

Motto:

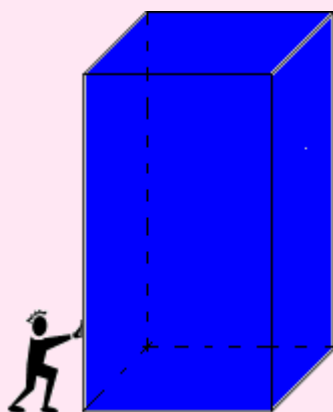
„Universul e un cerc cu centrul pretutindeni și circumferința nicăieri.”

Blaise Pascal

PARTEA a III-a



PROBLEME DE SINTEZĂ PENTRU CLASA A VIII-A



Din cuprins:

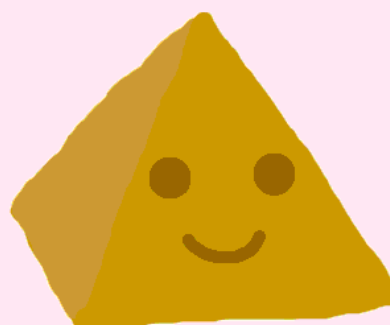
III.1. PROBLEME DATE LA EVALUĂRI, CONCURSURI, OLIMPIADE

III.2. PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICĂ

III.3. PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ȘCOLARE



$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc)$$



III. PROBLEME DE SINTEZĂ PENTRU CLASA A VIII-A

III.1. PROBLEME DATE LA EVALUĂRI, CONCURSURI, OLIMPIADE

1. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm mulțimea $A(n) = \{a \in \mathbb{N} \mid a + n \text{ divide } an\}$.

- Arătați că $A(2) = \{0; 2\}$.
- Arătați că, pentru orice număr natural nenul n , mulțimea $A(n)$ este finită.
- Determinați cel mai mic număr natural $n \neq 0$ pentru care mulțimea $A(n)$ are exact 5 elemente.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa I – 20.10.2012*

Rezolvare:

a) Dacă $a = 0$, atunci $a + 2$ divide $2a$.

Dacă $a > 0$, $a + 2$ este un divizor mai mare decât a al lui $2a$, deci $a + 2 = 2a \Leftrightarrow a = 2$

b) Dacă $a + n$ divide $an = n \cdot (n + a) - n^2$, atunci $a + n$ divide n^2 , iar $A(n) \subset \{0; 1; 2; \dots; n^2 - n\}$.

c) Deoarece divizorii lui n^2 diferiți de n se pot împărți în perechi $(d, n^2/d)$ cu $d < n < n^2/d$, numărul elementelor lui $A(n)$ este $(1+s)/2$, unde s este numărul divizorilor lui n^2 .

$A(n)$ are 5 elemente, dacă și numai dacă $n = p^4$ sau $n = pq$, unde $p \neq q$ sunt prime. Cel mai mic n este 6.

2. Trapezul ABCD are bazele $[AB]$ și $[CD]$, iar M este mijlocul diagonalei $[AC]$.

- Arătați că, dacă $AM = MB$, atunci trapezul este dreptunghic.
- Calculați DM în cazul $BC = CD = DA = 4$ și $AB = 8$.
- Arătați că, dacă ariile triunghiurilor ABM și ACD sunt egale, atunci $DM \parallel BC$.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa I – 20.10.2012*

Rezolvare: Construim desenul din figura III.1.

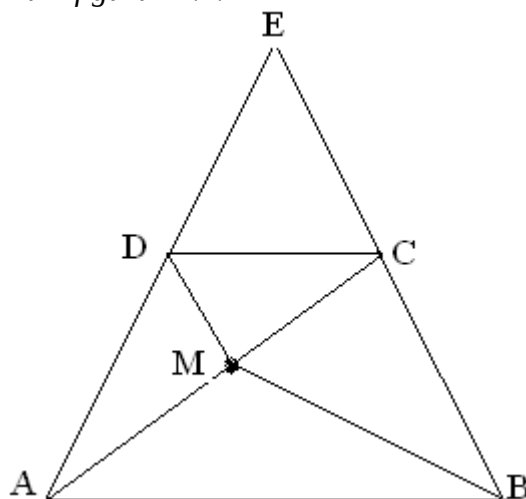


Figura III.1. Desenul problemei 2 (III.1)

a) În $\triangle ABC$, mediana BM este jumătate din AC. $\triangle ABC$ este dreptunghic.

b) $AB \parallel CD \xRightarrow{T.F.A} \triangle ABC \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{CM}{AC} = \frac{DM}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Din $\frac{DM}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow DM = 2$

c) $A_{\triangle ABC} = 2 \cdot A_{\triangle ABM}$

$AB = 2 \cdot CD$

Dacă $BC \cap AD = \{E\}$, atunci DM este linie mijlocie în $\triangle ACE$

3. Considerăm numărul $x = \sqrt{2} - 1$.

a) Arătați că numărul $x^2 + 2x$ este întreg.

b) Determinați numărul întreg a pentru care numărul $x^4 + ax$ este întreg.

c) Arătați că primele trei zecimale de după virgulă ale numărului x^{10} sunt zerouri.

Evaluare în educație la matematică

Etapa a II-a – 22.03.2013

Rezolvare:

a) $x^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$

$x^2 + 2x = 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 = 1 \in \mathbb{Z}$

b) $x^4 = (x^2)^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2 = 9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2}$

$x^4 + ax = 17 - 12\sqrt{2} + a\sqrt{2} - a = 17 - a + (a - 12) \cdot \sqrt{2}$

Pentru $(a - 12) \cdot \sqrt{2} = 0$, adică pentru $a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 12 \Rightarrow x^4 + ax \in \mathbb{Z}$

c) $0 < x < 0,5 \Leftrightarrow 0 < x^{10} < 0,5^{10}$

$0,5^{10} < 0,001 \Rightarrow$ cerința

4. Paralelipipedul dreptunghic ABCDEFGH are baza ABCD pătrat cu laturile de lungime 6 cm și muchiile laterale AE, BF, CG, DH cu lungimea de $3\sqrt{2}$ cm.

a) Arătați că piramida patrulateră cu baza ABCD și vârful în centrul feței EFGH este regulată.

b) Calculați distanța de la punctul E la dreapta BD.

c) Arătați că planele (AFH) și (BDG) sunt paralele și calculați distanța dintre ele.

Evaluare în educație la matematică

Etapa a II-a – 22.03.2013

Rezolvare: Construim desenul din figura III.2.

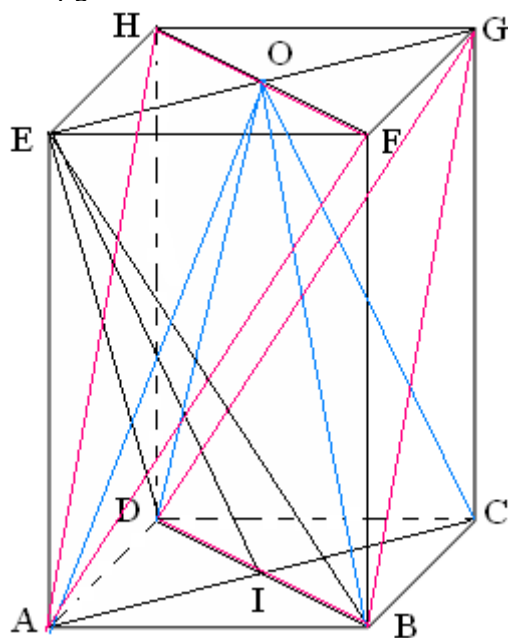


Figura III.2. Desenul problemei 4 (III.1)

a) Baza este pătrat. Muchiile laterale sunt congruente (sau piciorul perpendicularei este centrul bazei).

b) Distanța este EI, unde I este mijlocul segmentului [BD] $\Rightarrow$ EI înălțime și mediană: EB = ED, deoarece sunt diagonale în dreptunghiuri congruente.

$$\Delta ABE - \text{dreptunghic} \xrightarrow{\text{T.P.}} BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$BD = 6\sqrt{2} \text{ (diagonală în pătrat)} \Rightarrow ID = \frac{BD}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Delta EID - \text{dreptunghic} \xrightarrow{\text{T.P.}} EI = \sqrt{ED^2 - ID^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 \cdot (6 - 2)} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6 \text{ cm}$$

$$EI = 6 \text{ cm}$$

c) $AF \parallel DG, AH \parallel BG \Leftrightarrow (AFH) \parallel (BDG)$

Distanța d de la I la (AFH) este jumătate din EI; d = 3 cm

$$5. \text{ Pentru numerele reale distincte } x, y, z \text{ considerăm numărul } A = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$$

a) Calculați A în cazul $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}, z = 0$.

b) Arătați că, dacă $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ și z este număr rațional, atunci A este număr rațional.

c) Arătați că, dacă, x, y, z sunt numere raționale, atunci A este pătratul unui număr rațional.

Evaluare în educație la matematică

Etapa a III-a – 18.05.2013

Rezolvare:

$$a) A = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = \frac{1}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(-\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(-\sqrt{2})^2}$$

$$A = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

$$b) A = \frac{1}{8} + \frac{1}{(-z-\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(z-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{(z+\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(z-\sqrt{2})^2}$$

$$A = \frac{1}{8} + \frac{(z-\sqrt{2})^2 + (z+\sqrt{2})^2}{(z+\sqrt{2})^2 \cdot (z-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8} + \frac{z^2 - 2\sqrt{2}z + 2 + z^2 + 2\sqrt{2}z + 2}{(z^2 - 2)^2}$$

$$A = \frac{1}{8} + \frac{2z^2 + 4}{(z^2 - 2)^2} \in \mathbb{Q}$$

$$c) \text{ Notăm } \begin{cases} x - y = a \\ y - z = b, a, b, c \in \mathbb{Q}^* \\ z - x = c \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$A = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{(ab + ac + bc)^2 - 2abc \cdot (a + b + c)}{(abc)^2} = \frac{(ab + ac + bc)^2}{(abc)^2}$$

$$A = \left(\frac{ab + ac + bc}{abc} \right)^2$$

6. O construcție are formă de prismă dreaptă, cu bazele ABC și DEF triunghiuri echilaterale având laturile de lungime 2m și muchiile laterale [AD], [BE], [CF] de lungime 4m.

a) Calculați volumul construcției.

b) Calculați distanța de la punctul D la dreapta BC.

c) Un păianjen se află în punctul D și dorește să se deplaseze într-un punct oarecare de pe suprafața laterală a construcției. Arătați că păianjenul poate face acest lucru parcurgând o distanță de cel mult 5 m.

Evaluare în educație la matematică

Etapa a III-a – 18.05.2013

Rezolvare: Construim desenul din figura III.3.

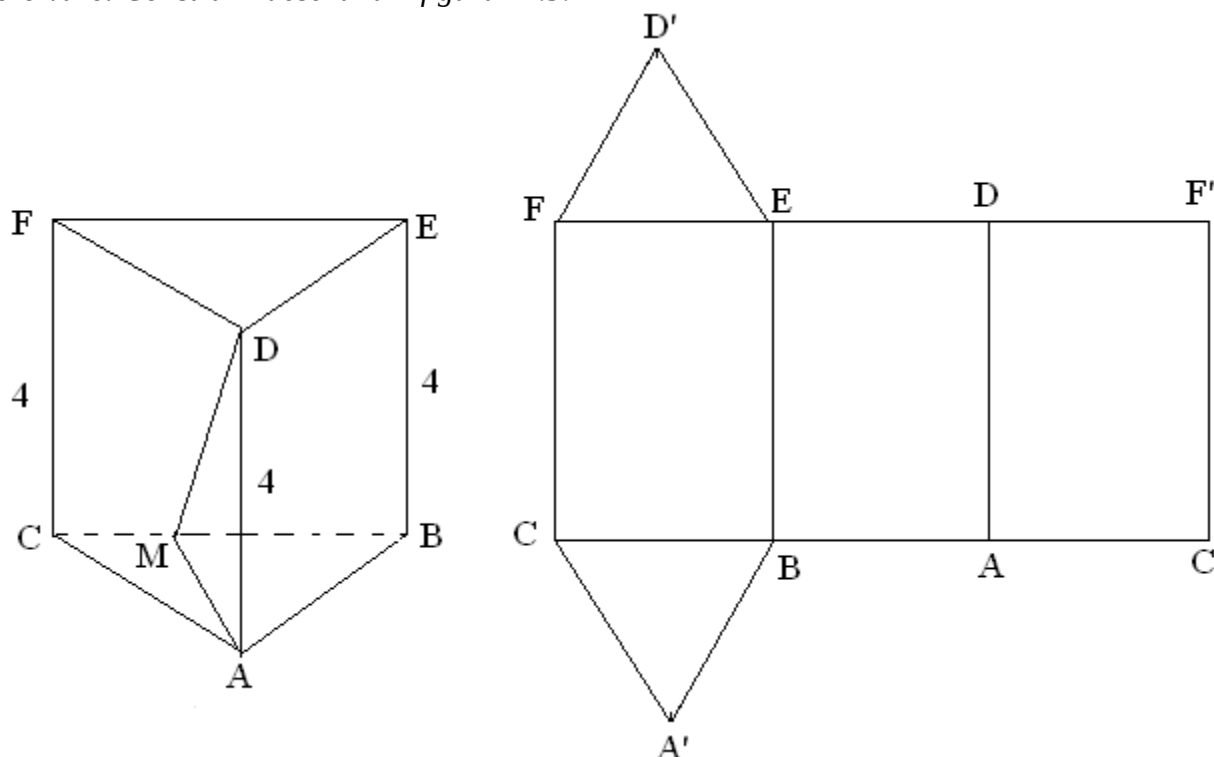


Figura III.3. Desenul problemei 6 (III.1)

a) $A_b = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ m}^2$, iar volumul este $V = A_b \cdot h = 4\sqrt{3} \text{ m}^3$

b) Distanța este DM, unde M este mijlocul lui [BC].

