ΔPDC, obţinem:

$A_{\Delta PAB} = \sqrt{\frac{27}{2} \cdot \left(\frac{27}{2} - 6\right) \cdot \left(\frac{27}{2} - 9\right) \cdot \left(\frac{27}{2} - 12\right)} = \frac{27}{4} \cdot \sqrt{15}$ cu $PB = 6\,cm, AB = 9\,cm, PA = 12\,cm$,

$A_{\Delta PDC} = \sqrt{\frac{45}{2} \cdot \left(\frac{45}{2} - 10\right) \cdot \left(\frac{45}{2} - 20\right) \cdot \left(\frac{45}{2} - 15\right)} = \frac{75}{4}\sqrt{15}$ cu $PC = 10\,cm, PD = 20\,cm, CD = 15\,cm$,

Rezultă: $\frac{A_{\Delta PAB}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{\Delta PAB}}{A_{\Delta PDC} - A_{PAB}} = \frac{\frac{27}{4} \cdot \sqrt{15}}{\frac{75}{4} \cdot \sqrt{15} - \frac{27}{4} \cdot \sqrt{15}} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$.

C.II. RELAŢII METRICE

C.II.1. PROIECŢII ORTOGONALE ŞI TEOREME FUNDAMENTALE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

Definiţie: Proiecţia ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe dreaptă. (*figura II.80*)

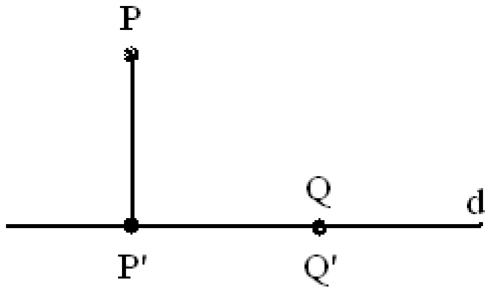


Figura II.80. Reprezentarea proiecţiei unui punct pe o dreaptă

$\text{pr}_d P = P',\ P \notin d$ şi $\text{pr}_d Q = Q',\ Q \in d$

Teoremă: Proiecţia unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.

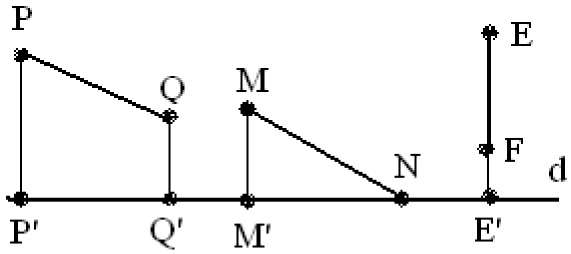


Figura II.81. Reprezentarea proiecţiei unui segment pe o dreaptă

Observaţie: Dacă proiecţia segmentului [PQ] pe dreapta d este segmentul [P'Q'], atunci proiecţia mijlocului segmentului [PQ] este mijlocul segmentului [P'Q'].

Teorema I a înălţimii: Într-un triunghi dreptunghic lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.

Cu notaţiile din *figura II.82*, avem:

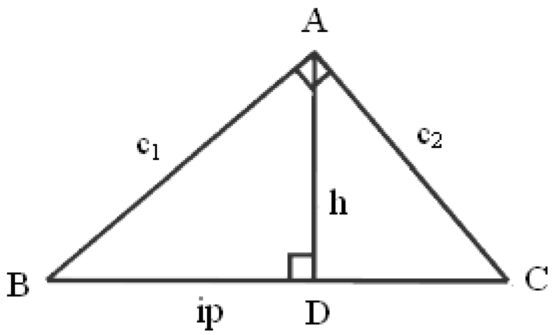


Figura II.82. Reprezentarea unui triunghi dreptunghic pentru care vom scrie relaţiile metrice

unde c_1, c_2 – catete, ip – ipotenuză, h – înălţimea corespunzătoare ipotenuzei

$$\begin{cases} m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow \boxed{AD^2 = BD \cdot DC}$$

Teorema a II-a a înălţimii: Lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu raportul dintre produsul lungimii catetelor şi lungimea ipotenuzei

$$\boxed{AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}} \ \textbf{\textit{sau}} \ \boxed{h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}},$$

Reciproca primei teoreme a înălţimii: Fie ΔABC şi $D \in (BC)$, astfel încât $AD \perp BC$ şi $AD^2 = BD \cdot DC$. Atunci $m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ$.

$$\begin{cases} AD^2 = BD \cdot DC \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ}$$

Reciproca celei de-a doua teoreme a înălţimii: Dacă în ΔABC cu $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ avem $AD \cdot BC = AB \cdot AC$, atunci $m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ$.

$$\begin{cases} AD \cdot BC = AB \cdot AC \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ}$$

Exemple: Vom folosi în exemplele date *figura II.82* şi teorema înălţimii:

- Proiecţiile catetelor unui triunghi dreptunghic ABC pe ipotenuză au lungimile BD=16cm şi DC=36cm. Aflaţi lungimea înălţimii AD din vârful unghiului drept.

$AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow AD = \sqrt{16 \cdot 36} = 24\text{cm}$.

- Într-un triunghi dreptunghic ABC, lungimea proiecţiei unei catete pe ipotenuză este de 4 cm, iar lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei este de 8 cm. Calculaţi lungimea proiecţiei celeilalte catete pe ipotenuză.

$AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow 8^2 = 4 \cdot DC \Rightarrow DC = 16\text{cm}$

- În triunghiul dreptunghic ABC din *figura II.82*, $\frac{A_{ADB}}{A_{ADC}} = \frac{9}{16}$, $BC = 25\text{cm}$. Calculaţi AD.

Calculăm ariile triunghiurilor dreptunghice ADB şi ADC.

$$\left.\begin{array}{l} A_{ADB} = \dfrac{AD \cdot BD}{2} \\ A_{ADC} = \dfrac{AD \cdot DC}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{A_{ADB}}{A_{ADC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{9}{16} \text{ şi } BC = 25 = BD + DC \Rightarrow DC = 16\text{cm}$$

$\Rightarrow BD = 25 - 16 = 9\text{cm}$ şi aplicând teorema înălţimii obţinem: $AD = \sqrt{9 \cdot 16} = 12\text{cm}$.

- Dacă în triunghiul ABC din *figura II.82*, cu $AD \perp BC$, $AD = 4\sqrt{5}\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$, $CD = 16\text{cm}$, arătaţi că ΔABC este dreptunghic.

Verificăm relaţia: $AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 16 \cdot 5 \Rightarrow 16 \cdot 5 = 16 \cdot 5 \Rightarrow 80 = 80 \Rightarrow m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ$

Teorema catetei: Într-un triunghi dreptunghic lungimea fiecărei catete este media geometrică a lungimii ipotenuzei şi a lungimii proiecţiei catetei respective pe ipotenuză.

$$\boxed{AB^2 = BC \cdot BD} \text{ şi } \boxed{AC^2 = BC \cdot CD}$$

Exemplu: În triunghiul dreptunghic ABC din *figura II.82,* cu $AD \perp BC$, AB = 12 cm, AC = 5 cm. Calculaţi lungimea ipotenuzei.

$$\begin{cases} AB^2 = BC \cdot BD \\ AC^2 = BC \cdot CD \end{cases} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + CD) \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 13\text{cm}.$$

Reciprocele teoremei catetei:

R1: În ΔABC, dacă $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ şi are loc una din relaţiile $AB^2 = BC \cdot BD$ sau $AB^2 = BC \cdot CD$, atunci $m\left(\hat{BAC}\right) = 90^\circ$.

R2: În ΔABC, dacă $D \in (BC)$ este un punct, astfel încât $AB^2 = BC \cdot BD$ şi $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $m\left(\hat{BAC}\right) = 90^\circ$.

Exemplu: Dacă în triunghiul ABC din *figura II.82,* cu $AD \perp BC$, $AB = 10$ cm, $BD = 5\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$, arătaţi că ΔABC este dreptunghic.

Verificăm relaţia: $AB^2 = BC \cdot BD \Rightarrow 10^2 = 20 \cdot 5 \Rightarrow 100 = 100 \Rightarrow m\left(\hat{BAC}\right) = 90^\circ$.

Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$$

Definiţie: Numerele care respectă relaţia lui Pitagora se numesc ***numere pitagoreice***.

Exemple: Triplete de numere pitagoreice sunt:

$\begin{cases} (3,\ 4,\ 5) \\ (3k,\ 4k,\ 5k),\ \ k \in N^* \end{cases}$ sau $\begin{cases} (5,\ 12,\ 13) \\ (5k,\ 12k,\ 13k),\ \ k \in N^* \end{cases}$.

Reciproca teoremei lui Pitagora: Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Observaţii:

- Dacă în ΔABC avem $AB^2 + AC^2 < BC^2$, atunci $m\left(\hat{A}\right) > 90^\circ$;
- Dacă în ΔABC avem $AB^2 + AC^2 > BC^2$, atunci $m\left(\hat{A}\right) < 90^\circ$.

Teorema lui Pitagora generalizată: Fie ΔABC din *figura II.81* cu $AD \perp BC$.

Dacă $m\left(\hat{C}\right) > 90^\circ$, atunci $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$;

Dacă $m\left(\hat{C}\right) < 90^\circ$, atunci $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$.

Exemple:

- Verificaţi, dacă tripletul $(20;\ 48;\ 52)$ este format din numere pitagoreice.

$$\begin{cases} 20 = 5 \cdot 4 \\ 48 = 12 \cdot 4, \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \text{că avem un triplet de tipul } (5k,\ 12k,\ 13k) \\ 52 = 13 \cdot 4 \end{cases}$$

sau $20^2 + 48^2 = 52^2 \Rightarrow 400 + 2304 = 2704 \Rightarrow 2704 = 2704$,
$\Rightarrow$ tripletul $(20;\ 48;\ 52)$ e format din numere pitagoreice.

- Vom demonstra că într-un patrulater ortodiagonal, are loc: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

Construim patrulaterul ortodiagonal ABCD $(AC \perp BD)$ din *figura II.83*.

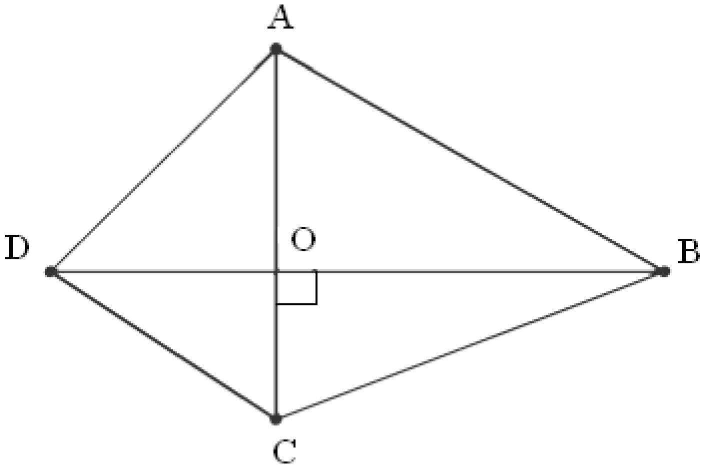


Figura II.83. Desenul aferent exemplului

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice AOB, BOC, COD, respectiv DOA.

$$\begin{cases} AB^2 = AO^2 + OB^2 \\ BC^2 = BO^2 + OC^2 \\ CD^2 = DO^2 + OC^2 \\ AD^2 = AO^2 + DO^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 + CD^2 = AO^2 + OB^2 + DO^2 + OC^2 \\ BC^2 + AD^2 = BO^2 + OC^2 + AO^2 + DO^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

- Dreptunghiul ABCD din *figura II.84* are lungimea de trei ori mai mare decât lăţimea, iar perimetrul egal cu 40 cm. Aflaţi lungimile diagonalelor.

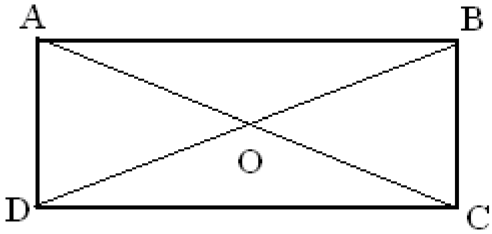


Figura II.84. Desenul aferent exemplului

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) = 40 \Rightarrow AB + BC = 20$, iar $AB = 3 \cdot BC \Rightarrow 4 \cdot BC = 20 \Rightarrow$
$BC = 5\,cm, AB = 15$ cm

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABC şi ADC.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = BD^2 = 15^2 + 5^2 \Rightarrow AC = BD = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}\,cm$.

- Să se arate că într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza a şi cu catetele b şi c, are loc relaţia:

$\frac{a+c}{b} + \frac{b}{a+c} = 2 \cdot \frac{a}{b}$.

Deoarece triunghiul este dreptunghic, are loc teorema lui Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\frac{a+c}{b} + \frac{b}{a+c} = \frac{(a+c)^2 + b^2}{b \cdot (a+c)} = \frac{a^2 + 2ac + c^2 + b^2}{b \cdot (a+c)} = \frac{2a^2 + 2ac}{b \cdot (a+c)} = \frac{2a \cdot (a+c)}{b \cdot (a+c)} = 2 \cdot \frac{a}{b}.$$

C.II.2. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

Într-un triunghi dreptunghic (*figura II.85*) se definesc aşa-numitele funcţii trigonometrice: sinus, cosinus, tangenta, cotangenta, după cum urmează:

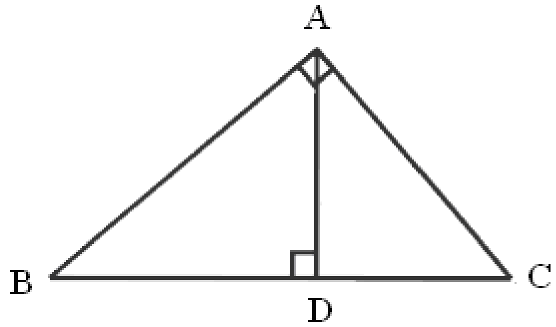


Figura II.85. Figura aferentă discuţiilor trigonometrice

Definiţie: Într-un triunghi dreptunghic, numim ***sinusul unui unghi***, notat cu ***sin***, raportul dintre cateta opusă şi ipotenuză.