$$DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp AM \Rightarrow m\left(\widehat{DAM}\right) = 90^\circ$$

$$AM \text{ înălțime în } \triangle ABC \text{ dreptunghic} \Rightarrow AM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle DAM - \text{dreptunghic} \\ m\left(\widehat{A}\right) = 90^\circ \end{array} \right| \text{T.P.} \Rightarrow DM = \sqrt{DA^2 + AM^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19} \text{ m}$$

c) Dacă merge într-un punct al feței ABED sau ACFD, atunci distanța este cel mult $DB = DC = \sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$

Dacă merge într-un punct al feței BCFE, atunci pe desfășurarea suprafeței laterale a prisme are de parcurs (în funcție de locul de pe fața BCFE în care vrea să ajungă) cel mult distanța

$$\sqrt{AD^2 + (AB + BM)^2} = 5 \text{ sau } \sqrt{AD^2 + (AC + CM)^2} = 5$$

7. Se consideră mulțimea $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Arătați că $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \in A$ și $\sqrt{3000+2013\sqrt{2}} \notin A$.

*Evaluare în educație la matematică
Etapa competițională – 09.06.2013*

Rezolvare:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2} = a+b\sqrt{2}, \text{ cu } a=1 \in \mathbb{Z}, b=1 \in \mathbb{Z}, \text{ deci } \sqrt{3+2\sqrt{2}} \in A$$

Presupunem că $\sqrt{3000+2013\sqrt{2}} = a+b\sqrt{2}$, atunci $3000+2013\sqrt{2} = (a+b\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$$3000+2013\sqrt{2} = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 \Rightarrow 3000+2013\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$$

Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $2013-2ab \neq 0$, deci $(2013-2ab)\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 - 3000 \Rightarrow$

$$\sqrt{2} = \frac{a^2 + 2b^2 - 3000}{2013-2ab} \in \mathbb{Q} - \text{fals}$$

8. O piramidă are baza pătratul ABCD cu $AB = 2$ și muchiile laterale $SA = SB = SC = SD = \sqrt{3}$. Determinați măsura unghiului dintre planele (SBC) și (SAD).

*Evaluare în educație la matematică
Etapa competițională – 09.06.2013*

Rezolvare: Construim desenul din figura III.4.

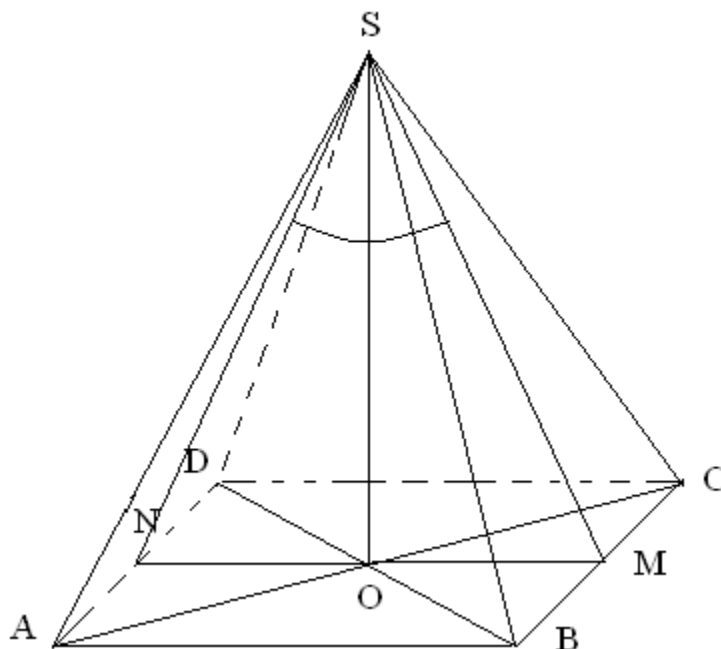


Figura III.4. Desenul problemei 8 (III.1)

Unghiul cerut este $\widehat{MSN}$, unde M și N sunt mijloacele muchiilor [BC], [AD].
[SM] $\equiv$ [SN] înălțimi în triunghiurile congruente SBC, respectiv SAD.

Cum $MC = \frac{1}{2} \cdot BC = 1$, iar $SC = \sqrt{3}$, aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle SMC$ dreptunghic în M:

$$SM = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$$

În $\triangle SOM$ dreptunghic în O, cu $OM = \frac{1}{2} \cdot AB = 1$, iar $SM = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{T.P.}} SO = \sqrt{2-1} = 1$

$$A_{SMN} = \frac{SO \cdot MN}{2} = \frac{SN \cdot MM \cdot \sin \widehat{MSN}}{2} \Rightarrow \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2 \cdot \sin \widehat{MSN}}{2} \Rightarrow \sin \widehat{MSN} = 1 \Rightarrow m(\widehat{MSN}) = 90^\circ$$

9. Să se afle $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\sqrt{\frac{2a-4}{a+5}} \in \mathbb{Z}$.

Fundația de evaluare în educație
Problema lunii octombrie 2012

Rezolvare:

$$\sqrt{\frac{2a-4}{a+5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (a+5) - 14}{a+5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (a+5)}{a+5} - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}}$$

$$\Rightarrow a+5 \in D_{\pm 14} = \{-14; -7; -2; -1; 1; 2; 7; 14\}$$

Situații posibile:

- $a+5 = -14 \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$
- $a+5 = -7 \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = -12 \in \mathbb{Z}$
- $a+5 = -2 \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = -7 \in \mathbb{Z}$
- $a+5 = -1 \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = -6 \in \mathbb{Z}$
- $a+5 = 1 \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{-12} \notin \mathbb{Z}$
- $a+5 = 2 \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{-5} \notin \mathbb{Z}$
- $a+5 = 7 \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{0} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{Z}$
- $a+5 = 14 \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{14}{a+5}} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 9$

Soluție: $a \in \{-12; -7; -6; 2; 9\}$

10. Rezultatul calculului $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2012}\right)$ este:

- A. $\frac{2013}{2}$ B. 2013 C. 1006 D. 2012 E. 2013^2

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2012}\right) = \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{2012}{2012} + \frac{1}{2012}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2013}{2012} = \frac{2013}{2} \quad (\text{A})$$

11. Rezolvând ecuația $y = 2x - \frac{5}{2}$ pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se obține soluția:

- A. $\left(\alpha, 2\alpha - \frac{5}{2}\right)$ B. $\emptyset$ C. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ D. $(0, 5)$ E. $(0, -5)$

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare: Se observă că pentru $x, y \in \mathbb{Z}$ ecuația nu are soluție, deoarece, de exemplu, pentru

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \notin \mathbf{Z} \Rightarrow (\text{B})$$

12. $AB \parallel CD$, $AB = 3$, $AO = x - 1$, $OD = 5$, $CD = x + 1$. $CD = ?$ (figura III.5)

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

E. 8

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

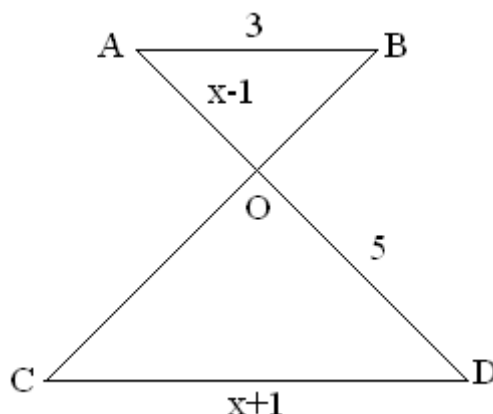


Figura III.5. Desenul problemei 12 (III.1)

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \text{ ipoteză} \\ BC - \text{secantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{ABO} \equiv \hat{DCO} - \text{alterne interne} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \text{ ipoteză} \\ AD - \text{secantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{BAO} \equiv \hat{CDO} - \text{alterne interne} \quad (2)$$

$$\text{Din relațiile (1) și (2)} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle DOC \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{DO} = \frac{BO}{OC} \Rightarrow \frac{3}{x+1} = \frac{x-1}{5} \Rightarrow$$

$$15 = (x+1) \cdot (x-1) \Rightarrow 15 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x \in \{\pm 4\} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow CD = x+1 = 5 \quad (\text{B})$$

13. $x^2 = 4$ și $y^2 = 16$. Cea mai mică valoare a diferenței $x-y$ este:

A. 6

B. 2

C. -6

D. -8

E. -20

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

$$x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = +2 \end{cases}, \text{ iar } y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = +4 \end{cases}$$

$$\text{Cea mai mică valoare a diferenței } x-y \text{ este } x_1 - (y_2) = -2 - 4 = -6 \Rightarrow (\text{C})$$

14. Fie $A(5^{2012})$ și $B(5^{2014})$ două puncte pe axa numerelor. Notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci coordonata punctului M este:

A. $5^{2012} \cdot 13$

B. 5^{2013}

C. $5^{2012} \cdot 12$

D. $5^{2013} \cdot 2$

E. alt răspuns

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

$$M = \frac{5^{2012} + 5^{2014}}{2} = \frac{5^{2012} \cdot (1 + 5^2)}{2} = \frac{5^{2012} \cdot 26}{2} = 5^{2012} \cdot 13 \quad (\text{A})$$

15. Suma numerelor raționale m și n ce verifică inegalitatea $|m\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + n\sqrt{2}| \leq 0$ este:

A. 2

B. 3

C. 5

D. 0

E. 6

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

$$(m\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) + (n\sqrt{2} - 6\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\text{Dar, } |(m\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) + (n\sqrt{2} - 6\sqrt{2})| \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0 & |: \sqrt{3} \\ n\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 0 & |: \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 4 = 0 \\ n - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$m + n = 2 \text{ (A)}$$

16. $\frac{A_{EKF}}{A_{AKB}} = ?$ (figura III.6)

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{27}$

D. $\frac{1}{8}$

E. $\frac{1}{16}$

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

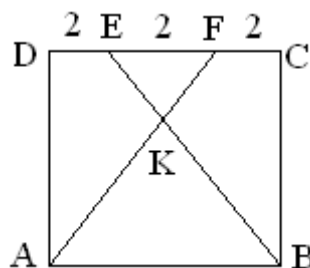


Figura III.6. Desenul problemei 16 (III.1)

$$EF \parallel AB \text{ (} DC \parallel AB, ABCD - \text{pătrat)} \Rightarrow \triangle EFK \sim \triangle BAK \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{EK}{BK} = \frac{FK}{AK} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{A_{EKF}}{A_{AKB}} = \left(\frac{EF}{AB} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} \quad (\text{B})$$

17. Aria $\triangle ABC = 18\sqrt{3}$

$$AB = 3\sqrt{3} \cdot 2^{n-1}, BC = 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n, AC = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Valoarea lui n este:

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

E. 0

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

$$\begin{cases} AB = 3\sqrt{3} \cdot 2^{n-1} \\ BC = 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n = 2^n \cdot (2^2 - 2 + 1) = 3 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{n-1} \cdot 2 \\ AC = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1} = 2^{n-1} \cdot (2^2 - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{n-1} \end{cases}$$

Notăm $AC = 3 \cdot 2^{n-1} = x \Rightarrow AB = \sqrt{3}x$ și $BC = 2x$. Rezultă că:

$$AB^2 = 3x^2, AC^2 = x^2, BC^2 = 4x^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4x^2 \Rightarrow \triangle ABC - \text{dreptunghic}$$

$$\begin{cases} A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \\ A_{\Delta ABC} = 18\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}x \cdot x}{2} \\ A_{\Delta ABC} = 18\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x \cdot x}{2} = 18\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x \in \{\pm 6\} \Rightarrow x = 6$$

și, revenind la notație, rezultă: $3 \cdot 2^{n-1} = 6 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^1 \Rightarrow n-1=1 \Rightarrow n=2$ (C)