Exemple: $\boxed{\sin B = \frac{AC}{BC};\ \ \sin C = \frac{AB}{BC}}$.

Definiţie: Într-un triunghi dreptunghic, numim ***cosinusul unui unghi***, notat cu ***cos***, raportul dintre cateta alăturată şi ipotenuză.

Exemple: $\boxed{\cos B = \frac{AB}{BC};\ \ \cos C = \frac{AC}{BC}}$.

Definiţie: Într-un triunghi dreptunghic, numim ***tangenta unui unghi***, notată cu ***tg***, raportul dintre sinusul şi cosinusul unghiului, respectiv dintre cateta opusă şi cea alăturată.

Exemple: $\boxed{\mathrm{tg}B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB};\ \ \mathrm{tg}C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{AC}}$.

Definiţie: Într-un triunghi dreptunghic, numim ***cotangenta unui unghi***, notată cu ***ctg***, raportul dintre cosinusul şi sinusul unghiului, respectiv dintre cateta alăturată şi cea opusă sau inversul tangentei.

Exemple: $\boxed{\mathrm{ctg}B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\mathrm{tg}B};\ \ \mathrm{ctg}C = \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\mathrm{tg}C}}$.

Relaţii între funcţiile trigonometrice

- $\boxed{\sin^2 B + \cos^2 B = 1;\ \ \sin^2 C + \cos^2 C = 1}$
- $\boxed{\sin(90^\circ - B) = \cos B\ ;\ \sin(90^\circ - C) = \cos C}$
- $\boxed{\cos(90^\circ - B) = \sin B\ ;\ \cos(90^\circ - C) = \sin C}$
- $\boxed{\mathrm{tg}(90^\circ - B) = \mathrm{ctg}B\ ;\ \mathrm{tg}(90^\circ - C) = \mathrm{ctg}C}$

Exemple:

- Calculaţi cosx şi tgx, ştiind că $\sin x = \frac{4}{5}$, unde x este măsura unui unghi ascuţit.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x} = \frac{3}{4}$.

- Arătaţi că $\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$, unde x este măsura unui unghi ascuţit.

$$\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin^2 x.$$

- Calculaţi:

$$\mathrm{tg}1^\circ \cdot \mathrm{tg}2^\circ \cdot \mathrm{tg}2^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}89^\circ = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \cdot \frac{\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 1^\circ}{\sin 89^\circ} \cdot \frac{\sin 2^\circ}{\sin 88^\circ} \cdot \frac{\sin 3^\circ}{\sin 87^\circ} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin 89^\circ}{\sin 1^\circ} = 1$$

- Dacă $a = \sin x + \cos x$, $b = \sin x - \cos x$, cu x măsura unui unghi ascuţit, calculaţi $(a+b)^2 + (a-b)^2$ şi $\sin^4 x - \cos^4 x$.

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = (2\sin x)^2 + (2\cos x)^2 = 4 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 4$

$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x) \cdot (\sin x + \cos x) = a \cdot b$.

- Calculaţi $\frac{\sin x \cdot \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}$, ştiind că $\mathrm{tg}x = \frac{1}{4}$, cu x măsura unui unghi ascuţit.

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x \cdot \left(3 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\right)} = \frac{\mathrm{tg}x}{3\mathrm{tg}x + 4} = \frac{\frac{1}{4}}{3 \cdot \frac{1}{4} + 4} = \frac{1}{19}.$$

Teorema cosinusului: Fie ΔABC din *figura II.85*.

Conform teoremei lui Pitagora generalizată, avem: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$.

Din triunghiul dreptunghic ACD, cu $m\left(\hat{C}\right) < 90^\circ$ rezultă: $CD = AC \cdot \cos C \Rightarrow$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C. \quad (1)$$

Dacă $m\left(\hat{C}\right) > 90^\circ$, avem:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos(180^\circ - C). \quad (2)$$

Egalităţile (1) şi (2) constituie teorema cosinusului.

În *tabelul II.1* vom prezenta câteva valori ale funcţiilor trigonometrice pentru anumite unghiuri mai frecvent întâlnite în calcule.

Tabelul II.1. Valorile funcţiilor trigonometrice pentru diverse unghiuri

Funcţia / ***Unghiul***	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exemple:

- Într-un triunghi dreptunghi isoscel lungimea ipotenuzei este de $10\sqrt{2}$ cm. Calculaţi lungimile catetelor.

Într-un triunghi dreptunghi isoscel avem unul dintre unghiuri de 90°, celelalte două fiind congruente şi egale ca măsură cu 45°; prin urmare catetele sunt egale. Notând catetele cu ***c*** şi ipotenuza cu ***ip***, rezultă: $\sin 45^\circ = \frac{c}{ip} \Rightarrow c = ip \cdot \sin 45^\circ = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \text{ cm}$.

- Fie ΔABC din *figura II.84*. Cunoscând faptul că $m\left(\hat{C}\right) = 60^\circ$, AB=12 cm, BC=14 cm, să se calculeze lungimea laturii AC.

Din $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C \Rightarrow 144 = 196 + AC^2 - 2 \cdot 14 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2\sqrt{29}$ cm.

C.II.3. ARII ALE UNOR POLIGOANE STUDIATE FOLOSIND TRIGONOMETRIA

Pe lângă relaţiile de calcul ale ariilor diferitelor figuri geometrice prezentate în *paragraful A.II.9* se vor prezenta în continuare alte câteva formule de calcul al ariilor prin intermediul funcţiilor trigonometrice (*figurile II.86 ÷II.89*).

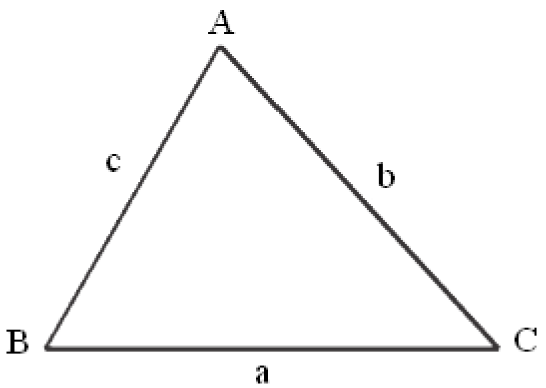


Figura II.86.
Triunghiul oarecare ABC, de laturi a,b,c

$$A_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{b \cdot a \cdot \sin C}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}$$

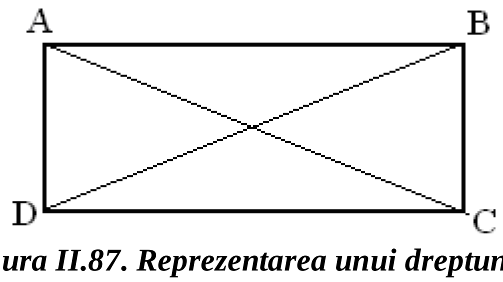


Figura II.87. Reprezentarea unui dreptunghi

$$A_{ABCD} = \frac{AC^2 \cdot \sin\left(\widehat{AC, BD}\right)}{2}$$

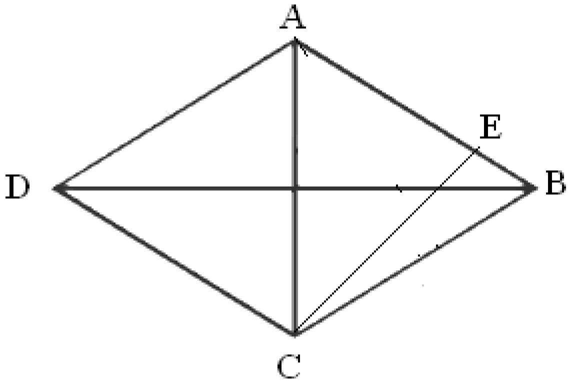


Figura II.88. Reprezentarea unui romb

$$\boxed{A_{ABCD} = AB \cdot d(C, AB) = AB^2 \cdot \sin B}$$

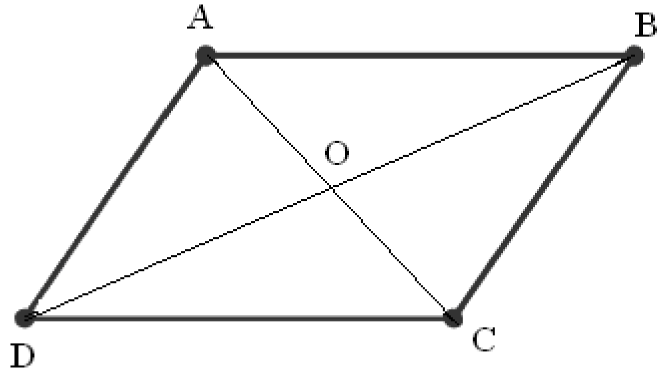


Figura II.89. Reprezentarea unui paralelogram

$$\boxed{A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\left(\widehat{AC, BD}\right)}{2}}$$

$$\boxed{A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin B}$$

Exemple:

- Calculaţi aria triunghiului din *figura II.86*, ştiind că: a =5 cm, c = 4 cm şi $m\left(\widehat{B}\right) = 60^\circ$.

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{20}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{20}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm^2.$$

- Cunoscând în *figura II.89*, că AB = 7 cm, BC = 6 cm, $m\left(\widehat{B}\right) = 30^\circ$, să se calculeze aria paralelogramului ABCD.

$$A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin B = 42 \cdot \frac{1}{2} = 21 cm^2.$$

C.II.4. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $m\left(\widehat{A}\right) = 90^\circ$, $AB = 12 cm$, $BC = 24 cm$. Calculaţi perimetrul triunghiului şi măsurile unghiurilor.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.90*.

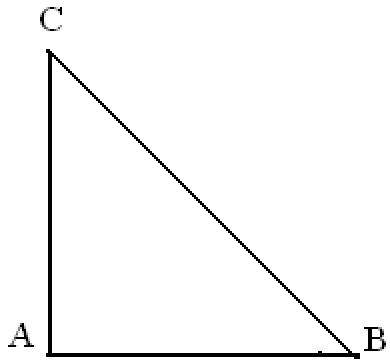


Figura II.90. Desenul problemei 1 (C.II.3)

Aplicăm teorema lui Pitagora:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$24^2 = AC^2 + 12^2 \Rightarrow AC^2 = 24^2 - 12^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = (24-12) \cdot (24+12) \Rightarrow AC^2 = 12 \cdot 36$$

$$\Rightarrow AC = 12\sqrt{3}\ cm$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m\left(\widehat{B}\right) = 60^\circ$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{C}\right) = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

2. Fie triunghiul dreptunghic ABC din *figura II.90*, cu $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ$, $BC = 25\text{cm}$ şi $\sin B + \sin C = \frac{7}{5}$. Aflaţi:

a) perimetrul triunghiului;
b) lungimile catetelor.

Demonstraţie:

a) $\sin B + \sin C = \frac{7}{5} \Rightarrow \sin B = \frac{7}{5} - \sin C$

Cum $\sin B = \frac{AC}{BC}$, $\sin C = \frac{AB}{BC}$, $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{7}{5} - \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{25} = \frac{35}{25} - \frac{AB}{25} \Rightarrow AC = 35 - AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB + AC = 35 \Rightarrow P_{ABC} = AB + AC + BC = 60\text{cm}$.

b) $\begin{cases} AB + AC = 35 \quad (\ )^2 \\ AB^2 + AC^2 = 25^2 \text{ (Pitagora)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 + 2 \cdot AB \cdot AC + AC^2 = 35^2 \\ AB^2 + AC^2 = 25^2 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot AB \cdot AC = 35^2 - 25^2$

$2 \cdot AB \cdot AC = (35 - 25) \cdot (35 + 25) \Rightarrow 2 \cdot AB \cdot AC = 10 \cdot 60 \Rightarrow AB \cdot AC = 300$, iar cum $AB + AC = 35 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} AB = 15 \text{ cm} \\ AC = 20\text{cm} \end{cases}$

3. Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $AD \perp BC$, $BD = 4\sqrt{3}\text{cm}$, $m\left(\widehat{BAD}\right) = 60^\circ$. Aflaţi lungimile laturilor şi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.91*.

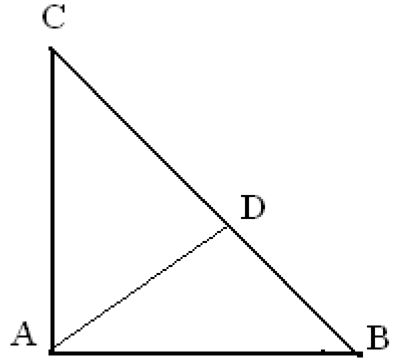


Figura II.91. Desenul problemei 3 (C.II.3)

Deoarece $m\left(\widehat{BAD}\right) = 60^\circ \Rightarrow m\left(\widehat{CAD}\right) = 30^\circ$

$\sin\left(\widehat{BAD}\right) = \sin 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 8 \text{ cm}$

În ΔADB avem: $AD^2 = AB^2 - BD^2 \Rightarrow AD^2 = 64 - 48 = 16 \Rightarrow AD = 4 \text{ cm}$.