18. Suma modulelor numerelor întregi x și y care verifică relația $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = x + y\sqrt{3}$ este:

A. 2

B. 1

C. 3

D. -1

E. -2

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = x + y\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = (x + y\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{3}+3) \Rightarrow \sqrt{3} = 2x\sqrt{3} + 3x + 6y + 3y\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} = (2x + 3y)\sqrt{3} + 3x + 6y \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y + 3y = 1 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$|x| + |y| = |2| + |-1| = 2 + 1 = 3 \quad (C)$$

19. DE, FG, BC sunt drepte paralele. DE = 3; FG = 6; AD = 4; BF = 2. BC=? (figura III.7)

A. $\frac{7}{4}$

B. $\frac{15}{2}$

C. 8

D. 9

E. $\frac{17}{2}$

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa locală, 15.11.2012

Rezolvare:

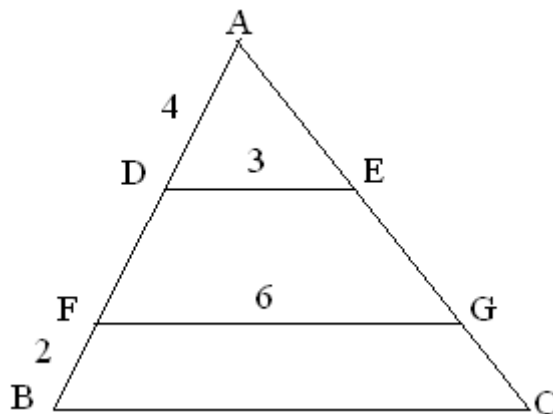


Figura III.7. Desenul problemei 19 (III.1)

$$DE \parallel FG \xRightarrow{T.F.A.} \Delta ADE \sim \Delta AFG \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{DE}{FG} = \frac{AE}{AG} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow AF = 8 \Rightarrow DF = AF - AD = 8 - 4 = 4 \Rightarrow AB = 10$$

$$BC \parallel DE \xRightarrow{T.F.A.} \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = \frac{15}{2} \quad (B)$$

20. Calculând inversul numărului $A = (\sqrt{2012} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2013} + \sqrt{2012})$ obținem:

- A. -1 B. 1 C. $\frac{1}{4025}$ D. $-\frac{1}{4025}$ E. $4025 - 2\sqrt{2012 \cdot 2013}$

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa națională, 15.12.2012

Rezolvare:

$$A = (\sqrt{2012} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2013} + \sqrt{2012}) = (\sqrt{2012} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2012} + \sqrt{2013}) = 2012 - 2013 = -1$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{-1} = -1 \quad (\text{A})$$

21. ABCD este un pătrat. EF = BG = 4 cm. CE ⊥ DF; DF ⊥ AG; AG ⊥ GB (figura III.8). Aria pătratului ABCD este:

- A. 80cm² B. 76cm² C. 72cm² D. 70cm² E. 48cm²

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa națională, 15.12.2012

Rezolvare:

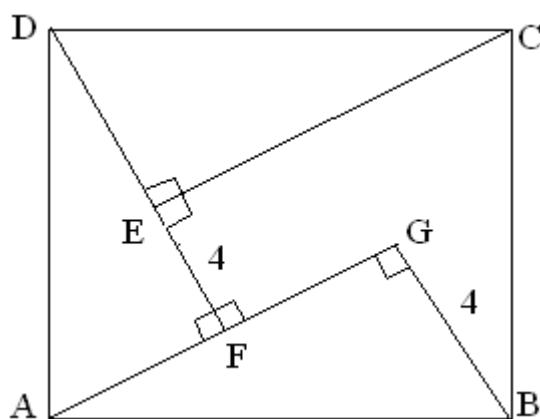


Figura III.8. Desenul problemei 21 (III.1)

$$\left. \begin{array}{l} CE \perp DF \\ AF \perp DF \end{array} \right\} \Rightarrow CE \parallel AF$$

$$\left. \begin{array}{l} CE \parallel AF \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow$$

pe baza faptului că unghiurile dintre două drepte paralele sunt congruente $\Rightarrow \hat{DCE} \equiv \hat{FAB}$

$$AF \subset AG \Rightarrow \hat{DCE} \equiv \hat{GAB}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{DCE} \equiv \hat{GAB} \\ AB \equiv CD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{IU} \\ \text{TP} \end{array} \Rightarrow \triangle ABG \equiv \triangle CDE \Rightarrow GB = DE = 4 \text{ cm}$$

$$DF = DE + EF = 4 + 4 = 8 \text{ cm}$$

$\triangle DFA$ – dreptunghi c

$$\left. \begin{array}{l} m(\hat{F}) = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{TP} \\ \text{TP} \end{array} \Rightarrow AD^2 = AF^2 + DF^2 \Rightarrow AD = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$A_{ABCD} = AD^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80 \text{ cm}^2 \quad (\text{A})$$

22. Determinați $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $\sqrt{6^2 + 8^2} - \sqrt{(6+8)^2} + |x - 2012| = -\sqrt{2}^2$.

A. 2010 și 2014 B. 2012 și -2010 C. 2010 și -2012 D. 2014 și 2012 E. 2012 și -2014

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa națională, 15.12.2012

Rezolvare:

$$\begin{aligned}\sqrt{6^2 + 8^2} - \sqrt{(6+8)^2} + |x - 2012| &= -\sqrt{2}^2 \Rightarrow \sqrt{100} - (6+8) + |x - 2012| = -2 \Rightarrow \\ 10 - 14 + |x - 2012| &= -2 \Rightarrow |x - 2012| = -2 + 4 \Rightarrow |x - 2012| = 2 \Rightarrow x - 2012 = \pm 2 \Rightarrow \\ x &\in \{2010, 2014\} \quad (\text{A})\end{aligned}$$

23. Valoarea numărului natural c din relația $5\sqrt{a} + 7\sqrt{b} = c\sqrt{2}$, unde a și b sunt numere naturale prime este:

A. 7 B. 11 C. 10 D. 12 E. 0

Concursul Național de Matematică Lumina Math
Ediția a XVI-a, Etapa națională, 15.12.2012

Rezolvare:

$$\begin{aligned}5\sqrt{a} + 7\sqrt{b} &= c\sqrt{2} \quad |: \sqrt{2} \Rightarrow c = 5\sqrt{\frac{a}{2}} + 7\sqrt{\frac{b}{2}} \\ c \in \mathbf{N} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 | a, 2 | b \\ a, b - \text{prime} \end{array} \right\} &\Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow c = 5 + 7 = 12 \quad (\text{D})\end{aligned}$$

24. Fie $a > 0$. Determinați numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_{2010}$ știind că

$$2a \cdot \left(\sqrt{x_1^2 - a^2} + \sqrt{x_2^2 - a^2} + \dots + \sqrt{x_{2010}^2 - a^2} \right) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2010}^2$$

Concursul Interjudețean de Matematică "Teodor Topan", 2012

Rezolvare: $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2010}^2 - 2a\sqrt{x_1^2 - a^2} - 2a\sqrt{x_2^2 - a^2} - 2a\sqrt{x_{2010}^2 - a^2} = 0$

Se observă că $x_1^2 - 2a\sqrt{x_1^2 - a^2} = \left(\sqrt{x_1^2 - a^2} - a \right)^2$

$$x_2^2 - 2a\sqrt{x_2^2 - a^2} = \left(\sqrt{x_2^2 - a^2} - a \right)^2$$

.....

$$x_{2010}^2 - 2a\sqrt{x_{2010}^2 - a^2} = \left(\sqrt{x_{2010}^2 - a^2} - a \right)^2$$

Rezultă că: $\left(\sqrt{x_1^2 - a^2} - a \right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 - a^2} - a \right)^2 + \dots + \left(\sqrt{x_{2010}^2 - a^2} - a \right)^2 = 0$

Egalitatea are loc dacă fiecare paranteză este egală cu 0:

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2 - a^2} - a = 0 \\ \sqrt{x_2^2 - a^2} - a = 0 \\ \dots \\ \sqrt{x_{2010}^2 - a^2} - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1^2 - a^2} = a \quad ()^2 \\ \sqrt{x_2^2 - a^2} = a \quad ()^2 \\ \dots \\ \sqrt{x_{2010}^2 - a^2} = a \quad ()^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - a^2 = a^2 \\ x_2^2 - a^2 = a^2 \\ \dots \\ x_{2010}^2 - a^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 2a^2 \\ x_2^2 = 2a^2 \\ \dots \\ x_{2010}^2 = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k = \pm a\sqrt{2}, \quad k = 1, 2, \dots, 2010$$

25. a) Determinați valoarea numărului real “x” pentru care raportul

$$E(x) = \frac{1}{x^2 - 4024x + 2013 \cdot 2012} \text{ are cea mai mare valoare și găsiți care este aceasta.}$$

b) Demonstrați că, dacă $x \cdot y \cdot z = 1$, atunci $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Bihor, 09.02.2013

Rezolvare:

$$\text{a) } E(x) = \frac{1}{x^2 - 4024x + 2013 \cdot 2012} = \frac{1}{x^2 - 4024x + 2012^2 + 2012} = \frac{1}{(x - 2012)^2 + 2012} > 0$$

$E(x)$ are cea mai mare valoare pentru cea mai mică valoare a numitorului, adică în cazul de față, pentru $(x - 2012)^2 = 0 \Rightarrow x - 2012 = 0 \Rightarrow x = 2012 \Rightarrow E(x)_{\max} = \frac{1}{2012}$.

b) Folosim că $x \cdot y \cdot z = 1$

$$\frac{1}{1+x+xy} = \frac{xyz}{xyz+x+xy} = \frac{xyz}{x \cdot (yz+1+y)} = \frac{yz}{1+y+yz}$$

$$\frac{1}{1+z+zx} = \frac{xyz}{xyz+z+zx} = \frac{xyz}{z \cdot (xy+1+x)} = \frac{xy}{1+x+xy} = \frac{xy}{xyz+x+xy} = \frac{xy}{x \cdot (1+y+yz)} = \frac{y}{1+y+yz}$$

Înlocuim cele două relații obținute în relația inițială și obținem:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{yz}{1+y+yz} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} = \frac{1+y+yz}{1+y+yz} = 1$$

26. a) Demonstrați că suma dintre un număr real pozitiv și inversul lui este mai mare sau egală cu 2. Când avem egalitate?

b) Se consideră două segmente distincte AB și CD în spațiu, astfel încât să fie adevărată relația:

$$\frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA} + \frac{DA}{DB} + \frac{DB}{DA} = 4. \text{ Demonstrați că } AB \perp CD.$$

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Bihor, 09.02.2013

Rezolvare: Construim desenul din figura III.9.

a) Fie $a \in \mathbb{R}_+$. Avem: $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 \geq 0$, relație adevărată.

Egalitate avem pentru: $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow a = 1$

b) Notăm: $\frac{CA}{CB} = a$, $\frac{DA}{DB} = b$, $a, b \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a} \right) + \left(b + \frac{1}{b} \right) = 4$

Conform punctului a) obținem:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 = 0.$$

Egalitatea are loc pentru:

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 0 \\ \sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \sqrt{b} = \frac{1}{\sqrt{b}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow CA = CB = DA = DB \Rightarrow ACBD - \text{romb} \Rightarrow AB \perp CD$$

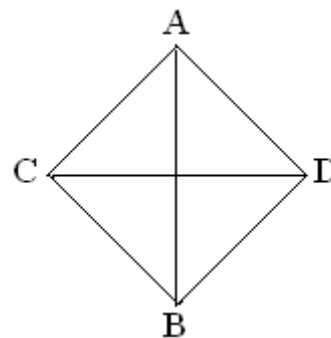


Figura III.9. Desenul problemei 26 (III.1)

27. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ se ridică perpendicular pe planul

triunghiului, pe care se ia $AM = 10\text{cm}$. Știind că $AB = 40\text{cm}$, $AC = 30\text{cm}$, să se calculeze:

a) aria ΔMBC ,

b) distanța de la punctul A la planul MBC.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală,
Bihor, 09.02.2013

Rezolvare:

a) Construim desenul din figura III.10.

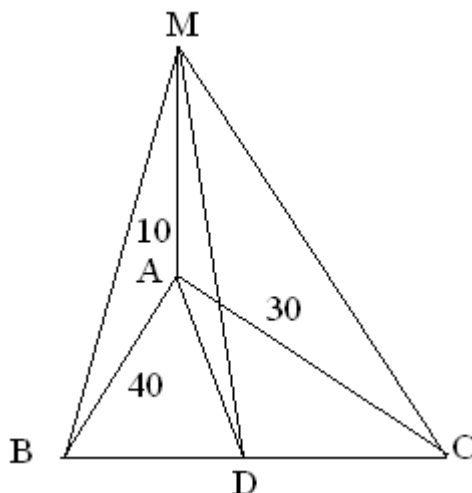


Figura III.10. Desenul problemei 27 (III.1)

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC - \text{dreptunghi c} \\ m(\hat{A}) = 90^\circ \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{T.P.} \\ \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50\text{cm} \end{array}$$

Ducem $AD \perp BC \Rightarrow d(A, \text{MBC}) = MD$

Aplicăm teorema înălțimii în ΔABC : $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24\text{cm}$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MAD:

$$MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26\text{cm}$$

$$A_{\Delta MBC} = \frac{BC \cdot MD}{2} = \frac{50 \cdot 26}{2} = 25 \cdot 26 = 650\text{cm}^2$$

b) Aflăm $d(A, \text{MBC}) = d$ cu formula volumului tetraedrului AMBC aplicat de două ori cu fețe și înălțimi diferite:

$$V_{AMBC} = \frac{A_{\Delta ABC} \cdot MA}{3} = \frac{A_{\Delta MBC} \cdot d}{3} \Rightarrow$$

$$d = \frac{A_{\Delta ABC} \cdot MA}{A_{\Delta MBC}} = \frac{\frac{30 \cdot 40}{2} \cdot 10}{650} = \frac{20 \cdot 30}{65} = 9,23\text{cm}^3$$

28. Determinați tripletele de numere întregi (x, y, z) cu proprietatea că
 $x^2 + y^2 + z^2 = 16 \cdot (x + y + z)$.

*Olimpiada Națională de Matematică,
 Etapa județeană și a Municipiului București, 09.03.2013*

Rezolvare:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \cdot (x + y + z) \Leftrightarrow (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-8)^2 = 192 \quad (*)$$

Dacă împărțim un pătrat perfect la 4 obținem fie restul 0, fie restul 1.

Numărul 192 este divizibil cu 4, deci numerele $x-8$, $y-8$, $z-8$ sunt pare; deci, rezultă că există $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$, astfel încât:

$$\begin{cases} x-8 = 2a_1 \\ y-8 = 2b_1 \\ z-8 = 2c_1 \end{cases} \Rightarrow \text{înlocuind în ecuația (*) că } 4a_1^2 + 4b_1^2 + 4c_1^2 = 192 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 48 \quad (**)$$

Repetând acest raționament de două ori, obținem:

$$\begin{cases} a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z} \\ a_1 = 2a_2 \\ b_1 = 2b_2 \\ c_1 = 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \text{înlocuind în ecuația (**) că } 4a_2^2 + 4b_2^2 + 4c_2^2 = 48 \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 12 \quad (***)$$

$$\begin{cases} a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{Z} \\ a_2 = 2a_3 \\ b_2 = 2b_3 \\ c_2 = 2c_3 \end{cases} \Rightarrow \text{înlocuind în ecuația (***) că } 4a_3^2 + 4b_3^2 + 4c_3^2 = 12 \Rightarrow a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 3 \quad (****)$$

Egalitatea (****) este adevărată, dacă fiecare din numerele a_3, b_3, c_3 , ia, la întâmplare una din valorile $\{-1, 1\}$, astfel:

- pentru $\begin{cases} a_3 = -1 \\ b_3 = -1 \\ c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -2 \\ b_2 = -2 \\ c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ b_1 = -4 \\ c_1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-8 = 2a_1 = -8 \\ y-8 = 2b_1 = -8 \\ z-8 = 2c_1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$
- pentru $\begin{cases} a_3 = -1 \\ b_3 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -2 \\ b_2 = -2 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ b_1 = -4 \\ c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-8 = 2a_1 = -8 \\ y-8 = 2b_1 = -8 \\ z-8 = 2c_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 16 \end{cases},$
- pentru $\begin{cases} a_3 = -1 \\ b_3 = 1 \\ c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -2 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ b_1 = 4 \\ c_1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-8 = 2a_1 = -8 \\ y-8 = 2b_1 = 8 \\ z-8 = 2c_1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 16 \\ z = 0 \end{cases},$
- pentru $\begin{cases} a_3 = 1 \\ b_3 = -1 \\ c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = -2 \\ c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = -4 \\ c_1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-8 = 2a_1 = 8 \\ y-8 = 2b_1 = -8 \\ z-8 = 2c_1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$
- pentru $\begin{cases} a_3 = -1 \\ b_3 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -2 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ b_1 = 4 \\ c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-8 = 2a_1 = -8 \\ y-8 = 2b_1 = 8 \\ z-8 = 2c_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 16 \\ z = 16 \end{cases},$

- pentru $\begin{cases} a_3 = 1 \\ b_3 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = -2 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = -4 \\ c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 2a_1 = 8 \\ y - 8 = 2b_1 = -8 \\ z - 8 = 2c_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 0 \\ z = 16 \end{cases}$,
- pentru $\begin{cases} a_3 = 1 \\ b_3 = 1 \\ c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 4 \\ c_1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 2a_1 = 8 \\ y - 8 = 2b_1 = 8 \\ z - 8 = 2c_1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 16 \\ z = 0 \end{cases}$,
- pentru $\begin{cases} a_3 = 1 \\ b_3 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 4 \\ c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 2a_1 = 8 \\ y - 8 = 2b_1 = 8 \\ z - 8 = 2c_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 16 \\ z = 16 \end{cases}$.

Deci, soluțiile ecuației date sunt:

$$(x, y, z) \in \{(0,0,0); (0,0,16); (0,16,0); (16,0,0); (0,16,16); (16,0,16); (16,16,0); (16,16,16)\}$$

29. Determinați toate numerele reale x pentru care numărul $a = \frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ este întreg.

*Olimpiada Națională de Matematică,
Etapa județeană și a Municipiului București, 09.03.2013*

Rezolvare:

Arătăm că $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, $a = \frac{2x+1}{x^2+2x+3} \notin \mathbb{Z}$.

Presupunem că $\exists x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\frac{2x+1}{x^2+2x+3} \in \mathbb{Z}$; cum $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$, rezultă că:

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+2x+3} < -1 \\ \frac{2x+1}{x^2+2x+3} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 < -(x^2+2x+3) \Rightarrow (x-2)^2 < 0 \text{ imposibil} \\ 2x+1 > x^2+2x+3 \Rightarrow x^2+2 < 0 \text{ imposibil} \end{cases},$$

deci presupunerea făcută este falsă, ceea ce presupune că

$$\begin{cases} a = \frac{2x+1}{x^2+2x+3} \in [-1; 1] \\ a \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+2x+3} = -1 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ \frac{2x+1}{x^2+2x+3} = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{x^2+2x+3} = 1 \Rightarrow x^2+2 = 0 \Rightarrow \text{imposibil} \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{-2; -\frac{1}{2}\right\}$$

30. Considerăm numărul natural nenul fixat n . Determinați numerele naturale nenule $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$ cu proprietatea că $x_n \cdot x_{n+1} \leq 2 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

*Olimpiada Națională de Matematică,
Etapa județeană și a Municipiului București, 09.03.2013*

Rezolvare:

Observăm că

$$x_n \cdot x_{n+1} \leq 2 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq 2 \cdot (1 + 2 + \dots + x_n) = x_n \cdot (x_n + 1) \quad (1)$$

Rezultă că: $x_{n+1} \leq x_n + 1$

Cum x_n și x_{n+1} sunt numere naturale cu $x_n < x_{n+1}$, deducem că $x_{n+1} = x_n + 1$.

Astfel toate inegalitățile (1) se vor transforma în egalități.

Din $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 + 2 + \dots + x_n$ și $x_n \geq n \Rightarrow x_n = n$ și, apoi $x_k = k$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

III.2. PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICĂ

1. Se consideră numerele $B = \overbrace{b000\dots 0b}^{2n+1 \text{ ori}}$. Demonstrați că $\sqrt{B}$ este număr irațional.

Gazeta Matematică (GM) Nr. 6-7-8 / 2012

Rezolvare:

Demonstrăm că B nu este pătrat perfect.

$$B = b \cdot 10^{2n+2} + b = b \cdot (10^{2n+2} + 1), b \text{ este cifră}$$

$$u.c.(10^{2n+2} + 1) = 1 \Rightarrow 10^{2n+2} + 1 \text{ nu este divizibil cu } 2, 4, 6, 8, 5.$$

Suma cifrelor numărului $10^{2n+2} + 1$ este 2 $\Rightarrow 10^{2n+2} + 1$ nu este divizibil cu 3 și cu 9.

Arătăm că $10^{2n+2} + 1$ nu este divizibil nici cu 7.

Dacă $10^{2n+2} + 1$ ar fi divizibil cu 7, atunci singura posibilitate ar fi $7 \cdot N$, unde $u.c.(N) = 3$, deoarece $u.c.(7 \cdot 3) = 1$.

Dar N ar trebui să fie pătrat perfect și știm că $u.c.$ a unui pătrat perfect $\notin \{2, 3, 7, 8\}$.

Rezultă că în descompunerea $b \cdot (10^{2n+2} + 1)$, factorul $10^{2n+2} + 1$ nu este divizibil cu cifra $b \Rightarrow$ nu poate fi scris $b \cdot \text{pătrat perfect} \Rightarrow B$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{B}$ nu este număr rațional.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale, ecuația:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x} = \sqrt{\frac{2x^2 + x + 2}{2}}$$

GM Nr. 6-7-8 / 2012

Rezolvare:

Aplicăm formula radicalilor compuși:

$$a = x^2 + x + 1$$

$$b = 2x^3 + x^2 + 2x$$

$$c^2 = a^2 - b = (x^2 + x + 1)^2 - (2x^3 + x^2 + 2x) = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 2x^3 - x^2 - 2x$$

$$c^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

$$c = x^2 + 1$$

Obținem:

$$\sqrt{\frac{x^2 + x + 1 + x^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + x + 1 - x^2 - 1}{2}} = \sqrt{\frac{2x^2 + x + 2}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2x^2 + x + 2}{2}} + \sqrt{\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{2x^2 + x + 2}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2}} = 0 \mid ()^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

3. Rezolvați ecuația: $(x^2 - x - 2)^3 + (x^2 + x + 2)^3 = (2x^2)^3$.

GM Nr. 6-7-8 / 2012

Rezolvare:

Notăm

$$x^2 = a \quad \text{și} \quad x + 2 = b$$

$$(a - b)^3 + (a + b)^3 = (2a)^3 \Rightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 8a^3 \Rightarrow$$

$$6ab^2 = 6a^3 \mid :6 \Rightarrow ab^2 = a^3 \Rightarrow a^3 - ab^2 = 0 \Rightarrow a \cdot (a^2 - b^2) = 0$$

$$a \cdot (a - b) \cdot (a + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{I. } a = 0 & \text{sau} \\ \text{II. } a - b = 0 \Rightarrow a = b & \text{sau} \\ \text{III. } a + b = 0 \Rightarrow a = -b \end{cases}$$

$$\text{I. } a = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{II. } a = b \Rightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 1) - 2 \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = +2$$

$$\text{III. } a = -b \Rightarrow x^2 = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

$$\text{Soluția: } S = \{0; -1; 2\}$$

4. Arătați că, pentru orice x, y, z numere reale,

$$\sqrt{5x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2xy - 4xz + 10} \geq 3$$

GM Supliment - septembrie 2012

Rezolvare:

Punem în evidență sub radical o sumă de expresii pozitive:

$$\sqrt{5x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2xy - 4xz + 10} =$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y) + (4x^2 - 4xz + z^2) + 9} = \sqrt{(x + y + 1)^2 + (2x - z)^2 + 9} \geq 3$$

deoarece $(x + y + 1)^2 \geq 0$ și $(2x - z)^2 \geq 0$.

5. Fie n un număr natural și $A = \sqrt{n^2 + 3n + 2}$. Aflați partea întreagă a lui A .

GM Supliment - septembrie 2012

Rezolvare:

Notăm partea întreagă a numărului A cu $[A]$.