În ΔADC avem: $\sin\left(\widehat{ACD}\right) = \sin 60^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

În ΔABC avem: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 64 + \frac{192}{3} = \frac{384}{3} \Rightarrow BC = \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$.

4. În trapezul dreptunghic ABCD cu $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{D}\right) = 90^\circ$, $AB = AD = \sqrt{3}\,cm$, $m\left(\hat{C}\right) = 60^\circ$ se cere să se calculeze perimetrul şi lungimile diagonalelor trapezului.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.92*.

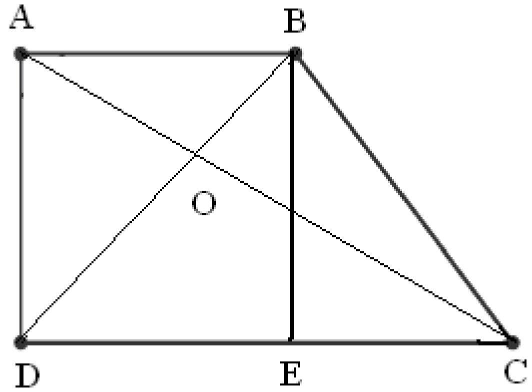


Figura II.92. Desenul problemei 4 (C.II.3)

Fie $BE \perp DC$,

În ΔBEC dreptunghic avem:

$$\sin\left(\hat{C}\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 2\text{ cm}$$

$$EC^2 = BC^2 - BE^2 \Rightarrow EC = 1\text{cm}$$

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 3 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)\text{cm}$$

În ΔDAB dreptunghic avem:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 \Rightarrow BD = \sqrt{6}\,\text{cm}$$

În ΔADC dreptunghic avem:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 3 + \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 = 7 + 2\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{7 + 2\sqrt{3}}\,\text{cm}.$$

5. Un paralelogram ABCD are aria de 40 cm^2, AB=10 cm, $m\left(\widehat{ADC}\right) = 135^\circ$. Să se calculeze:

a) Perimetrul paralelogramului;

b) Lungimea diagonalelor paralelogramului.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.93*.

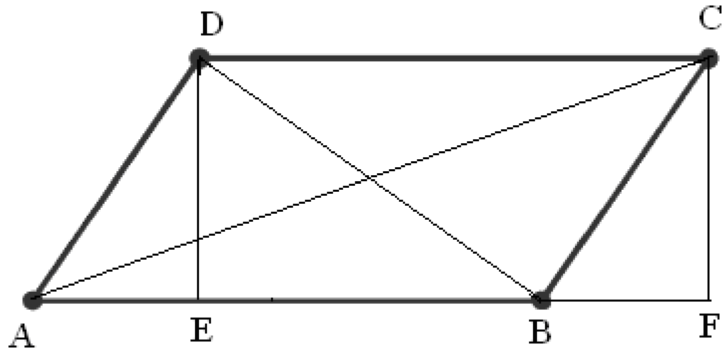


Figura II.93. Desenul problemei 5 (C.II.3)

a) Fie $DE \perp AB \Rightarrow \Delta DEA$ dreptunghic.

Dacă $m\left(\widehat{ADC}\right) = 135^\circ \Rightarrow m\left(\widehat{DAE}\right) = 45^\circ \Rightarrow \Delta DEA$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow AE = DE$.

$A_{ABCD} = AB \cdot DE = 10 \cdot DE = 40 \Rightarrow DE = 4\,\text{cm} = AE$

În ΔAED dreptunghic avem: $AD^2 = AE^2 + DE^2 = 32 \Rightarrow AD = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Deci $AB = DC = 10$ cm , $AD = BC = 4\sqrt{2}$ cm

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 20 + 8\sqrt{2} = 4 \cdot \left(5 + 2\sqrt{2}\right)$ cm

b) În ΔDEB dreptunghic avem:

$BD^2 = DE^2 + EB^2 \Rightarrow BD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\,\text{cm}$

Pentru a calcula lungimea diagonalei AC, trasăm $CF \perp AB \Rightarrow \Delta CFA$ dreptunghic, unde $AF = AB + BF = AB + AE = 14$ cm

În ΔCFA dreptunghic avem: $CA^2 = CF^2 + AF^2 = 212 \Rightarrow CA = 2\sqrt{53}\,\text{cm}$.

6. Raportul diagonalelor unui romb este de ¾, iar perimetrul rombului este de 40 cm. Se cere>

a) Aria rombului;

b) Înălţimea rombului;

c) Distanţa de la centrul rombului la o latură a sa.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.94*.

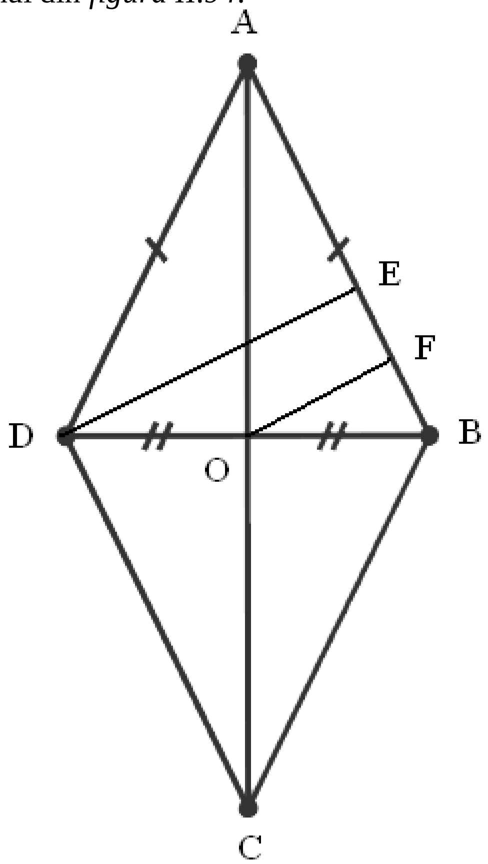


Figura II.94. Desenul problemei 6 (C.II.3)

a) $\frac{DB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow DB = \frac{3}{4} \cdot AC$,

$P_{ABCD} = 40 \Rightarrow AB = BC = CD = DA = 10$ cm

Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔAOB : $AB^2 = AO^2 + OB^2 \Rightarrow 100 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$100 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{3AC}{8}\right)^2 \Rightarrow 100 = \frac{16AC^2 + 9AC^2}{64} \Rightarrow AC = 16 \text{ cm} \Rightarrow DB = 12 \text{ cm}$

$A_{ABCD} = \dfrac{DB \cdot AC}{2} = \dfrac{12 \cdot 16}{2} = 96\,cm^2$.

b) Construim $DE \perp AB \Rightarrow A_{ABCD} = DE \cdot AB = 96\,cm^2 \Rightarrow DE \cdot 10 = 96\,cm^2 \Rightarrow DE = 9{,}6$ cm

c) Construim $OF \perp AB$.

În ΔAOB dreptunghic avem: $OF = \dfrac{OA \cdot OB}{AB} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} \Rightarrow OF = 4{,}8$ cm.

7. Fie dreptunghiul ABCD cu AB = 9 cm, BC = 12 cm. Se cere:

a) Distanţa de la B la diagonala AC;

b) Dacă E este proiecţia punctului B pe AC, iar $\{F\} = BE \cap AD$, aflaţi $[AF]$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.95*.

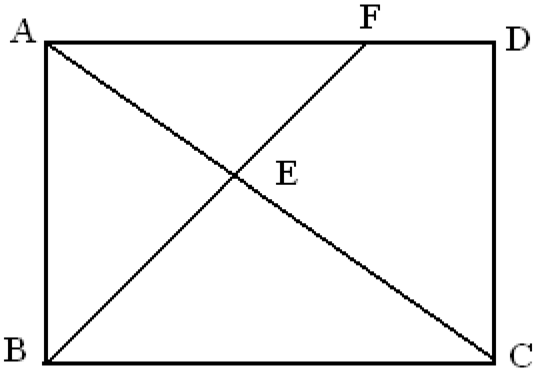


Figura II.95. Desenul problemei 7 (C.II.3)

a) Cum $BE \perp AC \Rightarrow d(B; AC) = BE$.

În ΔABC dreptunghic avem:

$BE = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} \Rightarrow OF = 4{,}8$ cm.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow AC = 15$ cm

$\Rightarrow BE = \dfrac{9 \cdot 12}{15} = \dfrac{36}{5}$ cm

b) $m\left(\widehat{ABE}\right) + m\left(\widehat{EBC}\right) = 90^\circ$

$m\left(\widehat{ECB}\right) + m\left(\widehat{EBC}\right) = 90^\circ \Rightarrow m\left(\widehat{ABE}\right) = m\left(\widehat{ECB}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BAF \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{BF}{AC} = \dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{AF}{9} = \dfrac{9}{12} \Rightarrow AF = \dfrac{81}{12} = \dfrac{27}{4}$ cm.

8. Demonstraţi că într-un triunghi ascuţitunghic au loc relaţiile: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.96*.

Construim $AD \perp BC$ şi $BE \perp AC$.

Notăm $AD = x$, $BE = y$.

În ΔADC dreptunghic avem: $\begin{cases} \sin B = \dfrac{x}{c} \\ \sin C = \dfrac{x}{b} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ (1)

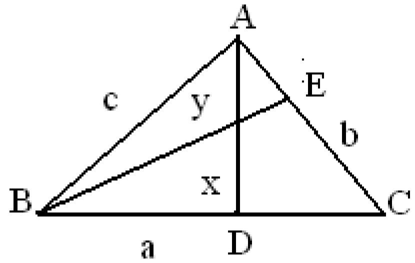


Figura II.96. Desenul problemei 8 (C.II.3)

În ΔAEB dreptunghic avem: $\begin{cases} \sin A = \dfrac{y}{c} \\ \sin C = \dfrac{y}{a} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sin A}{\sin C} = \dfrac{a}{c} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) şi datorită tranzitivităţii $\Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

9. Demonstraţi că într-un triunghi dreptunghic ABC, cu $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ$, are loc relaţia: $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.97*.

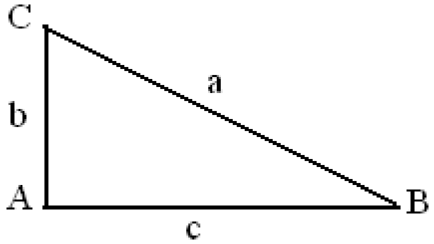


Figura II.97. Desenul problemei 9 (C.II.3)

$$\left.\begin{aligned} \cos B &= \frac{c}{a} \\ \cos C &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right| \Rightarrow \ b \cdot \cos C + c \cdot \cos B = b \cdot \frac{b}{a} + c \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 + c^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a$$

10. Fie dreptunghiul ABCD cu M mijlocul laturii şi $DP = 3 \cdot AP$, $P \in (AD)$. Să se arate că, dacă $MP \perp MC$, atunci ABCD este pătrat.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.98*.

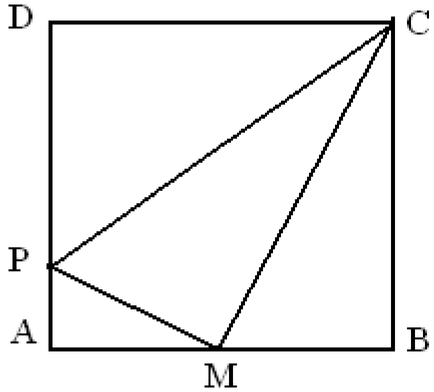


Figura II.98. Desenul problemei 10 (C.II.3)

$DP = 3 \cdot AP$, $DP = \dfrac{3}{4}AD$, $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$

ΔPAM dr $: PM^2 = AM^2 + PA^2 = \dfrac{4AB^2 + AD^2}{16}$ (1)

ΔCBM dr $: CM^2 = MB^2 + CB^2 = \dfrac{AB^2 + 4AD^2}{4}$ (2)

ΔPDC dr $: PC^2 = DP^2 + CD^2 = \dfrac{16AB^2 + 9AD^2}{16}$ (3)

Verific relaţiile (1), (2), (3) în ΔPMC dr, adică din $PC^2 = PM^2 + MC^2 \Rightarrow AB = AD \Rightarrow$ ABCD pătrat.

D.II. CERCUL

D.II.1. CERCUL ŞI ELEMENTE ÎN CERC

Definiţie: Fie ***O*** un punct fixat într-un plan ***α*** şi ***r*** un număr real pozitiv. Se numeşte ***cerc*** de centru ***O*** şi rază ***r*** şi se notează $C(O;r)$, mulţimea punctelor ***P*** din planul ***α*** situate la distanţa ***r*** de punctul ***O***

Pe scurt, ***cercul*** este mulţimea punctelor egal depărtate de un punct fix.
Notăm cercul de centru ***O*** şi rază ***r*** astfel: $C(O;r)=\{P\in\alpha \mid OP=r\}$ *(figura II.99)*.

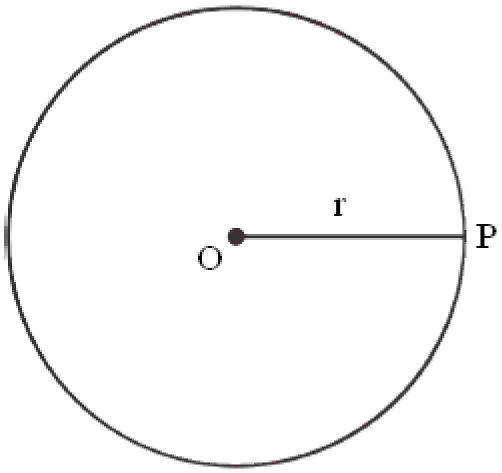


Figura II.99. Reprezentarea unui cerc de centru O şi rază r

Definiţie: Numim ***cercuri congruente*** acele cercuri care au raze egale.
Scriem că: $C_1(O_1;r_1)=C_2(O_2;r_2)\Leftrightarrow r_1=r_2$

Definiţie: Numim ***interiorul unui cerc***, notat $\text{Int}\, C(O;r)$, mulţimea punctelor din planul unui cerc situate la distanţă mai mică decât raza faţă de centrul cercului, în timp ce mulţimea punctelor situate la distanţă mai mare mai mare decât raza faţă de centrul cercului se numeşte ***exteriorul cercului***, notat $\text{Ext}\, C(O;r)$ *(figura II.100)*.
Notăm interiorul / exteriorul cercului de centru ***O*** şi rază ***r*** astfel:
$\text{Int}\, C(O;r)=\{P \mid OP<r\}$; $\text{Ext}\, C(O;r)=\{P \mid OP>r\}$.

Definiţie: Numim ***disc*** de centru ***O*** şi rază ***r*** , notat $D(O;r)$ punctele unui cerc $C(O;r)$ împreună cu punctele interioare cercului *(figura II.100)*.
Notăm discul de centru ***O*** şi rază ***r***, astfel: $D(O;r)=C(O;r)\cup \text{Int}\, C(O;r)=\{P \mid OP\le r\}$

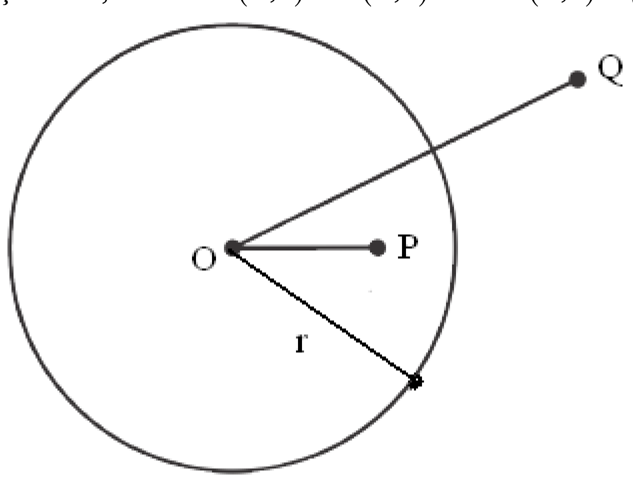


Figura II.100. Reprezentarea interiorului / exteriorului unui cerc de centru O şi rază r şi a discului de centru O şi rază r

Definiţie: Numim ***coardă*** segmentul determinat de două puncte de pe cerc.

Exemplu: coarda [AB] din *figura II.101*.

Definiţie: Numim ***diametru*** coarda care conţine centrul cercului.

Observaţie: Diametrul este coarda de lungime maximă. Lungimea oricărui diametru este egală cu dublul razei cercului: $D = 2 \cdot r$. Capetele unui diametru se numesc ***puncte diametral opuse***.

Exemplu: diametrul [MN] din *figura II.101*.

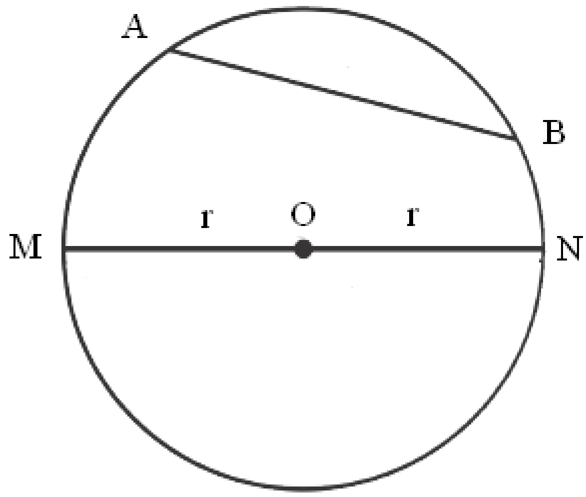


Figura II.101. Reprezentarea coardei [AB] şi a diametrului [MN] unui cerc de centru O şi rază r

Definiţie: Numim ***unghi la centru*** un unghi cu vârful în centrul unui cerc.

Exemplu: $\widehat{AOB}$ din *figura II.102*.

Definiţie: Porţiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numeşte ***arc de cerc***, iar punctele care determină arcul se numesc ***capetele*** (***extremităţile)*** arcului. Porţiunea din cerc situată în interiorul unui unghi propriu la centru se numeşte ***arc mic***, iar porţiunea din cerc situată în exteriorul aceluiaşi unghi se numeşte ***arc mare***. Dacă unghiul la centru este alungit, el determină pe cerc două arce numite ***semicercuri***. *(figura II.101)*

$$m(\text{arc}AB) = m\left(\widehat{AOB}\right)$$

$$m(\text{arc}AMB) = 360^\circ - m\left(\widehat{AOB}\right)$$

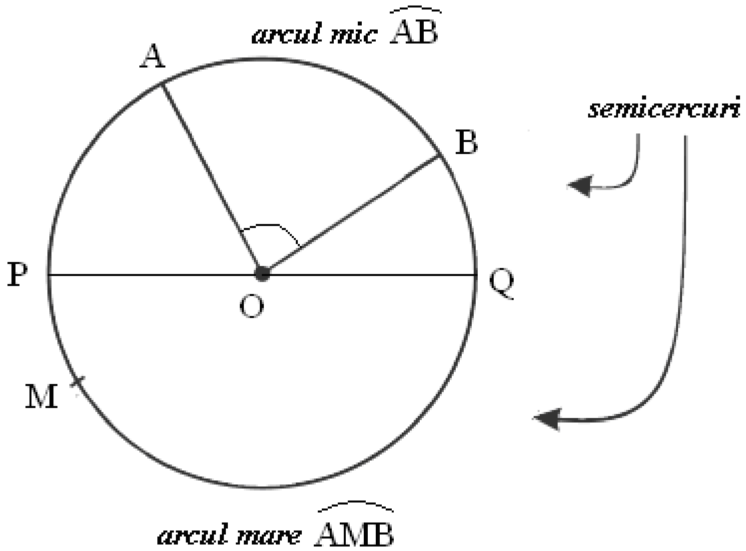


Figura II.102. Reprezentarea arcului de cerc mic, mare, a unghiului la centru şi a semicercurilor

Definiţie: Măsura unui arc mic AB este egală cu măsura unghiului la centru $\widehat{AOB}$, iar măsura arcului mare AMB este egală cu $360^\circ - m\left(\widehat{AOB}\right)$.

Observaţie: Măsura unui semicerc (diametru) este de 180°, iar măsura cercului este de 360°.

Definiţie: Numim ***arce congruente***, dacă şi numai dacă au aceeaşi măsură. *(figura II.103)*

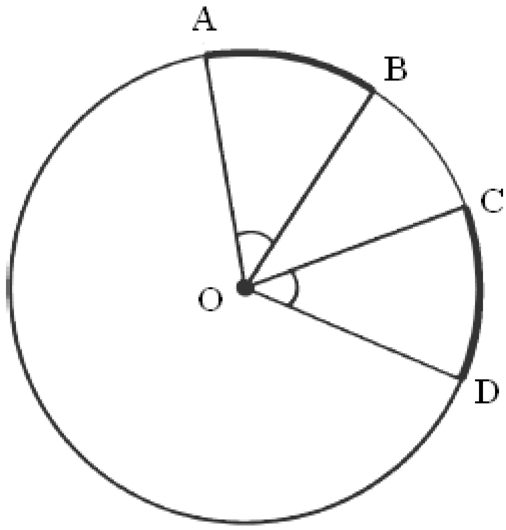


Figura II.103.
Reprezentarea a două arce congruente

$$\text{arc}AB \equiv \text{arc}CD \Leftrightarrow m(\text{arc}AB) = m(\text{arc}CD)$$

sau

$$\text{arc}AB \equiv \text{arc}CD \Leftrightarrow m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{COD}\right)$$

TEOREME REFERITOARE LA ARCE ŞI COARDE

Teoremă: Într-un cerc sau cercuri congruente, coardelor congruente le corespund arce congruente. Reciproca este adevărată.

Teoremă: Într-un cerc, un diametru perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei şi determină, pe fiecare dintre arcele subântinse de coardă, arce congruente.

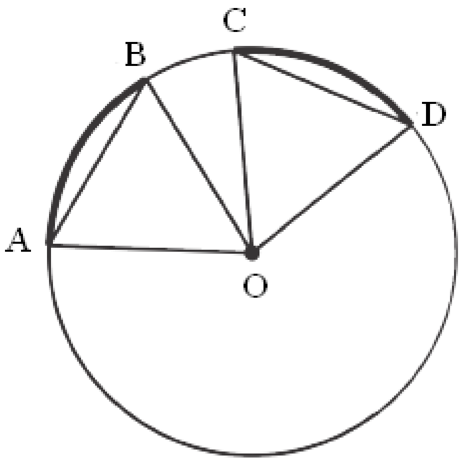


Figura II.104. Reprezentarea teoremei referitoare la arce şi coarde congruente în cerc

$$[AB] \equiv [CD] \Leftrightarrow \text{arc}AB \equiv \text{arc}CD$$

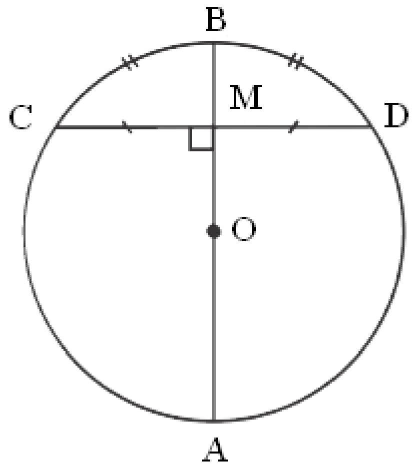


Figura II.105. Reprezentarea teoremei referitoare la diametrul perpendicular pe o coardă

$$\left.\begin{array}{l} [AB] - \text{diametru}; [CD] - \text{coardă} \\ AB \perp CD \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} [CM] \equiv [MD] \\ \text{arc}CB \equiv \text{arc}BD \end{cases}$$

Teoremă: Dacă două coarde ale unui cerc sunt paralele, atunci arcele cuprinse între ele sunt congruente.

Teoremă: Într-un cerc, două coarde sunt congruente, dacă şi numai dacă sunt egal depărtate de centru.
Teorema are loc şi pentru coarde situate în cercuri congruente.

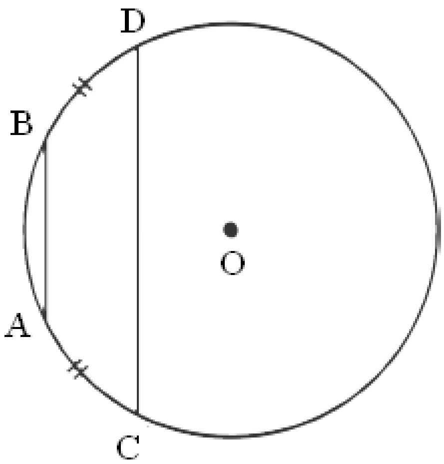


Figura II.106. Reprezentarea teoremei referitoare la arce cuprinse între coarde paralele

$$AB \parallel CD \Rightarrow arcAC \equiv arcBD$$

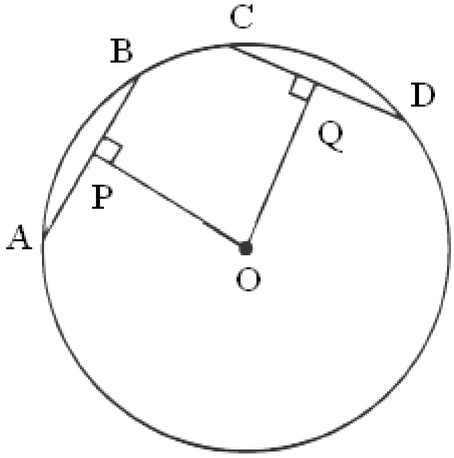


Figura II.107. Reprezentarea teoremei referitoare la coarde egal depărtate de centru

$$[AB] \equiv [CD] \Leftrightarrow d(O;AB) = d(O;CD)$$

sau

$$[AB] \equiv [CD] \Leftrightarrow [OP] \equiv [OQ]$$

Exemple:

- Ştiind că diametrul unui cerc este de 18 cm, aflaţi raza cercului.

Se ştie că $D = 2 \cdot r \Rightarrow r = 9\,cm$.

- Fie $A, B \in C(O;8\,cm)$. Determinaţi lungimea coardei [AB], dacă măsura arcului AB are 90°.

În *figura II.108* este reprezentat desenul aferent cerinţelor problemei.

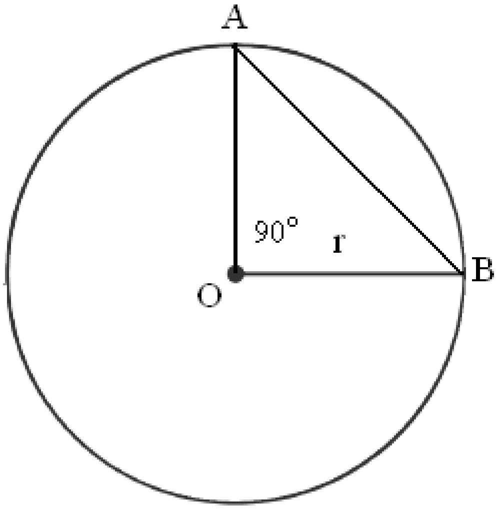


Figura II.108. Desenul aferent exemplului

$$m(arcAB) = 90^\circ = m\left(\widehat{AOB}\right)$$

Aplicând teorema lui Pitagora în ΔAOB dreptunghic isoscel obţinem: $AB^2 = 2 \cdot AO^2 = 128 \Rightarrow$ $AB = 8\sqrt{2}$ cm.