Știm că $a \leq [A] \leq a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{n^2 + 3n + 2} > 0 \Rightarrow A > 0 \Rightarrow [A] \in \mathbb{N}$$

$$A^2 = n^2 + 3n + 2 = n^2 + 2n + n + 2 = n \cdot (n + 2) + (n + 2) = (n + 1) \cdot (n + 2) \text{ produs de două numere}$$

naturale consecutive $\Rightarrow A^2$ nu este pătrat perfect.

$$(n + 1)^2 \leq (n + 1) \cdot (n + 2) \leq (n + 2)^2$$

$$n + 1 \leq \sqrt{(n + 1) \cdot (n + 2)} \leq n + 2$$

$$n + 1 \leq A \leq n + 2 \Rightarrow [A] = n + 1$$

6. a) Arătați că $(a - 1) \cdot (a - 2) \cdot (a - 3) = a^3 - 6a^2 + 11a - 6$, pentru orice a număr real.

b) Arătați că nu există numere întregi n pentru care: $n(n^2 - 6n + 11) = 2012$

GM Supliment - septembrie 2012

Rezolvare:

a) Efectuăm calculele:

$$\begin{aligned} (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot (a - 3) &= (a^2 - 2a - a + 2) \cdot (a - 3) = (a^2 - 3a + 2) \cdot (a - 3) = \\ &= a^3 - 3a^2 - 3a^2 + 9a + 2a - 6 = a^3 - 6a^2 + 11a - 6 \end{aligned}$$

$$\text{b) } n(n^2 - 6n + 11) = n^3 - 6n^2 + 11n = 2012$$

Din punctul a) știm că $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$
 $2012 - 6 = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \Rightarrow 2006 = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$ "F"
 deoarece $2006 = 2 \cdot 1003 \Rightarrow$ nu există $n \in \mathbb{Z}$

7. Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ și $BC' \cap CB' = \{O\}$, $AD' \cap DA' = \{O'\}$. Dacă $A'O \cap B'O' = \{P\}$ și $AB = 6\text{cm}$ calculați distanța de la punctul P la planul $(A'B'C')$.

GM Supliment - septembrie 2012

Rezolvare: Construim desenul din figura III.11.

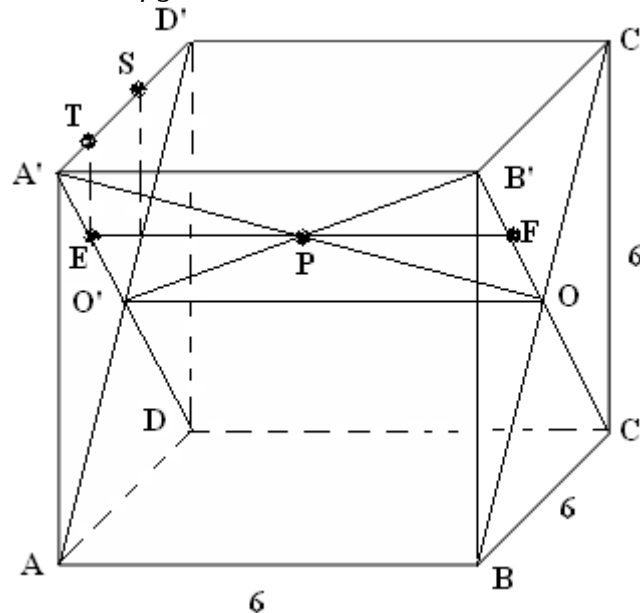


Figura III.11. Desenul problemei 7 (III.2)

Ducem prin punctul P $EF \parallel A'B'$.

$E \in A'O'$, $F \in B'O$

Toate punctele de pe această paralelă vor fi la aceeași distanță față de planul $(A'B'C')$.

$A'B'OO'$ dreptunghi $\Rightarrow$ P centrul dreptunghiului $\Rightarrow A'E = EO'$.

Construim ET și $O'S$ perpendiculare pe $A'D' \Rightarrow ET \parallel O'S \Rightarrow$

ET este linie mijlocie în $\triangle A'O'S$: $O'S = \frac{1}{2} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 6\text{cm} = 3\text{cm} \Rightarrow ET = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}\text{cm}$

$\Rightarrow d(P, (A'B'C')) = 1,5\text{cm}$

8. Fie $a > 0$ și $b > 0$ două numere reale. Demonstrați că $\frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+a} \leq \frac{1}{2}$.

GM Supliment - septembrie 2012

Rezolvare:

Efectuăm calculele și obținem o inegalitate "A" echivalentă cu inegalitatea dată.

$$\frac{3b+a}{3a+b} \cdot \frac{a}{3a+b} + \frac{3a+b}{3b+a} \cdot \frac{b}{3b+a} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a \cdot (3b+a) + b \cdot (3a+b)}{(3a+b) \cdot (3b+a)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3ab + a^2 + 3ab + b^2}{9ab + 3a^2 + 3b^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2 \cdot (3ab + a^2 + 3ab + b^2) \leq 9ab + 3a^2 + 3b^2 + ab \Rightarrow$$

$$6ab + 2a^2 + 6ab + 2b^2 \leq 9ab + 3a^2 + 3b^2 + ab \Rightarrow$$

$$12ab + 2a^2 + 2b^2 \leq 10ab + 3a^2 + 3b^2 \Rightarrow$$

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ "A"} \Rightarrow \text{inegalitatea dată este adevărată}$$

9. Determinați aria triunghiului isoscel ABC, cu baza (BC) de 12 cm, știind că există un punct M în interiorul său, având distanțele de 4cm, 3cm și 2cm față de laturile (AB), (BC), respectiv (AC).

GM Supliment - septembrie 2012

Rezolvare: Construim desenul din figura III.12.

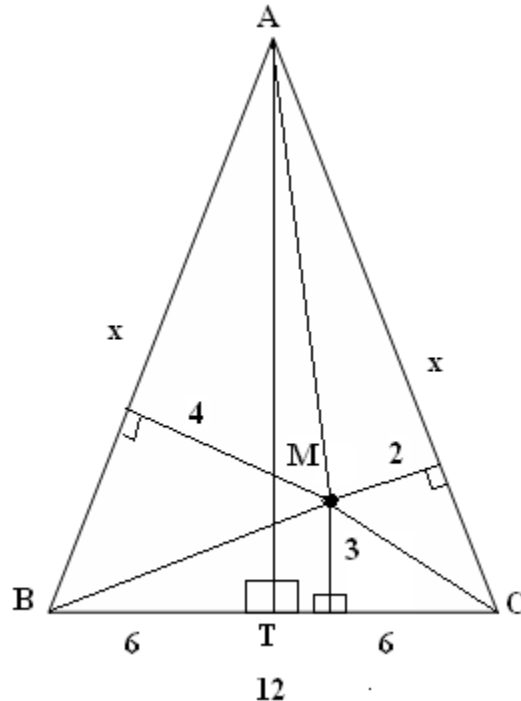


Figura III.12. Desenul problemei 9 (III.2)

Notăm $AB = AC = x$

$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle AMB} + A_{\triangle AMC} + A_{\triangle BMC} = \frac{4 \cdot x}{2} + \frac{2 \cdot x}{2} + \frac{3 \cdot 12}{2} = \frac{6 \cdot x + 36}{2} = 3 \cdot x + 18 \quad (1)$$

Fie AT înălțimea din A a triunghiului ABC.

$$\triangle ATB \text{ dreptunghic în } T \xrightarrow{\text{T.Pitagora}} AT = \sqrt{x^2 - 36}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{12 \cdot \sqrt{x^2 - 36}}{2} = 6 \cdot \sqrt{x^2 - 36} \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow 3 \cdot x + 18 = 6 \cdot \sqrt{x^2 - 36} \quad | :3$$

$$x + 6 = 2 \cdot \sqrt{x^2 - 36} \quad ()^2$$

$$x^2 + 12x + 36 = 4 \cdot (x^2 - 36) \Rightarrow x^2 + 12x + 36 = 4x^2 - 144$$

$$3x^2 - 12x - 180 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 4x - 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 6x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot (x - 10) + 6 \cdot (x - 10) = 0 \Rightarrow (x - 10) \cdot (x + 6) = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ sau } x = -6$$

Doar $x = 10$ cm convine, prin urmare $AT = \sqrt{x^2 - 36} = \sqrt{100 - 36} = 8$ cm $\Rightarrow$

$$(2) \text{ devine: } A_{\triangle ABC} = 6 \cdot \sqrt{x^2 - 36} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$$

$$\text{sau (1) devine: } A_{\triangle ABC} = 3 \cdot x + 18 = 3 \cdot 10 + 18 = 48 \text{ cm}^2$$

10. a) Arătați că $\frac{3x+11}{x+4} = 2 + \frac{x+3}{x+4}$;

b) Rezolvați ecuația: $\left\{ \frac{3x+11}{x+4} \right\} + \left[\frac{3x+8}{x+3} \right] = 2,9$,

unde $\{a\}$ înseamnă partea fracționară a lui a , iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .

GM Supliment - septembrie 2012

Rezolvare:

a) $\frac{3x+11}{x+4} = \frac{2 \cdot (x+4) + x+3}{x+4} = \frac{2 \cdot (x+4)}{x+4} + \frac{x+3}{x+4} = 2 + \frac{x+3}{x+4}$

b) Folosim demonstrația de la punctul a)

$$\left\{ \frac{3x+11}{x+4} \right\} = \left\{ 2 + \frac{x+3}{x+4} \right\} = \frac{x+3}{x+4} < 1$$

$$\frac{3x+8}{x+3} = \frac{2 \cdot (x+3) + x+2}{x+3} = \frac{2 \cdot (x+3)}{x+3} + \frac{x+2}{x+3} = 2 + \frac{x+2}{x+3} \Rightarrow \left[\frac{3x+8}{x+3} \right] = 2, \text{ deoarece } \frac{x+2}{x+3} < 1$$

Ecuația devine:

$$\frac{x+3}{x+4} + 2 = 2,9 \Rightarrow \frac{x+3}{x+4} = 0,9 \Rightarrow \frac{x+3}{x+4} = \frac{9}{10} \Rightarrow 10 \cdot (x+3) = 9 \cdot (x+4) \Rightarrow 10x + 30 = 9x + 36 \Rightarrow x = 6$$

11. Rezolvați ecuația:

$$\frac{x^3+1}{9} + \frac{x^3+2}{10} + \frac{x^3+3}{11} + \dots + \frac{x^3+1012}{1020} = 1012$$

GM Supliment - septembrie 2012

Rezolvare:

Scriem ecuația astfel:

$$\frac{x^3}{9} + \frac{1}{9} + \frac{x^3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{x^3}{11} + \frac{3}{11} + \dots + \frac{x^3}{1020} + \frac{1012}{1020} = 1012$$

$$x^3 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{1020} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{10} + \frac{3}{11} + \dots + \frac{1012}{1020} \right) = 1012$$

$$x^3 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{1020} \right) = 1012 - \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{10} + \frac{3}{11} + \dots + \frac{1012}{1020} \right)$$

$$x^3 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{1020} \right) = \left(1 - \frac{1}{9} \right) + \left(1 - \frac{2}{10} \right) + \left(1 - \frac{3}{11} \right) + \dots + \left(1 - \frac{1012}{1020} \right)$$

$$x^3 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{1020} \right) = \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \dots + \frac{8}{1020}$$

$$x^3 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{1020} \right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{1020} \right)$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

12. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$.

GM Nr. 9 / 2012

Rezolvare:

$$3x^2 - 1 = 2xy + y$$

$$3x^2 - 1 = y \cdot (2x + 1) \Rightarrow y = \frac{3x^2 - 1}{2x + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+1 \mid 3x^2-1 \\ 2x+1 \mid 2x+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+1 \mid 2 \cdot (3x^2-1) \\ 2x+1 \mid 3x \cdot (2x+1) \end{array} \right\} \Rightarrow 2x+1 \mid 2 \cdot (3x^2-1) - 3x \cdot (2x+1)$$

$$2x+1 \mid 6x^2-2-6x^2-3x$$

$$2x+1 \mid -3x-2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+1 \mid -3x-2 \\ 2x+1 \mid 2x+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+1 \mid 2 \cdot (-3x-2) \\ 2x+1 \mid 3 \cdot (2x+1) \end{array} \right\} \Rightarrow 2x+1 \mid 2 \cdot (-3x-2) + 3 \cdot (2x+1)$$

$$2x+1 \mid -6x-4+6x+3$$

$$2x+1 \mid -1$$

$$2x+1 \in \{1, -1\}$$

$$2x \in \{0, -2\}$$

$$x \in \{0, -1\}$$

$$x=0 \Rightarrow y = \frac{-1}{1} = -1$$

$$x=-1 \Rightarrow y = \frac{2}{-1} = -2$$

$$S = \{(0; -1), (-1; -2)\}$$

13. Pentru $a > 0$ și $b > 0$ notăm $G(a, b) = \sqrt{ab}$ (media geometrică), $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$ (media armonică). Arătați că $G(a, H(a, b)) \leq H(a, G(a, b))$.

GM Nr. 9 / 2012

Rezolvare:

$$G(a, H(a, b)) = \sqrt{a \cdot \frac{2ab}{a+b}} = \sqrt{\frac{2a^2b}{a+b}}$$

$$H(a, G(a, b)) = \frac{2a\sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}}$$

Demonstrăm că inegalitatea cerută este echivalentă cu o inegalitate adevărată.

$$\sqrt{\frac{2a^2b}{a+b}} \leq \frac{2a\sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} \quad | : (\sqrt{2a} \cdot \sqrt{ab})$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}} \leq \frac{\sqrt{2a}}{a + \sqrt{ab}} \Rightarrow a + \sqrt{ab} \leq \sqrt{2a} \cdot \sqrt{a+b} \quad | : \sqrt{2a}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2a}} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2a}} \leq \sqrt{a+b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2 \cdot (a+b)} \quad | ()^2$$

$$a+b+2\sqrt{ab} \leq 2 \cdot (a+b)$$

$$0 \leq a+b-2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ "A"} \Rightarrow$$

Inegalitatea dată este "A" (adevărată).