D.II.2. UNGHI, TRIUNGHI ŞI PATRULATER ÎNSCRIS ÎN CERC

Definiţie: Unghiul înscris în cerc este acel unghi cu vârful pe cerc şi ale cărui laturi includ două coarde ale cercului.

Măsura unghiului înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Exemplu: unghiul înscris în cerc $\widehat{APB}$ din *figura II.109.a*.

Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul unui cerc este egală cu jumătate din valoarea absolută a diferenţei măsurilor arcelor cuprinse între laturile lui.

Exemplu: unghiul cu vârful în exteriorul unui cerc $\widehat{ARB}$ din *figura II.109.b*.

Măsura unui unghi cu vârful în interiorul unui cerc este egală cu semisuma arcelor cuprinse între laturile unghiului şi prelungirile laturilor lui.

Exemplu: unghiul cu vârful în interiorul unui cerc $\widehat{AQB}$ din *figura II.109.b*.

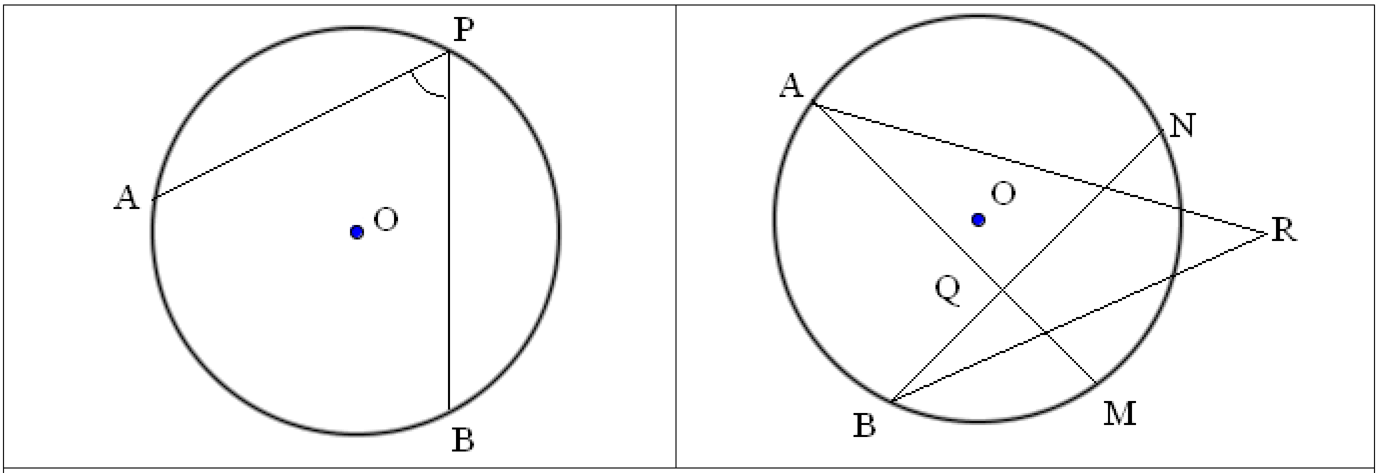


Figura II.109. Reprezentarea unghiului
a) înscris în cerc ***b) cu vârful în exteriorul cercului şi cu vârful în interiorul cercului***

$m\left(\widehat{APB}\right)=\frac{1}{2}m(arcAB)$	$m\left(\widehat{ARB}\right)=\frac{1}{2}[m(arcAB)-m(arcST)]$	$m\left(\widehat{AQB}\right)=\frac{1}{2}[m(arcAB)+m(arcMN)]$

Observaţii:

- Orice unghi înscris într-un semicerc este un unghi drept *(figura II.110)*.
- Două unghiuri înscrise în cerc care subântind acelaşi arc sunt congruente *(figura II.111)*.

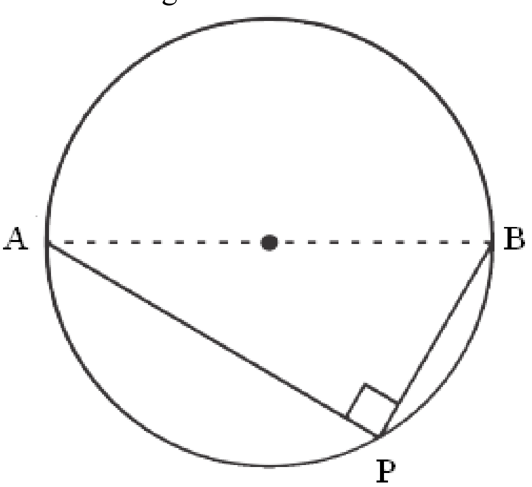


Figura II.110. $[AB]$diametru $\Rightarrow m\left(\widehat{APB}\right)=90^\circ$

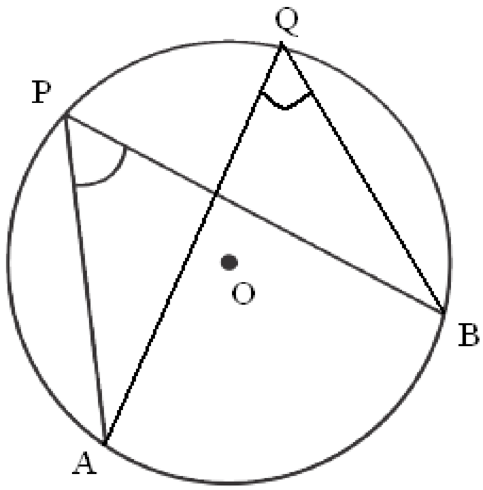
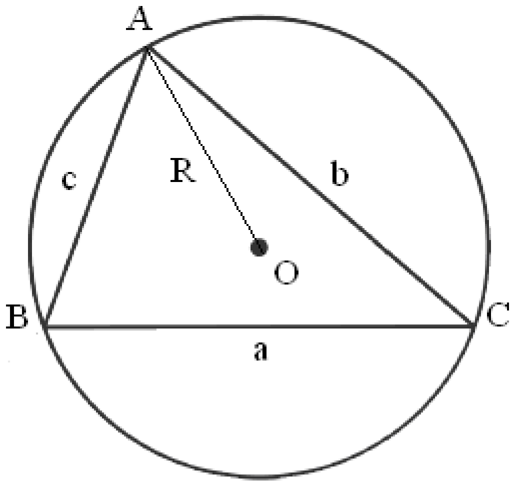


Figura II.111. $\widehat{APB}\equiv\widehat{AQB}$

Definiţie: Un triunghi cu vârfurile situate pe un cerc se numeşte ***triunghi înscris în cerc***. Se spune că cercul este circumscris triunghiului *(figura II.112)*.

Teoremă: Centrul cercului circumscris triunghiului se află la intersecţia mediatoarelor laturilor triunghiului. Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic se află în mijlocul ipotenuzei.



$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S}$$

cu R= raza cercului circumscris triunghiului cu laturile a, b, c şi aria S

Figura II.112. Reprezentarea triunghiului înscris în cerc

Definiţie: Un patrulater cu vârfurile situate pe un cerc se numeşte ***patrulater înscris în cerc***. Se spune că cercul este circumscris patrulaterului *(figura II.113)*.

Teoremă: Într-un patrulater înscris într-un cerc oricare două unghiuri opuse sunt suplementare.

Teoremă: Într-un patrulater înscris într-un cerc oricare două unghiuri formate de diagonale cu două laturi opuse sunt congruente.

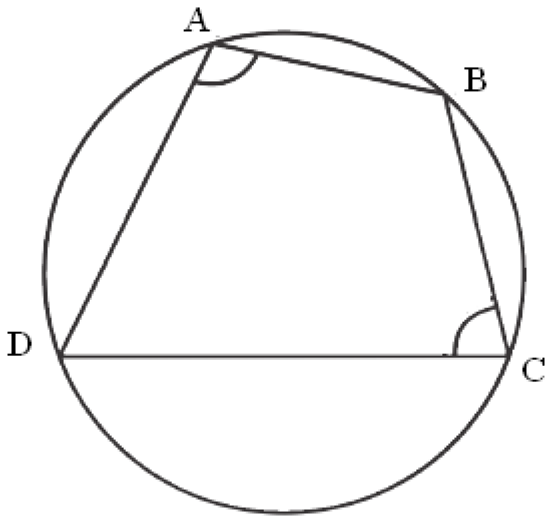


Figura II.113. Reprezentarea teoremei referitoare la unghiurile opuse ale unui patrulater inscriptibil

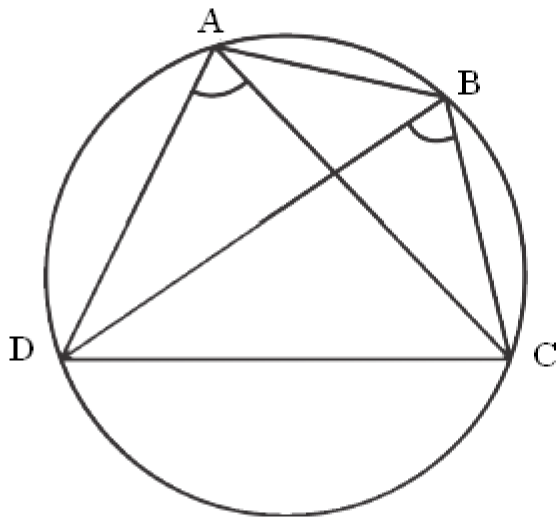


Figura II.114. Reprezentarea teoremei referitoare la unghiurile formate de diagonale cu laturi opuse

Definiţie: Patru puncte se numesc ***conciclice***, dacă se află pe un acelaşi cerc.

Definiţie: Un patrulater se numeşte ***inscriptibil***, dacă vârfurile sale sunt conciclice. Altfel spus, un patrulater este inscriptibil, dacă poate fi înscris într-un cerc.

Teoremă: Un patrulater cu două unghiuri opuse suplementare este inscriptibil.

Teoremă: Un patrulater în care două unghiuri formate de diagonale cu două laturi opuse sunt congruente este inscriptibil.

Exemple:

- Triunghiul dreptunghic ABC, $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ$ este înscris într-un cerc de rază 20 cm. Ştiind că

AC = 32 cm, ne propunem să calculăm perimetrul şi aria triunghiului, precum şi distanţele de la centrul cercului la laturile AB şi AC.
Construim *figura II.115*, conform cerinţelor din enunţ.

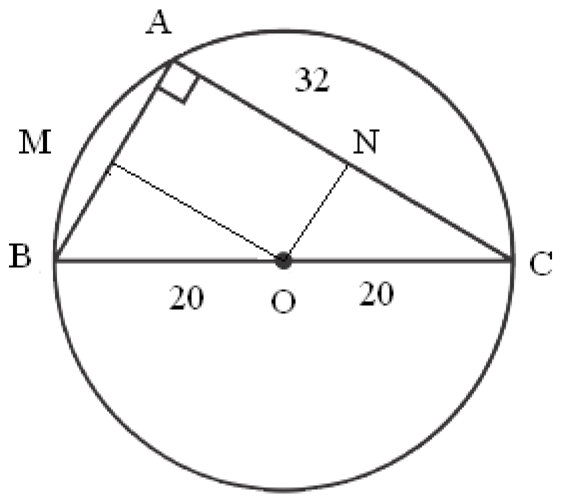


Figura II.115. Desenul aferent exemplului

Conform unei teoreme enunţate anterior, *centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic se află în mijlocul ipotenuzei.*
Aplicând teorema lui Pitagora în ΔABC, obţinem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB^2 = 40^2 - 32^2 = (40-32)\cdot(40+32) =$$
$$= 8\cdot 8\cdot 9 = 8^2\cdot 3^2 = 24^2 \Rightarrow AB = 24\text{cm}$$
$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 24 + 40 + 32 = 96\text{cm}$$
$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{32\cdot 24}{2} = 384\text{cm}^2.$$

Construim $OM \perp AB,\ ON \perp AC \Rightarrow OM \parallel AC,\ OM$ - mediatoare $\Rightarrow [AM] \equiv [MB] \Rightarrow OM$ este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow OM = \frac{AC}{2} = 16\text{cm}$.

Construim $ON \perp AC \Rightarrow ON \parallel AB,\ ON$ - mediatoare $\Rightarrow [AN] \equiv [NC] \Rightarrow ON$ este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow ON = \frac{AB}{2} = 12\text{cm}$.

- Trapezul ABCD este înscris într-un cerc de rază 17 cm. Ştiind că [AB] este diametru şi că înălţimea trapezului este de 15 cm, ne propunem să calculăm perimetrul şi aria trapezului.

Construim *figura II.116*, conform cerinţelor din enunţ.

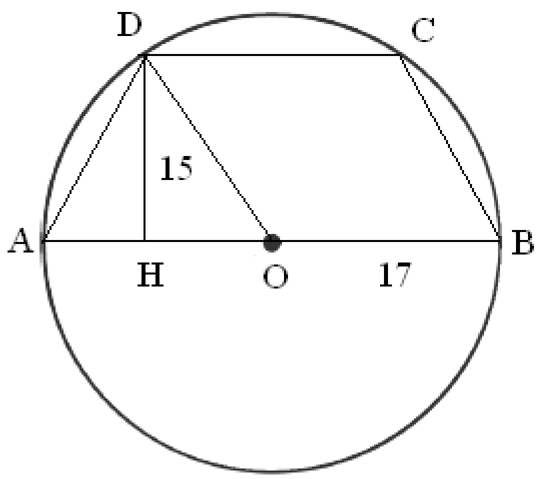


Figura II.116. Desenul aferent exemplului

Construim $DH \perp AO \Rightarrow \Delta DHO$ dreptunghic.
Aplicăm teorema lui Pitagora şi obţinem:

$$HO^2 = DO^2 - DH^2 = 17^2 - 15^2 = 64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow HO = 8\text{cm} \Rightarrow AH = AO - HO = 9\text{cm}$$
$$CD = AB - 2\cdot AH = 34 - 18 = 16\text{cm}$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DHA şi obţinem:

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 = 9^2 + 15^2 = 306 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AD = 3\sqrt{34}\text{ cm} = BC$$

Deoarece trapezul este înscris în cerc, conform teoremei de inscriptibilitate rezultă că trapezul este isoscel.

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 50 + 6\sqrt{34}\text{ cm}$$
$$A_{ABCD} = \frac{(AB + CD)\cdot DH}{2} = \frac{(34+16)\cdot 15}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_{ABCD} = 375\text{ cm}^2$$

D.II.3. POZIŢIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FAŢĂ DE CERC

Teoremă: O dreaptă nu poate avea mai mult de două puncte distincte comune cu un cerc.

Definiţie: O dreaptă care are două puncte comune cu un cerc se numeşte ***secantă*** a cercului.

Definiţie: O dreaptă care are exact un punct comun cu un cerc se numeşte ***tangentă*** la cerc.

Definiţie: O dreaptă care nu are niciun punct comun cu un cerc dat se numeşte ***exterioară*** cercului.

În *figurile II.117 ÷ II.119* vom reprezenta aceste tipuri de poziţii ale dreptelor faţă de un cerc.

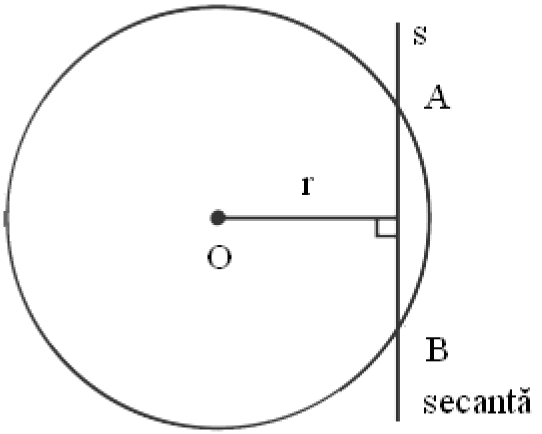


Figura II.117. Reprezentarea unei secante
$s \cap C(O,r) = \{A,B\}$ sau $d(O,s) < r$

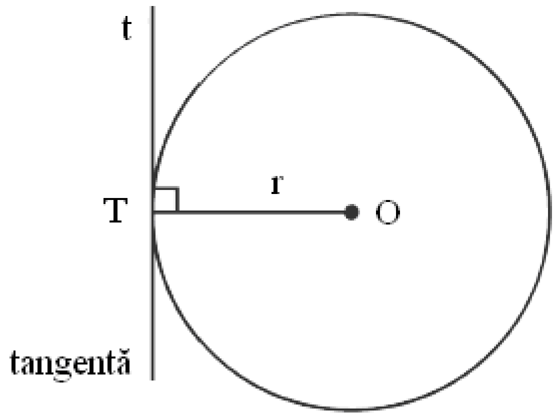


Figura II.118. Reprezentarea unei tangente
$t \cap C(O,r) = \{T\}$ sau $d(O,t) = r$

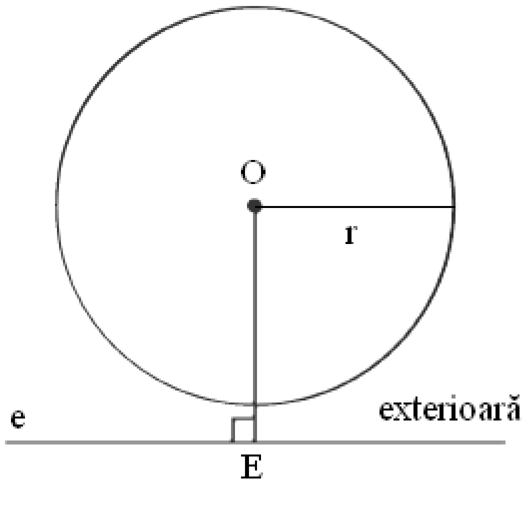


Figura II.119. Reprezentarea unei drepte exterioare
$e \cap C(O,r) = \varnothing$ sau $d(O,s) > r$

Observaţii:

- Tangenta la cerc este perpendiculară pe rază în punctul de tangenţă.
- Măsura unui unghi cu vârful pe cerc, care are o latură tangentă la cerc, iar cealaltă secantă, este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.
- Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul unui cerc care are laturile tangente sau secante la cerc, este egală cu jumătate din valoarea absolută a diferenţei măsurilor arcelor cuprinse între laturile lui.

Teoremă: Dintr-un punct exterior unui cerc se pot construi exact două tangente la cercul dat.
Fie M un punct exterior unui cerc de centru O şi A, B punctele de contact ale tangentelor din M la cerc. Atunci:
a) $[MA] \equiv [MB]$;
b) [MO este bisectoarea unghiului AMN;
c) [OM este bisectoarea unghiului AOB;
d) [OM este mediatoarea segmentului [AB].

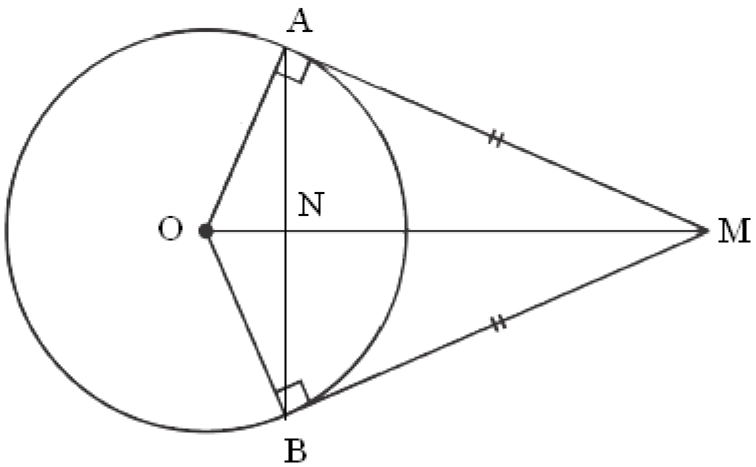


Figura II.120. Reprezentarea teoremei referitoare la proprietăţile tangentelor dintr-un punct exterior cercului

Exemplu: Ne propunem, folosind *figura II.120*, să demonstrăm că: $AB \perp MO$.

$$\Delta MOA \equiv \Delta MOB \overset{IC}{\Rightarrow} \begin{cases} [AM] \equiv [BM] \\ \widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB}$$

Cum $\{N\} = AB \cap OM \Rightarrow [ON$ e bisectoare şi înălţime în $\Delta AOB \Rightarrow AB \perp MO$.

Definiţie: Un cerc $C(I, r)$ este înscris în ΔABC, dacă dreptele AB, AC, BC sunt tangente la cerc. Spunem că ΔABC este ***circumscris cercului*** *(figura II.121)*. Punctul de intersecţie al bisectoarelor unui triunghi se notează cu I şi este centrul unui cerc, numit ***cercul înscris în triunghi*** - *figura II.120*, iar $d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, AC) = r =$ raza cercului înscris în triunghi $(IM = IN = IP = r)$. Raza se calculează din formula $\boxed{S = p \cdot r}$, unde p este semiperimetrul triunghiului.

Teoremă: Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente într-un punct egal depărtat de laturile triunghiului.

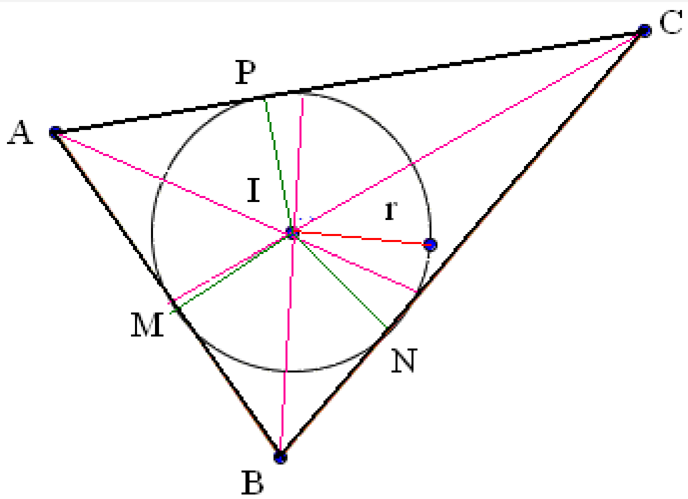


Figura II.121. Concurenţa bisectoarelor unghiurilor unui triunghi

Exemplu: Calculaţi raza cercului înscris în ΔABC, ştiind că AC = 4 cm, BC = 5 cm, AB = 3 cm, iar aria ΔABC este de 6 cm^2.

Se ştie că $S = p \cdot r \Rightarrow S = \frac{AC + BC + AB}{2} \cdot r \Rightarrow 6 = \frac{4+5+3}{2} \cdot r \Rightarrow 6 = 6 \cdot r \Rightarrow r = 1\text{cm}$.

Definiţie: Un patrulater este circumscris unui cerc, dacă laturile sale sunt tangente cercului. Se spune că cercul este înscris în patrulater *(figura II.122).*

> ***Teoremă:*** Dacă un patrulater este circumscris unui cerc, atunci suma lungimilor a două laturi opuse este egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi opuse.

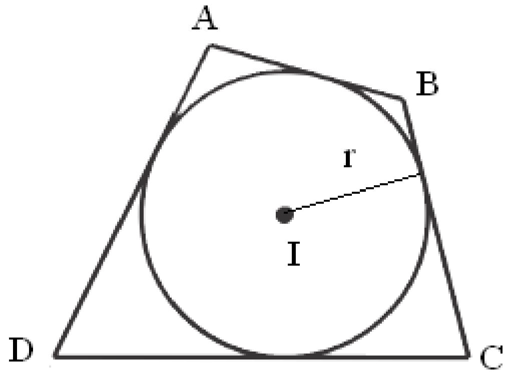


Figura II.122. Reprezentarea unui patrulater circumscris unui cerc

$AB + CD = AD + BC$

Exemplu: Cunoscând că patrulaterul circumscris unui cerc, aferent *figurii II.122,* are AB = 4 cm, BC = 5 cm, CD = 7 cm, să se calculeze lungimea laturii AD.

Pornind de la relaţia $AB + CD = AD + BC$, obţinem: $4 + 7 = AD + 5 \Rightarrow AD = 6\text{cm}$.

D.II.4. POZIŢIILE RELATIVE A DOUĂ CERCURI

Două cercuri $C_1(O_1; r_1)$ şi $C_2(O_2; r_2)$ se pot afla în diferite poziţii unul faţă de celălalt, în funcţie de distanţa O_1O_2 dintre centre, după cum se va putea observa în *figurile II.123÷ II.128.*

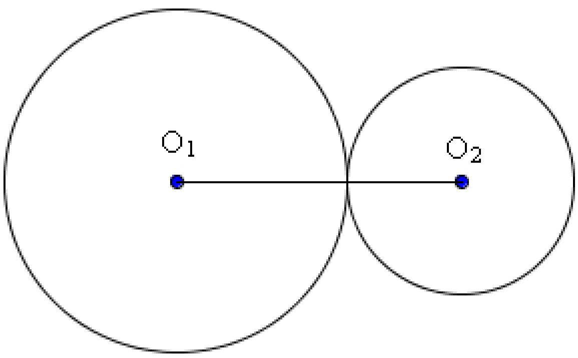


Figura II.123. Cercuri tangente exterior

$O_1O_2 = r_1 + r_2$

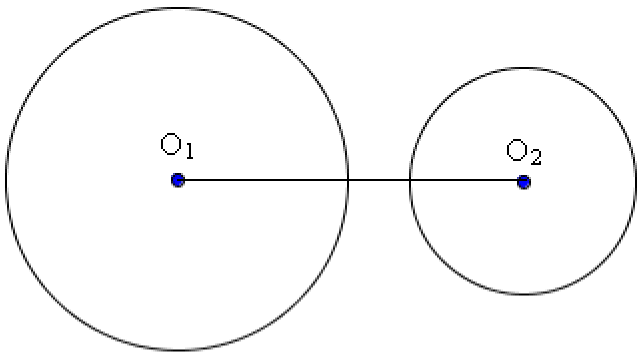


Figura II.124. Cercuri exterioare

$O_1O_2 > r_1 + r_2$

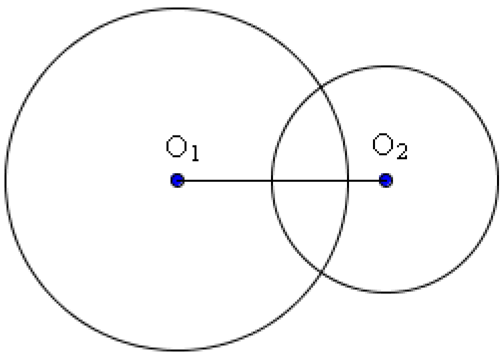


Figura II.125. Cercuri secante

$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$

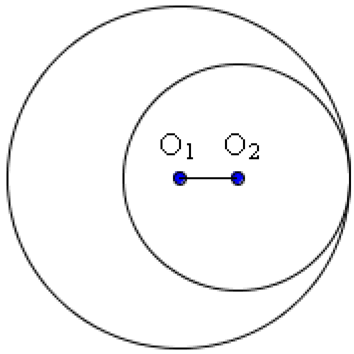


Figura II.126. Cercuri tangente interior

$O_1O_2 = r_1 - r_2$

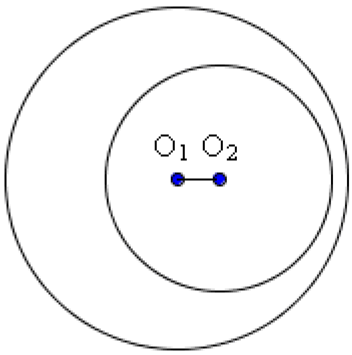


Figura II.127. Cercuri interioare

$O_1O_2 < r_1 - r_2$

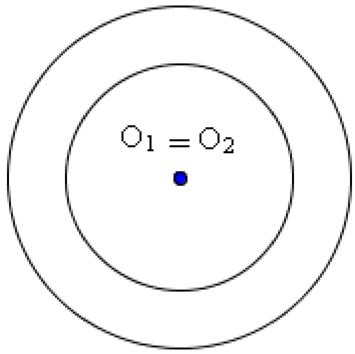


Figura II.128. Cercuri concentrice

$O_1O_2 = 0$

Exemplu: Pentru cercurile $C_1(O_1;r_1)$ şi $C_2(O_2;r_2)$, cu $r_1 = 5\text{cm}$, $r_2 = 3\text{cm}$ şi $O_1O_2 = 3x + 2$, ne propunem să determinăm valorile $x \in Z$ pentru care cercurile sunt:

- tangente exterioare,
- secante,
- tangente interioare,
- concentrice.