14. Fie AM mediana și AH înălțime în triunghiul ABC, dreptunghic în A și $HI \perp AB$, $I \in (AB)$. HI intersectează AM în T. Arătați că $\frac{AT}{TM} = \frac{2b^2}{c^2 - b^2}$.

GM Nr. 11 / 2012

Rezolvare: Construim desenul din figura III.13.

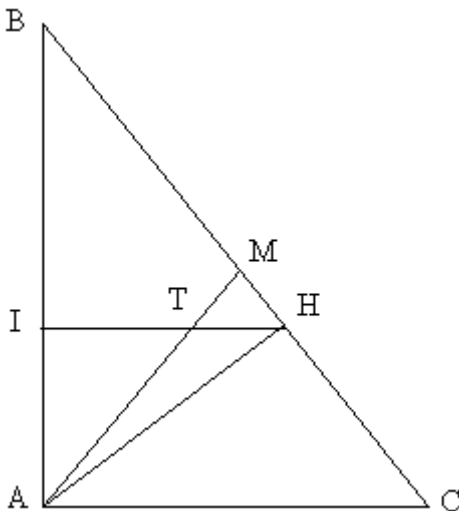


Figura III.13. Desenul problemei 14 (III.2)

În rezolvare folosim asemănarea, teorema catetei și teorema înălțimii.

Notăm $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$

$\triangle ABC \sim \triangle IAT$, deoarece $\angle ABH \equiv \angle TAI$, unghiul format de o mediană, AM cu o latură a triunghiului dreptunghic). De aici, $\Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AT}{BC} = \frac{IT}{AC} \Rightarrow AT = \frac{AI \cdot BC}{AB}$

$$\text{Dar } TM = AM - AT = \frac{BC}{2} - \frac{AI \cdot BC}{AB} = \frac{AB \cdot BC - 2 \cdot AI \cdot BC}{2 \cdot AB}$$

Pentru calculul lui AI folosim teorema catetei în $\triangle AHB \Rightarrow AH^2 = AI \cdot AB \Rightarrow AI = \frac{AH^2}{AB}$,

Dar AH este înălțime, deci aplicând teorema înălțimii în $\triangle ABC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{b \cdot c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow$

$$AI = \left(\frac{b \cdot c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{c} = \frac{b^2 \cdot c^2}{b^2 + c^2} \cdot \frac{1}{c} = \frac{b^2 \cdot c}{b^2 + c^2}$$

$$AT = \frac{b^2 \cdot c}{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{1}{c} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow TM = \frac{c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} - 2 \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{2 \cdot c} = \frac{c^2 - b^2}{2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{AT}{TM} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{c^2 - b^2} = \frac{2b^2}{c^2 - b^2},$$

relație adevărată doar pentru $c > b$.

15. Dacă $a, b, c > 0$, să se arate că:

$$\frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + (b+a)^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + (c+b)^2} \leq \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

GM Nr. 11 / 2012

Rezolvare: Folosim inegalitatea mediilor și 2 leme în rezolvarea problemei:

Lema 1: $(x+y)^2 \geq 4xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Lema 2: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Avem:

$$\left. \begin{array}{l} (a+b)^2 \geq 4ab \\ (a+c)^2 \geq 4ac \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} (a+b)^2 + (a+c)^2 \geq 4ab + 4ac = 4 \cdot (ab + ac) \geq 8\sqrt{a^2bc} = 8\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} \leq \frac{1}{8\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac}} = \frac{1}{8} uv, \text{ cu } u = \frac{1}{\sqrt{ab}}, v = \frac{1}{\sqrt{ac}} \quad (1)$$

În mod similar, avem:

$$\left. \begin{array}{l} (b+c)^2 \geq 4bc \\ (b+a)^2 \geq 4ab \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} (b+c)^2 + (b+a)^2 \geq 4bc + 4ab = 4 \cdot (bc + ab) \geq 8\sqrt{ab^2c} = 8\sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(b+c)^2 + (b+a)^2} \leq \frac{1}{8\sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc}} = \frac{1}{8} ut, \text{ cu } t = \frac{1}{\sqrt{bc}} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (c+a)^2 \geq 4ca \\ (c+b)^2 \geq 4bc \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} (c+a)^2 + (c+b)^2 \geq 4ca + 4bc = 4 \cdot (ca + bc) \geq 8\sqrt{abc^2} = 8\sqrt{ac} \cdot \sqrt{bc} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(c+a)^2 + (c+b)^2} \leq \frac{1}{8\sqrt{ac} \cdot \sqrt{bc}} = \frac{1}{8} vt \quad (3)$$

Adunând membru cu membru cele 3 relații și aplicând cele 2 leme, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + (b+a)^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + (c+b)^2} &\leq \frac{1}{8} \cdot (uv + ut + vt) \leq \frac{1}{8} \cdot (u^2 + v^2 + t^2) \\ \frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + (b+a)^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + (c+b)^2} &\leq \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) \leq \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \end{aligned}$$

16. În patrulaterul convex ABCD se construiește mediatoarea lui [BC] care intersectează pe [AD] în M. Dacă $\angle BMC = 60^\circ$, $MB \parallel CD$, $CM \parallel AB$ să se determine măsura unghiului ascuțit format de diagonalele patrulaterului.

GM Nr. 11 / 2012

Rezolvare: Construim desenul din figura III.14.

Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Avem de aflat $\angle AOB$.

$$\text{Din } \left\{ \begin{array}{l} [BM] \equiv [MC] \\ MN - \text{mediatoare} \\ \angle AMB \equiv \angle MDC, \angle ABM \equiv \angle MCD \end{array} \right.$$

$$\text{avem } \triangle ABM \sim \triangle MCD \Rightarrow \frac{AB}{MC} = \frac{AM}{MD} = \frac{MB}{CD} \quad (*)$$

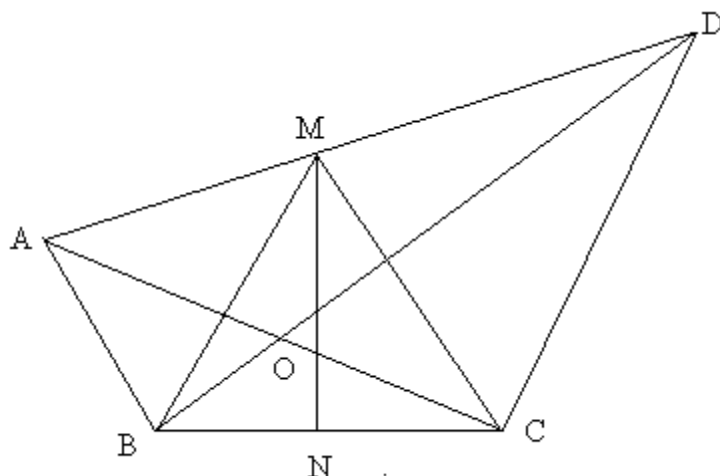


Figura III.14. Desenul problemei 16 (III.2)

Cum $\triangle MBC$ este echilateral (un isoscel cu $\angle BMC = 60^\circ$), prin înlocuirea în (*) a lui $MC=MB=BC$ găsim: $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$ (**).

Dar, acum folosind (**) găsim $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ și cum $\angle ABM = \angle MCD \Rightarrow \angle ABM + 60^\circ = \angle MCD + 60^\circ$
 $\Rightarrow \angle ABC = \angle BCD$.

Din asemănare $\Rightarrow \angle BAC = \angle CBD \Rightarrow \angle BAC + \angle ABO = \angle CBD + \angle ABO = \angle ABC = 120^\circ$ ($\angle ABC$ și $\angle MCB$ sunt unghiuri de aceeași parte a secantei BC ce taie $AB \parallel MC$; mai mult $\angle BMC = 60^\circ$).

În $\triangle AOB$ avem $\angle BAO + \angle ABO + \angle AOB = 180^\circ$, iar cum $\angle BAO + \angle ABO = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$

17. Determinați numerele reale distincte x și y pentru care numerele $\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}, \frac{2xy}{x+y}$ sunt numere întregi, două dintre ele fiind consecutive.

GM Nr. 11 / 2012

Rezolvare: Din condiția $xy \geq 0$ a radicalului avem următoarele situații:

1. $x, y > 0, x \neq y$ rezultă că ordonarea este cea cunoscută la inegalitatea mediilor:

$$\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} \quad (*)$$

Cum două dintre numerele din șirul (*) sunt întregi consecutive avem subcazurile:

1a) $\frac{2xy}{x+y} = n, \sqrt{xy} = n+1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow xy = (n+1)^2, x+y = \frac{2 \cdot (n+1)^2}{n}$

Dar $\frac{x+y}{2} = \frac{(n+1)^2}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n^2 + 2n + 1}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 2 + \frac{1}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ soluția unică $n=1$

Înlocuind în relațiile inițiale din 1a) $\Rightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ x+y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ x = 8-y \end{cases} \Rightarrow y^2 - 8y + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 64 - 16 = 48 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 + 2\sqrt{3} \\ y_2 = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 2\sqrt{3} \\ x_2 = 4 + 2\sqrt{3} \end{cases}$

$$1b) \begin{cases} \sqrt{xy} = n \\ \frac{x+y}{2} = n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = n^2 \\ x+y = 2 \cdot (n+1) \end{cases};$$

$$\text{Cum } \frac{2xy}{x+y} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2n^2}{2 \cdot (n+1)} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n^2}{n+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow n-1 + \frac{1}{n+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 | 1 \Rightarrow n=0 \text{ imposibil.}$$

2. $x, y < 0, x \neq y$ rezultă că ordonarea:

$$\frac{x+y}{2} < \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} \quad (**)$$

Analizăm situațiile:

$$2a) \frac{x+y}{2} = n, \frac{2xy}{x+y} = n+1, n > 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2n \\ xy = n \cdot (n+1) \end{cases} \Rightarrow \text{nu e pătrat perfect fiind produsul a}$$

doi întregi consecutivi, doar când produsul e zero, deci pentru $n = 0$ sau $n = -1$, cazuri care nu convin, deoarece x sau $y = 0$.

$$2b) \begin{cases} \frac{2xy}{x+y} = n, n < 0, n \in \mathbb{N} \\ \sqrt{xy} = n+1 \end{cases} \Rightarrow n+1 \geq 0 \Rightarrow n = -1 \text{ imposibil}$$

3. $x \cdot y = 0, x \neq y$

Dacă $x = 0 \Rightarrow y = \pm 2$, iar dacă $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

Soluția finală: $(x, y) = \{(-2, 0); (4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}); (0, 2); (0, -2); (2, 0); (4 + 2\sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3})\}$

18. Fie x, y, z numere reale astfel încât $\frac{xyz}{x+y} = -1, \frac{xyz}{y+z} = 1, \frac{xyz}{z+x} = a, a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R}$.

Determinați produsul xyz .

GM Nr. 11 / 2012

Rezolvare:

Substituim $xyz = p, p \neq 0$ și obținem:

$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = -1 \\ \frac{xyz}{y+z} = 1 \\ \frac{xyz}{z+x} = a \\ a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{x+y} = -1 \\ \frac{p}{y+z} = 1 \\ \frac{p}{z+x} = a \\ a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = -p \\ y+z = p \\ z+x = \frac{p}{a} \\ a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x+y+z = \frac{p}{2a} \\ a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = p + \frac{p}{2a} = \frac{p \cdot (1+2a)}{2a} \\ x = \frac{p}{2a} - p = \frac{p \cdot (1-2a)}{2a} \\ y = \frac{p}{2a} - \frac{p}{a} = -\frac{p}{2a} \\ a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xyz = \frac{p \cdot (1-2a)}{2a} \cdot \left(-\frac{p}{2a}\right) \cdot \frac{p \cdot (1+2a)}{2a} = \frac{p^3 \cdot (4a^2 - 1)}{8a^3} \\ a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{p^3 \cdot (4a^2 - 1)}{8a^3} \\ a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = \frac{8a^3}{4a^2 - 1} \\ a > \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = xyz = \pm \sqrt{\frac{8a^3}{4a^2 - 1}} \Rightarrow xyz \in \left\{ -\frac{2a\sqrt{2a}}{\sqrt{4a^2 - 1}}; \frac{2a\sqrt{2a}}{\sqrt{4a^2 - 1}} \right\}$$

19. Un triunghi are laturile congruente cu înălțimile altui triunghi. Știind că cele două triunghiuri sunt asemenea, arătați că, în fiecare dintre ele, o latură este media geometrică a celorlalte două.