Utilizând condiţiile de existenţă ale acestor tipuri de cercuri, din *figurile II.123, II.125, II.127, II.128*, obţinem:

Cercuri tangente exterior:

$$\begin{cases} O_1O_2 = r_1 + r_2 \\ O_1O_2 = 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow 3x + 2 = 8 \Rightarrow x = 2 \in Z;$$

Cercuri secante:

$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$$

$$\begin{cases} r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r \\ O_1O_2 = 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < 3x + 2 < 8 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 < 8 \\ 3x + 2 > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \in Z;$$

Cercuri tangente interior:

$$\begin{cases} O_1O_2 = r_1 - r_2 \\ O_1O_2 = 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow 3x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0 \in Z;$$

Cercuri concentrice:

$$\begin{cases} O_1O_2 = 0 \\ O_1O_2 = 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \notin Z$$, nu există astfel de cercuri concentrice.

D.II.5. POLIGOANE REGULATE

Definiţie: Un poligon convex cu toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente se numeşte ***poligon regulat.***

Un poligon cu ***n*** laturi se obţine împărţind un cerc în $n \geq 3$ arce congruente şi unind punctele de diviziune consecutive.

Observaţie: Orice poligon regulat este înscris într-un cerc şi este circumscris unui cerc, aceste două cercuri fiind concentrice, centrul comun numindu-se ***centrul poligonului***.

Definiţie: Distanţa de la centrul poligonului la fiecare dintre laturi se numeşte ***apotema poligonului***.

În *tabelul II.2* vom sintetiza relaţiile de calcul pentru câteva elemente ale poligoanelor regulate cu ***n*** laturi, respectiv ale unor *poligoane regulate particulare*, mai des întâlnite, cum ar fi cele cu 3, 4 şi 6 laturi, adică triunghiul echilateral, pătratul şi hexagonul regulat (*figurile II.129 ÷ II.132*) Se presupune că aceste poligoane sunt înscrise în cercul $C(O, R)$.

Tabelul II.2. Tipuri de poligoane regulate şi relaţii de calcul

Tip poligon / Relaţii de calcul	**Poligon regulat cu *n* laturi**	**Poligon regulat cu 3 laturi (triunghi echilateral)**	**Poligon regulat cu 4 laturi (pătrat)**	**Poligon regulat cu 6 laturi (hexagon)**
Măsura unui unghi	$u_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$	$u_3 = 60^\circ$	$u_4 = 90^\circ$	$u_6 = 120^\circ$
Lungimea laturii	$l_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$l_3 = R\sqrt{3}$	$l_4 = R\sqrt{2}$	$l_6 = R$
Lungimea apotemei	$a_n = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$	$a_3 = \dfrac{R}{2}$	$a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$
Perimetrul	$P_n = n \cdot l_n$ $P_n = 2nR\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$P_3 = 3\cdot l_3$ $P_3 = 3R\sqrt{3}$	$P_4 = 4\cdot l_4$ $P_4 = 4R\sqrt{2}$	$P_6 = 6\cdot l_6$ $P_6 = 6R$
Aria	$A_n = \dfrac{P_n \cdot a_n}{2}$ $A_n = nR^2\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{180^\circ}{n}$	$A_3 = \dfrac{l_3^2\sqrt{3}}{4}$ $A_3 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$A_4 = l_4^2$ $A_4 = 2R^2$	$A_6 = \dfrac{3\cdot l_6^2\sqrt{3}}{2}$ $A_6 = \dfrac{3\cdot R^2\sqrt{3}}{2}$

Exemplu: Ştiind că perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu perimetrul unui pătrat cu apotema de $4\sqrt{2}$ cm, ne propunem să calculăm apotema şi aria triunghiului.

Ne vom folosi în rezolvare de relaţiile de calcul necesare din *tabelul II.2*.

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow R = 8\,\text{cm} \quad , \qquad l_4 = R\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$$

$$P_3 = P_4 \Rightarrow 3\cdot l_3 = 4\cdot l_4 \Rightarrow l_3 = \frac{32\sqrt{2}}{3} = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{32\sqrt{6}}{9} \Rightarrow a_3 = \frac{R}{2} = \frac{32\sqrt{6}}{18}\,\text{cm}$$

$$A_3 = \frac{l_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2048\sqrt{3}}{36} = \frac{512\sqrt{3}}{9}\,\text{cm}^2.$$

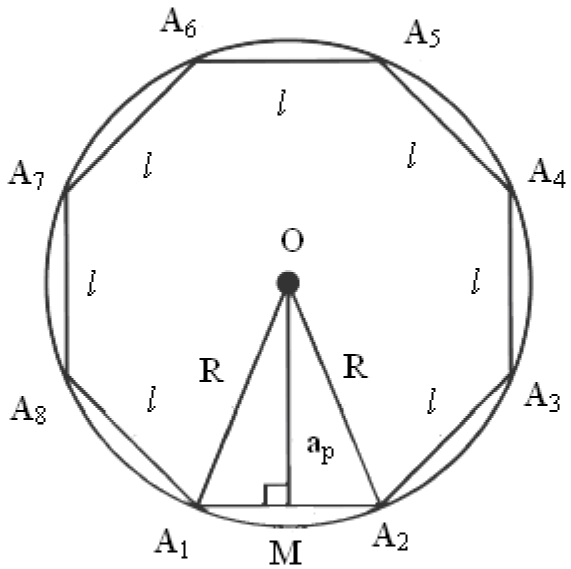


Figura II.129. Poligon regulat cu 8 laturi

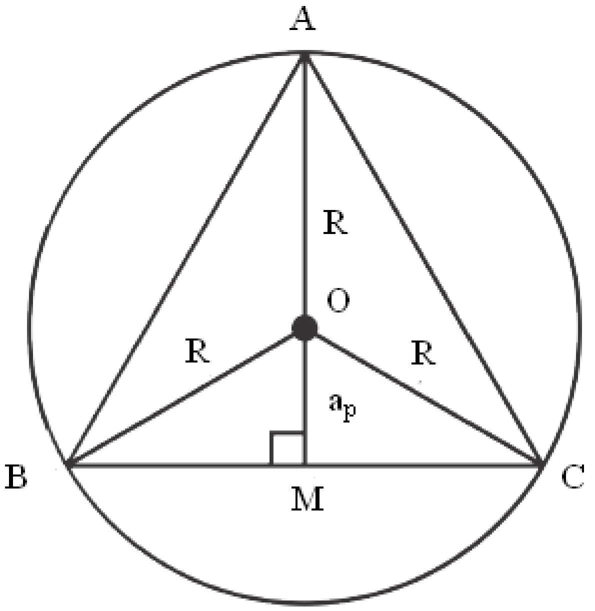


Figura II.130. Poligon regulat cu 3 laturi

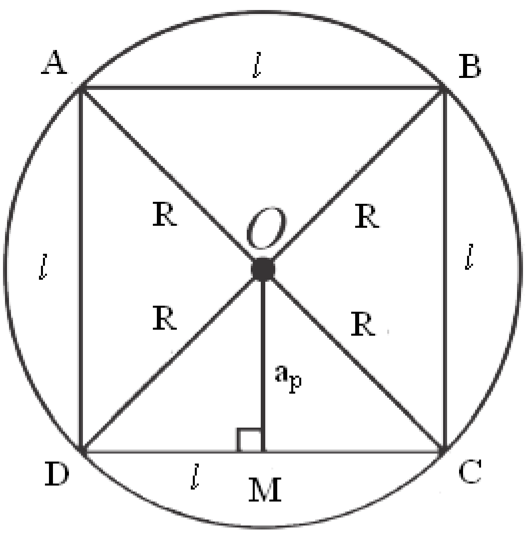


Figura II.131. Poligon regulat cu 4 laturi

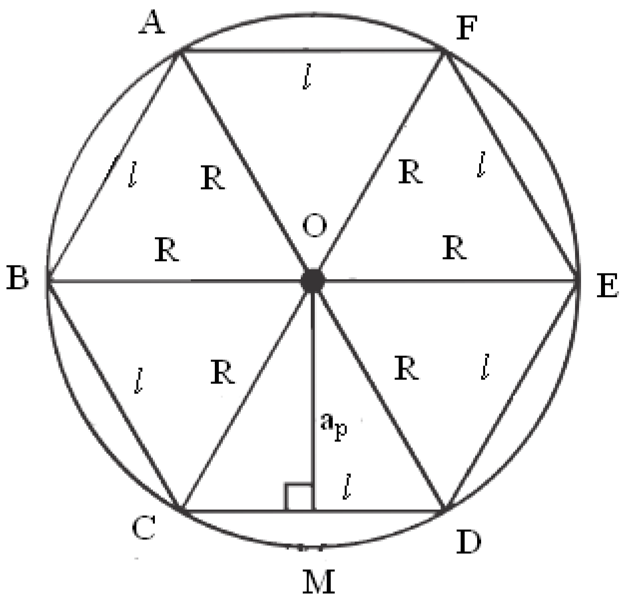


Figura II.132. Poligon regulat cu 6 laturi

D.II.6. LUNGIMI ŞI ARII DE CERC

Lungimea (perimetrul) cercului. Aria discului

Lungimea cercului şi aria discului de rază R (*figura II.133*) sunt date de relaţiile:

$$\boxed{L_{cerc} = 2\pi R} \quad \text{şi} \quad \boxed{A_{disc} = \pi R^2}$$

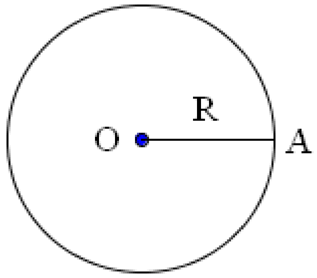


Figura II.133. Reprezentarea unui cerc de rază R

Exemple:

- Determinaţi raza cercului de lungime $6\pi\sqrt{2}$ cm.

$L_{cerc} = 2\pi R \Rightarrow 6\pi\sqrt{2} = 2\pi R \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$ cm.

- Determinaţi aria discului de rază 6 cm.

$A_{disc} = \pi R^2 \Rightarrow A_{disc} = 36\pi \, cm^2$

Lungimea arcului şi aria sectorului de cerc

Definiţie: Porţiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze ale sale se numeşte ***sector circular***. (*figura II.134*)

Lungimea unui arc de cerc de măsură u° şi aria sectorului circular corespunzător se calculează cu relaţiile:

$$\boxed{L_{arc\,AB} = \frac{\pi R \cdot u^\circ}{180^\circ}} \quad \text{şi} \quad \boxed{A_{sector} = \frac{\pi R^2 \cdot u^\circ}{360^\circ}}$$

Definiţie: Porţiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între un arc de cerc şi coarda care subântinde acel cerc se numeşte ***segment circular.***

Aria segmentului circular corespunzător unui arc de măsură u° este dat de relaţia:

$$\boxed{A_{segment} = \left(\frac{\pi \cdot u^\circ}{360^\circ} - \frac{\sin u^\circ}{2}\right) \cdot R^2}$$

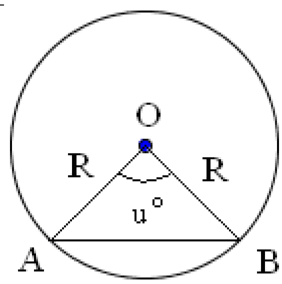


Figura II.134. Reprezentarea unui sector de cerc şi a unui segment circular

Exemplu: În *figura II.134*, R=6 cm şi $u^\circ = 60^\circ$. Vom calcula, utilizând relaţiile anterioare, lungimea arcului AB, aria sectorului de cerc AOB, aria segmentului.

$$L_{arcAB} = \frac{6\pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} = 2\pi ; A_{sector} = \frac{36\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 6\pi ; A_{segment} = \left(\frac{\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{\sin 60^\circ}{2}\right) 36 = 3\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

D.II.7. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Fie diametrele [AB] şi [CD] în cercul $\mathcal{C}(O;R)$. Demonstraţi că $[AD]\equiv[BC]$ şi determinaţi natura patrulaterului ACBD.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.135*.

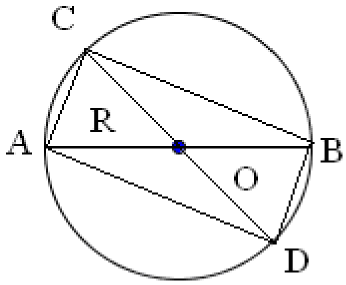


Figura II.135. Desenul problemei 1 (D.II.7)

Analizăm ΔAOD şi ΔBOC: $\begin{cases}[CO]\equiv[OD]\\ [AO]\equiv[OB]\\ \widehat{COB}\equiv\widehat{AOD}\end{cases} \overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta AOD\equiv\Delta BOC \Rightarrow [AD]\equiv[BC]$ (1)

Similar, studiem ΔAOC şi ΔBOD: $\begin{cases}[AO]\equiv[OC]\\ [BO]\equiv[DB]\\ \widehat{COA}\equiv\widehat{BOD}\end{cases} \overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta AOC\equiv\Delta BOD \Rightarrow [AC]\equiv[BD]$ (2)

$\overset{(1)\text{şi}(2)}{\Rightarrow}$ ACBD e paralelogram.

Cum $m\left(\widehat{ADB}\right)=m\left(\widehat{ACB}\right)=90^\circ$, deoarece DO şi CO sunt mediane $\Rightarrow$ACBD este dreptunghi.

2. Fie [AB] un diametru în cercul $\mathcal{C}(O;18\text{cm})$. Coarda [CD] intersectează diametrul în punctul M. calculaţi distanţa de la O la CD ştiind că $CD\perp AB$ şi $m\left(\widehat{CBD}\right)=120^\circ$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.136*.

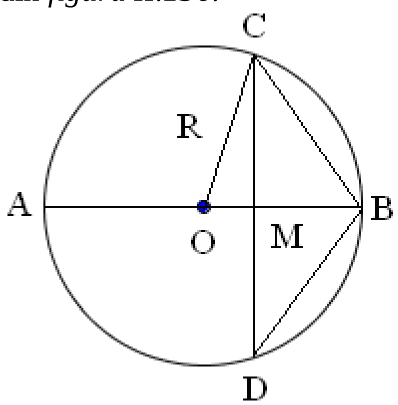


Figura II.136. Desenul problemei 2 (D.II.7)

$\Delta BCD-\text{isoscel}\Rightarrow m\left(\widehat{BCD}\right)=m\left(\widehat{BDC}\right)=30^\circ$. Notăm MB=x, rezultă BC=2x şi aplicăm teorema lui Pitagora în ΔBMC dreptunghic: $CM^2=4x^2-x^2=3x^2\Rightarrow CM=x\sqrt{3}$.

Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔCOM dreptunghic:

$$\left(x\sqrt{3}\right)^2 + (R - x)^2 = R^2 \Rightarrow 3x^2 + R^2 - 2Rx + x^2 = R^2 \Rightarrow 4x^2 = 2Rx \Rightarrow x = \frac{R}{2}$$

$$OM = R - x = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} = \frac{18}{2} = 9\,cm.$$

3. Dimensiunile unui dreptunghi sunt invers proporţionale cu numerele 0,(6), respectiv 0,5. Ştiind că aria acestuia este de 108 cm^2, determinaţi raza cercului circumscris dreptunghiului.
Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.137.*

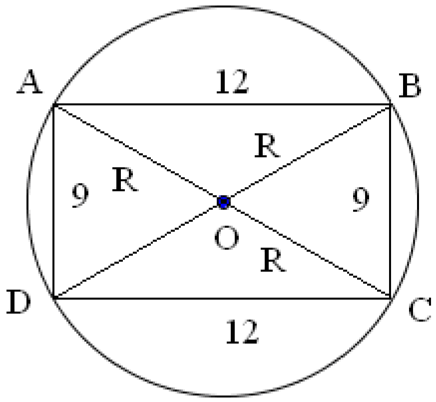


Figura II.137. Desenul problemei 3 (D.II.7)

Notăm: AD = BC = a, AB = DC = b

$$\frac{a}{\frac{1}{0,(6)}} = \frac{b}{\frac{1}{0,5}} \Rightarrow \frac{a}{\frac{3}{2}} = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot a = \frac{b}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}\cdot b$$

$$A = a\cdot b = \frac{3}{4}\cdot b\cdot b = \frac{3}{4}\cdot b^2 = 108 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = 12\,cm \Rightarrow a = 9\,cm$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔABC : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 225 \Rightarrow AC = 15\,cm \Rightarrow$

$$\Rightarrow AO = OC = R = \frac{AC}{2} = 7{,}5\,cm.$$

4. În cercul $C(O;r)$ se consideră diametrul [AB] şi M un punct pe cerc. Dreapta AM intersectează în C tangenta în B la cerc. Arătaţi că $BC^2 = AC\cdot MC$.
Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.138.*

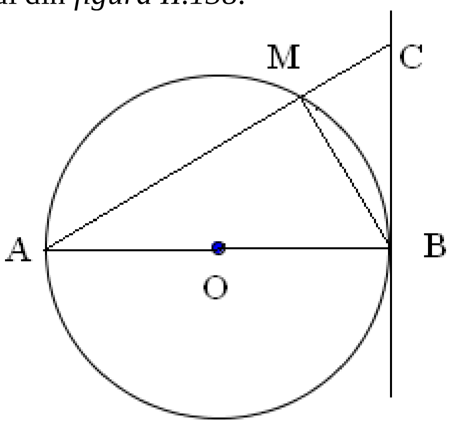


Figura II.138. Desenul problemei 4 (D.II.7)

Deoarece [AB] este diametru, rezultă că $m\left(\widehat{AMB}\right) = 90^\circ$.

Aplicând teorema catetei în $\Delta ABC \Rightarrow BC^2 = AC\cdot MC$

5. Fie cercurile $C_1(O_1;8cm)$ şi $C_2(O_2;4cm)$. Determinaţi lungimea tangentei comune exterioare, ştiind că $O_1O_2 = 12cm$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.139*, din enunţ reieşind faptul că cercurile sunt tangente exterior.

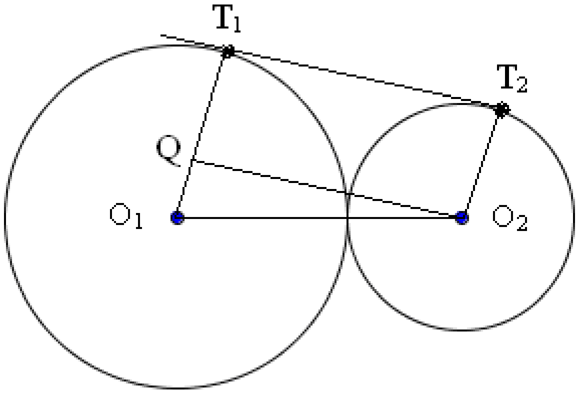


Figura II.139. Desenul problemei 5 (D.II.7)

$m\left(\widehat{O_1T_1T_2}\right) = m\left(\widehat{O_2T_2T_1}\right) = 90^\circ$. Trasăm $QO_2 \parallel T_1T_2 \Rightarrow QO_2 \perp QT_1$.

Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔO_1QO_2 : $QO_2{}^2 = O_1O_2{}^2 - O_1Q^2 = 12^2 - (8-4) = 128 \Rightarrow$

$\Rightarrow QO_2 = T_1T_2 = 8\sqrt{2}\,cm$.

6. Fie cercurile tangente exterioare $C_1(O_1;10cm)$ şi $C_2(O_2;x\,cm)$. Determinaţi $x \in R$, ştiind că lungimea tangentei comune exterioare este de $10\sqrt{2}\,cm$.

Demonstraţie: Ne vom folosi de desenul din *figura II.139*.

Presupunem, în cazul de faţă: $O_1T_1 = 10cm$, $O_2T_2 = x\,cm \Rightarrow O_1O_2 = 10 + x;\ O_1Q = 10 - x$.

Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔO_1QO_2: $QO_1^2 + QO_2^2 = O_1O_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (10-x)^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2 = (10+x)^2 \Rightarrow 100 - 20x + x^2 + 200 = 100 + 20x + x^2 \Rightarrow 40x = 200 \Rightarrow x = 5$

7. Laturile trapezului isoscel ABCD, $AB \parallel DC$ sunt tangente la un cerc. Calculaţi raza cercului înscris în trapez, ştiind că $AB = 48cm,\ CD = 12cm$.

Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.140*.

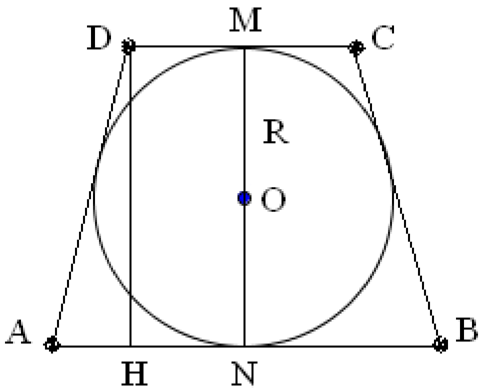


Figura II.140. Desenul problemei 7 (D.II.7)

Cum $AD + BC = AB + CD$ şi $[AD] \equiv [BC] \Rightarrow 2 \cdot AD = 60 \Rightarrow AD = 30cm$.

Trasăm $DH \perp AB \Rightarrow AH = (48-12) : 2 = 18cm$ şi aplicăm teorema lui Pitagora în ΔAHD :

$DH^2 = AD^2 - AH^2 = 30^2 - 18^2 = 24^2 \Rightarrow DH = 24cm \Rightarrow [DH] \equiv [MN] \Rightarrow R = \frac{MN}{2} = 12cm$.

$\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}_{2011\ \text{fa}}$

8. Determinaţi raza cercului în care este înscris un pătrat echivalent cu un triunghi echilateral de arie 36 cm^2.

Demonstraţie: Din enunţul problemei rezultă că: $A_3 = A_4 = 36cm^2$.

Cum $A_4 = l_4^2 = 36cm^2 \Rightarrow l_4 = 6cm$

Din $l_4 = R\sqrt{2} \Rightarrow 6 = R\sqrt{2} \Rightarrow R = 3\sqrt{2}\,cm$.

9. Calculaţi aria hexagonului regulat ABCDEF ştiind că $BD = 6\sqrt{3}$ cm.
Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.141*.

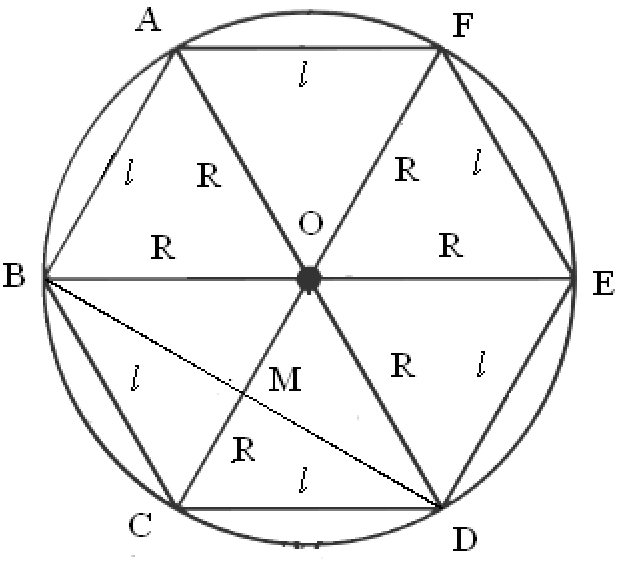


Figura II.141. Desenul problemei 9 (D.II.7)

ΔBOD este un triunghi isoscel cu $BO = DO = R$
OM este înălţime, mediană, dar şi bisectoare în triunghi, prin urmare $[MB] \equiv [MD]$ şi

$m\left(\widehat{BOM}\right) = m\left(\widehat{DOM}\right) = 60^\circ$.

$\sin 60^\circ = \frac{BM}{BO} = \frac{BM}{R} \Rightarrow$

$BM = \frac{BD}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,cm$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{R} \Rightarrow R = 6cm$.

$A_{ABCD} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}\ cm^2$

10. Trei cercuri de rază r = 5 cm sunt tangente exterior două câte două. Aflaţi aria suprafeţei situate între cele trei cercuri.
Demonstraţie: Construim desenul din *figura II.142*.

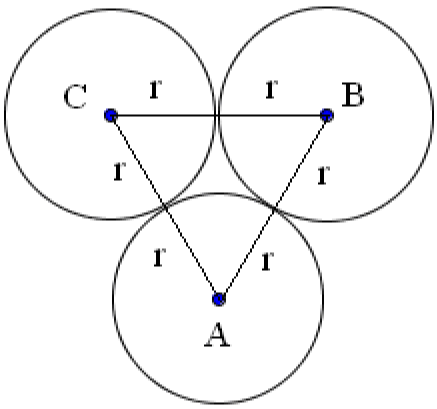


Figura II.142. Desenul problemei 10 (D.II.7)

Fie cele trei cercuri tangente exterior două câte două: $C_1(A;5cm)$, $C_2(B;5cm)$ şi $C_3(C;5cm)$.

A_{sector} = aria sectorului de cerc cuprins în interiorul $\widehat{BAC}$, care corespunde unui arc de 60°.

$A = A_{\Delta ABC} - 3\cdot A_{sector} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\frac{\pi r^2\cdot 60^\circ}{360^0} = \frac{75\sqrt{3}}{4} - \frac{75\pi}{6} = \frac{75\cdot\left(3\sqrt{3}-2\pi\right)}{12}cm^2$.