GM Nr. 12 / 2012

Rezolvare: Construim desenul din figura III.15.

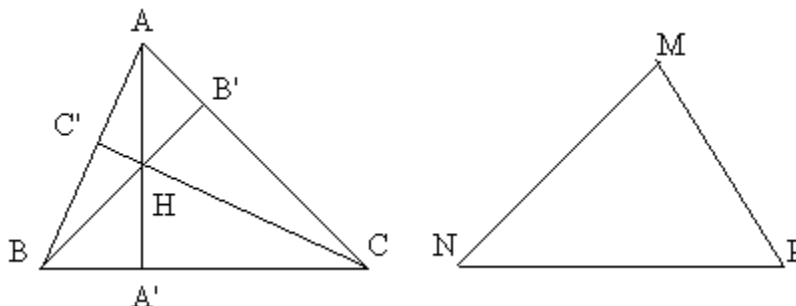


Figura III.15. Desenul problemei 19 (III.2)

Construim $\triangle MNP$, astfel încât $MN = CC'$, $NP = AA'$, $MP = BB'$.

Din ipoteză avem $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = k$. (1)

Pe de altă parte, ținând cont că MN , NP , MP sunt înălțimi, avem:

$$AB \cdot MN = BC \cdot NP = AC \cdot MP = 2S, \quad (2)$$

unde S este aria triunghiului în care MN , NP , MP sunt înălțimi

Din (1) avem: $AB = \frac{MN}{k}$, iar din (2) găsim: $AB = \frac{2S}{MN} \Rightarrow MN = \sqrt{2kS}$.

În mod similar, găsim: $NP = \sqrt{2kS}$, $MP = \sqrt{2kS}$

$$MN^2 = 2kS = MP \cdot NP$$

Din (1) mai avem:

$$\begin{cases} \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} \\ \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \frac{MN \cdot BC}{NP} \\ AB = \frac{MN \cdot AC}{MP} \end{cases} \Rightarrow AB^2 = \frac{MN \cdot BC}{NP} \cdot \frac{MN \cdot AC}{MP} = \frac{MN^2}{NP \cdot MP} \cdot BC \cdot AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 = BC \cdot AC$$

În mod similar, rezultă: $AC^2 = BC \cdot AB$, $BC^2 = AB \cdot AC$.

20. Se consideră numărul $n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2013^2$. Arătați că:

a) numărul n nu este pătrat perfect;

b) numărul $A = 9n^4 - 2n^2 - 7$ este divizibil cu 512.

GM Nr. 12 / 2012

Rezolvare:

a) Știm că $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2013^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^n 4k^2 - \sum_{k=1}^n 4k + \sum_{k=1}^n 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$S = 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n = \frac{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot n}{3}$$

$$\text{În cazul nostru } n = 1007 \Rightarrow S = \frac{(2 \cdot 1007 - 1) \cdot (2 \cdot 1007 + 1) \cdot 1007}{3} = 5 \cdot 403 \cdot 671 \cdot 1007 \Rightarrow$$

că S nu este pătrat perfect, deoarece fiecare din numerele 403, 671, 1007 nu este divizibil cu 5.

$$\text{b) } A = 9n^4 - 2n^2 - 7 = 9n^4 - 9n^2 + 7n^2 - 7 = 9n^2 \cdot (n^2 - 1) + 7 \cdot (n^2 - 1) = (n-1) \cdot (n+1) \cdot (9n^2 + 7)$$

Vom calcula restul împărțirii lui n de la punctul a) la 16 și obținem:

$$(M16+1)^2 = M16+1$$

$$(M16+9)^2 = M16+1$$

$$(M16+3)^2 = M16+9$$

$$(M16+11)^2 = M16+9$$

$$(M16+5)^2 = M16+9$$

$$(M16+13)^2 = M16+9$$

$$(M16+7)^2 = M16+1$$

$$(M16+15)^2 = M16+1$$

Observăm o periodicitate din 4 în 4 a resturilor pătratelor șirului de numere impare, rezultă că putem scrie:

$$n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2013^2 = (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) + (9^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2) + \dots + (2001^2 + 2003^2 + 2005^2 + 2007^2) + (2009^2 + 2011^2 + 2013^2)$$

Avem 251 grupe de 4 termeni cu suma resturilor 20 și o grupă de 3 termeni cu suma resturilor 19.

$$n = M16 + 251 \cdot 20 + 19 = M16 + 5039 = M16 + 16 \cdot 314 + 15 = M16 + 15$$

$$\Rightarrow A = (n-1) \cdot (n+1) \cdot (9n^2 + 7) = (M16+14) \cdot (M16+15) \cdot [9 \cdot (M16+15)^2 + 7] = 16 \cdot 16k \cdot 2 \cdot (8k+7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2^9 \cdot k \cdot (8k+7) = 512 \cdot k \cdot (8k+7), \forall k \in \mathbb{N}$$

21. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC în care $m(\hat{C}) = 2 \cdot m(\hat{A})$ și $AC = 2 \cdot BC$.

GM Nr. 12 / 2012

Rezolvare: Construim desenul din figura III.16.

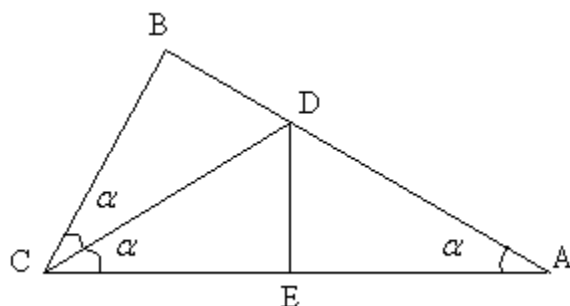


Figura III.16. Desenul problemei 21 (III.2)

Notăm $m(\hat{CAB}) = \alpha$. Construim CD bisectoarea unghiului $\hat{ACB}$, rezultă:

$$m(\hat{ACD}) = m(\hat{DCB}) = \alpha.$$

Notând $BC = a \Rightarrow AC = 2a$.

În $\triangle CDA$ construim $DE \perp AC$.

$$\text{Cum } m(\hat{CDE}) = 90^\circ - \alpha, m(\hat{ADE}) = 90^\circ - \alpha \Rightarrow m(\hat{ADC}) = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow m(\hat{BDC}) = 2\alpha$$

$\triangle ACD$ este isoscel, deci DE este și mediană, de unde $CE = a$.

$$\triangle ECD \stackrel{LUL}{\equiv} \triangle DCB \Rightarrow m(\hat{DEC}) = m(\hat{DBC}) = 90^\circ.$$

Din suma unghiurilor într-un triunghi, găsim: $\alpha + 2\alpha + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$$\Rightarrow m(\hat{A}) = 30^\circ; m(\hat{B}) = 90^\circ; m(\hat{C}) = 60^\circ$$

22. Demonstrați că într-un triunghi oarecare ABC, punctele G - centrul de greutate, I - centrul cercului înscris și I' - centrul cercului înscris în triunghiul median PMN (triunghiul format de liniile mijlocii) sunt coliniare și $GI = 2 \cdot GI'$.

GM Nr. 12 / 2012

Rezolvare: Construim desenul din figura III.17.

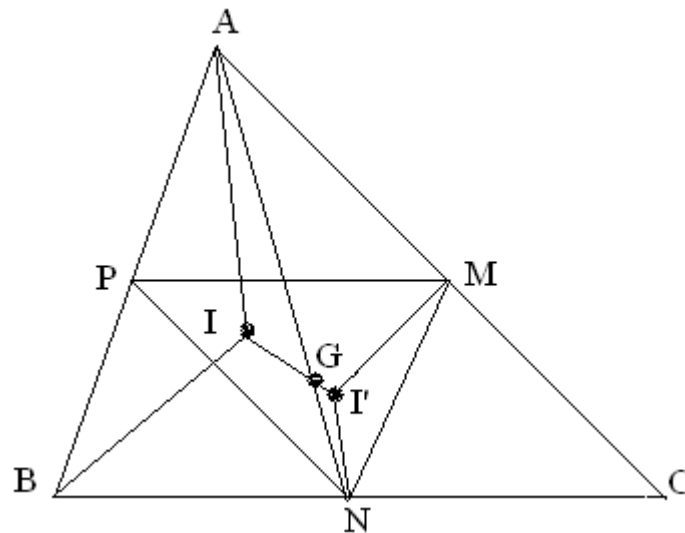


Figura III.17. Desenul problemei 22 (III.2)

PM, PN, MN linii mijlocii în $\triangle ABC \Rightarrow PM \parallel AC; MN \parallel AB \Rightarrow APMN$ și $BPNM$ sunt paralelograme. În paralelogramul $APMN \Rightarrow \hat{PAN} \equiv \hat{PMN} \Rightarrow \frac{1}{2} \hat{PAN} = \frac{1}{2} \hat{PMN} \Rightarrow \hat{PAI} \equiv \hat{NMI'}$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{PAI} \equiv \hat{NMI'} \\ PA \parallel MN \end{array} \right\} \Rightarrow AI \parallel MI' \quad (\text{RT unghiurilor cu laturile respectiv paralele})$$

$$\left. \begin{array}{l} AI \parallel MI' \\ AM - \text{secantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{IAG} \equiv \hat{I'MG}$$

$$\triangle AIB \sim \triangle MI'N \quad (\text{caz UU}) \Rightarrow \frac{AI}{MI'} = \frac{BI}{NI'} = \frac{AB}{MN} = \frac{2}{1}$$

$$\triangle AIG \text{ si } \triangle MI'G \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{AI}{MI'} = \frac{AG}{MG} = \frac{2}{1} \quad LUL \\ \hat{IAG} \equiv \hat{I'MG} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AIG \sim \triangle MI'G \Rightarrow \hat{AGI} \equiv \hat{MGI'}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{AGI} \equiv \hat{MGI'} \\ A - G - M \text{ coliniare} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{RT unghiurilor opuse la vârf} \\ \Rightarrow \end{array} \quad I - G - I' \text{ coliniare}$$

$$\text{Din } \triangle AIG \sim \triangle MI'G \Rightarrow \frac{AG}{GM} = \frac{IG}{GI'} = \frac{2}{1} \Rightarrow IG = 2 \cdot GI'$$

23. Fie ABC un triunghi oarecare, (AA' bisectoarea unghiului BAC ($A' \in BC$)) și punctele coliniare A, C, E ($C \in (AE)$); B, C, F ($B \in (CF)$), astfel încât $CE = AB$ și $BF = A'C$. Demonstrați că AA' trece prin mijlocul segmentului [EF].

GM Nr. 12 / 2012

Rezolvare: Construim desenul din figura III.18.

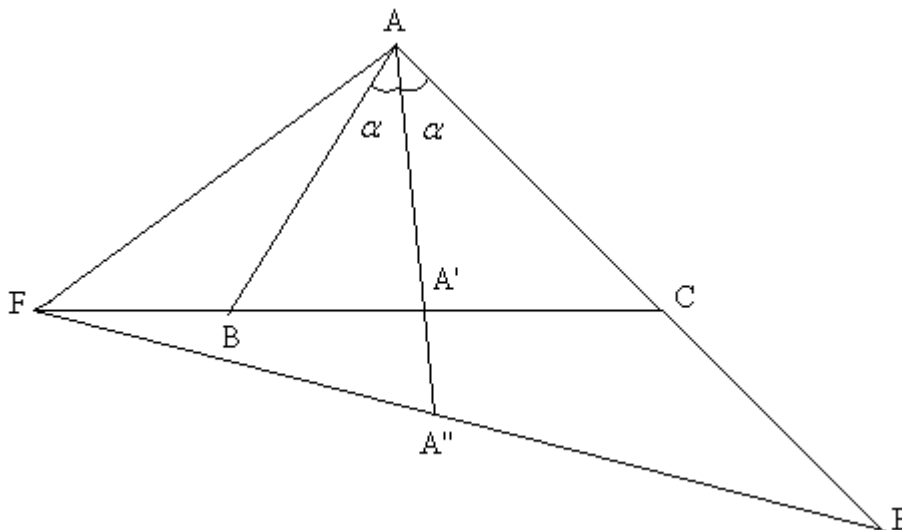


Figura III.18. Desenul problemei 23 (III.2)

Fie $\{A''\} = AA' \cap FE$.

Aplicând teorema lui Menalaus în ΔFCE , față de transversala A-A'-A'' obținem:

$$\frac{EA}{AC} \cdot \frac{CA'}{A'F} \cdot \frac{FA''}{A''E} = 1 \Leftrightarrow A''E \equiv A''F \Leftrightarrow \frac{EA}{AC} \cdot \frac{CA'}{A'F} = 1 \Leftrightarrow EA \cdot CA' = AC \cdot A'F$$

$$EA \cdot CA' = (AC + CE) \cdot CA' = AC \cdot CA' + CE \cdot CA' = AC \cdot CA' + CE \cdot CA' = AC \cdot CA' + AB \cdot A'C$$

$$AC \cdot A'F = AC \cdot (A'B + BF) = AC \cdot A'B + AC \cdot BF = AC \cdot A'B + AC \cdot A'C$$

$$AC \cdot CA' + AB \cdot A'C = AC \cdot A'B + AC \cdot A'C \Leftrightarrow AB \cdot A'C = AC \cdot A'B \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C}, \text{ această relație}$$

fiind tocmai teorema bisectoarei în ΔABC , ce are loc conform ipotezei.

24. Arătați că, dacă $x, y, z \in \left[1, \frac{4}{3}\right]$, atunci:

a) $0 \leq x\sqrt{4-3z} + y\sqrt{4-3x} + z\sqrt{4-3y} \leq 4$

b) $0 \leq xy\sqrt{4-3z} + yz\sqrt{4-3x} + xz\sqrt{4-3y} \leq x^2 + y^2 + z^2$

GM Nr. 12 / 2012

Rezolvare:

a) Cum

$$\begin{cases} x \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \\ y \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \\ z \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{4}{3} \\ 1 \leq y \leq \frac{4}{3} \\ 1 \leq z \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq 3x \leq 4 \\ 3 \leq 3y \leq 4 \\ 3 \leq 3z \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq -3x \leq -3 \\ -4 \leq -3y \leq -3 \\ -4 \leq -3z \leq -3 \end{cases} \mid +4 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 4-3x \leq 1 \\ 0 \leq 4-3y \leq 1 \\ 0 \leq 4-3z \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt{4-3x} \leq 1 & | \cdot y \\ 0 \leq \sqrt{4-3y} \leq 1 & | \cdot z \\ 0 \leq \sqrt{4-3z} \leq 1 & | \cdot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y\sqrt{4-3x} \leq y \\ 0 \leq z\sqrt{4-3y} \leq z \\ 0 \leq x\sqrt{4-3z} \leq x \end{cases} \xrightarrow{+} 0 \leq x\sqrt{4-3z} + y\sqrt{4-3x} + z\sqrt{4-3y} \leq x + y + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq x\sqrt{4-3z} + y\sqrt{4-3x} + z\sqrt{4-3y} \leq x + y + z \leq \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

b) Din

$$\begin{cases} 0 \leq y\sqrt{4-3x} \leq y & | \cdot z \\ 0 \leq z\sqrt{4-3y} \leq z & | \cdot x \\ 0 \leq x\sqrt{4-3z} \leq x & | \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq yz\sqrt{4-3x} \leq yz \\ 0 \leq xz\sqrt{4-3y} \leq xz \\ 0 \leq xy\sqrt{4-3z} \leq xy \end{cases} \xrightarrow{+}$$

$$\Rightarrow 0 \leq xy\sqrt{4-3z} + yz\sqrt{4-3x} + xz\sqrt{4-3y} \leq xy + xz + yz \Rightarrow$$

Deoarece știm că:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \\ \frac{x^2 + z^2}{2} \geq xz \\ \frac{y^2 + z^2}{2} \geq yz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2 \geq 0 \\ (x-z)^2 \geq 0 \\ (y-z)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq xy\sqrt{4-3z} + yz\sqrt{4-3x} + xz\sqrt{4-3y} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq xy\sqrt{4-3z} + yz\sqrt{4-3x} + xz\sqrt{4-3y} \leq x^2 + y^2 + z^2$$

25. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Arătați că:

$$\frac{a \cdot (b+c)}{\sqrt{(a^2+b^2) \cdot (a^2+c^2)}} + \frac{b \cdot (c+a)}{\sqrt{(b^2+c^2) \cdot (b^2+a^2)}} + \frac{c \cdot (a+b)}{\sqrt{(c^2+a^2) \cdot (c^2+b^2)}} \leq 3.$$

GM Nr. 1 / 2013

Rezolvare:

Arat că: (*) $\frac{a \cdot (b+c)}{\sqrt{(a^2+b^2) \cdot (a^2+c^2)}} \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \cdot (b+c) \leq \sqrt{(a^2+b^2) \cdot (a^2+c^2)} \quad ()^2 \Rightarrow a^2 \cdot (b+c)^2 \leq (a^2+b^2) \cdot (a^2+c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot (b^2 + 2bc + c^2) \leq a^4 + a^2c^2 + b^2c^2 + b^2c^2 \Rightarrow a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2 \leq a^4 + a^2c^2 + b^2a^2 + b^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 - 2a^2bc + b^2c^2 \geq 0 \Rightarrow (a^2 - bc)^2 \geq 0$$

În mod similar,

$$(**) \frac{b \cdot (c+a)}{\sqrt{(b^2+c^2) \cdot (b^2+a^2)}} \leq 1 \Rightarrow (b^2 - ac)^2 \geq 0$$

$$(***) \frac{c \cdot (a+b)}{\sqrt{(c^2+a^2) \cdot (c^2+b^2)}} \leq 1 \Rightarrow (c^2 - ab)^2 \geq 0$$

Însumând cele 3 relații, rezultă:

$$\frac{a \cdot (b+c)}{\sqrt{(a^2+b^2) \cdot (a^2+c^2)}} + \frac{b \cdot (c+a)}{\sqrt{(b^2+c^2) \cdot (b^2+a^2)}} + \frac{c \cdot (a+b)}{\sqrt{(c^2+a^2) \cdot (c^2+b^2)}} \leq 3$$

26. Fie P un punct situat în interiorul unui unghi propriu $\hat{XOY}$. Prin punctul P se duc două drepte d_1 și d_2 , astfel încât: $d_1 \cap OX = \{A_1\}$, $d_1 \cap OY = \{B_1\}$, $d_2 \cap OX = \{A_2\}$, $d_2 \cap OY = \{B_2\}$.
 Demonstrați că, dacă $\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OB_1} = \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OB_2}$, atunci $[OP]$ este bisectoarea unghiului XOY .

GM Nr. 1 / 2013

Rezolvare: Construim desenul din figura III.19.

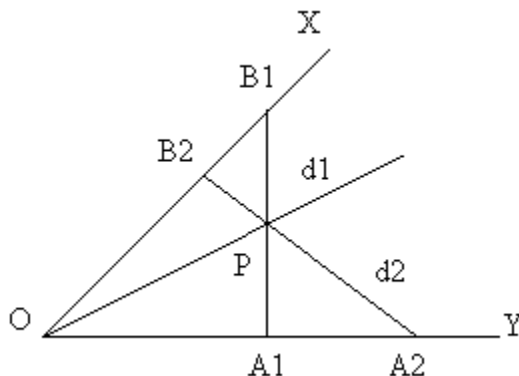


Figura III.19. Desenul problemei 26 (III.2)

Aplicăm condiția problemei și teorema lui Menelaus.

$$\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OB_1} = \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OB_2} \Rightarrow \frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA_2} = \frac{1}{OB_2} - \frac{1}{OB_1} \Rightarrow$$

$$\frac{OA_2 - OA_1}{OA_1 \cdot OA_2} = \frac{OB_1 - OB_2}{OB_1 \cdot OB_2} \Rightarrow \frac{A_1A_2}{OA_1 \cdot OA_2} = \frac{B_1B_2}{OB_1 \cdot OB_2} \Rightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{OA_1 \cdot OA_2}{OB_1 \cdot OB_2} \quad (1)$$

Aplicăm teorema lui Menelaus față de triunghiul OA_1B_1 și transversala $B_2 - P - A_2$:

$$\frac{A_2O}{A_2A_1} \cdot \frac{A_1P}{PB_1} \cdot \frac{B_1B_2}{B_2O} = 1 \Rightarrow A_2O \cdot A_1P \cdot B_1B_2 = A_2A_1 \cdot PB_1 \cdot B_2O \Rightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2O \cdot A_1P}{PB_1 \cdot B_2O} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că:

$$\frac{OA_1 \cdot OA_2}{OB_1 \cdot OB_2} = \frac{A_2O \cdot A_1P}{PB_1 \cdot B_2O} \Rightarrow \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1P}{PB_1} \Rightarrow [OP \text{ este bisectoarea în } \triangle OA_1B_1, \text{ conform reciprocei}$$

teoremei bisectoarei, deci este și bisectoarea unghiului XOY .

27. Arătați că pentru orice n număr natural nenul, avem:

$$\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} > \frac{n \cdot (n + 2)}{2}$$

GM Nr. 1 / 2013

Rezolvare:

$$\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} = \sqrt{\frac{10}{4}} + \sqrt{\frac{26}{4}} + \sqrt{\frac{50}{4}} + \dots + \sqrt{\frac{4n^2 + 4n + 2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+1}{4}} + \sqrt{\frac{25+1}{4}} + \sqrt{\frac{49+1}{4}} + \dots + \sqrt{\frac{4n^2 + 4n + 1 + 1}{4}} > \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \dots + \frac{2n+1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (3 + 5 + 7 + \dots + 2n + 1) = \frac{n \cdot (n + 2)}{2}$$

28. Fie ABCD un patrulater și $\{O\} = AC \cap BD$. Arătați că, dacă

$$\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} + \frac{A_{BOC}}{A_{COD}} + \frac{A_{COD}}{A_{AOD}} + \frac{A_{AOD}}{A_{AOB}} = 4, \text{ atunci } ABCD \text{ este paralelogram.}$$

GM Nr. 1 / 2013

Rezolvare: Construim desenul din figura III.20.

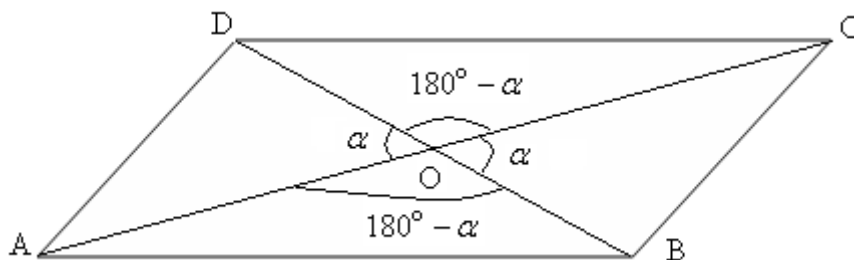


Figura III.20. Desenul problemei 28 (III.2)

Notăm $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = \alpha$, rezultă că avem: $\widehat{AOB} = 180^\circ - \alpha = \widehat{COD}$, unghiuri opuse la vârf;

$$\begin{aligned} & \frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} + \frac{A_{BOC}}{A_{COD}} + \frac{A_{COD}}{A_{AOD}} + \frac{A_{AOD}}{A_{AOB}} = \\ &= \frac{OA \cdot OB \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{OB \cdot OC \cdot \sin \alpha} + \frac{OB \cdot OC \cdot \sin \alpha}{OC \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \alpha)} + \frac{OC \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{OD \cdot OA \cdot \sin \alpha} + \frac{OA \cdot OD \cdot \sin \alpha}{OA \cdot OB \cdot \sin(180^\circ - \alpha)} = \\ &= \frac{OA}{OC} + \frac{OB}{OD} + \frac{OC}{OA} + \frac{OD}{OB} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{OA}{OC} \cdot \frac{OB}{OD} \cdot \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OD}{OB}} = 4 \end{aligned}$$

Pentru a ajunge la ipoteză se observă că suntem în cazul egalității dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor considerate, adică:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow \begin{cases} \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OA} \\ \frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA^2 = OC^2 \\ OB^2 = OD^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases},$$

deci diagonalele se înjumătățesc, de unde rezultă că ABCD este paralelogram.

29. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

a) Arătați că $(n+1)! - n! = n \cdot n!$

b) Aflați restul împărțirii numărului $A = 1005 \cdot 1005 + 1004 \cdot 1004 + \dots + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$ la 2012.

GM Nr. 1 / 2013

Rezolvare:

a) $(n+1)! - n! = n! \cdot (n+1) - n! = n! \cdot (n+1-1) = n \cdot n!$

b) $A = 1005 \cdot 1005 + 1004 \cdot 1004 + \dots + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 1006 - 1005 + 1005 - 1004 + \dots + 3! - 2! + 2! - 1! \Rightarrow$

$$A = 1006 - 1 = 1006 - 2012 - 2011 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1006 - 2012 + 2011$$

$$A = 2012 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1005 - 1) + 2011$$

$$A = 2012 \cdot \left(\frac{1005!}{2} - 1 \right) + 2011 \Rightarrow A : 2012 \Rightarrow \text{rest} = 2011$$

30. Se dă piramida patrulateră regulată VABCD de volum 1. Să se determine volumul piramidei VABMN, unde M este mijlocul muchiei [VD] și N este mijlocul muchiei [VC].

GM Nr. 1 / 2013

Rezolvare: Construim desenul din figura III.21.

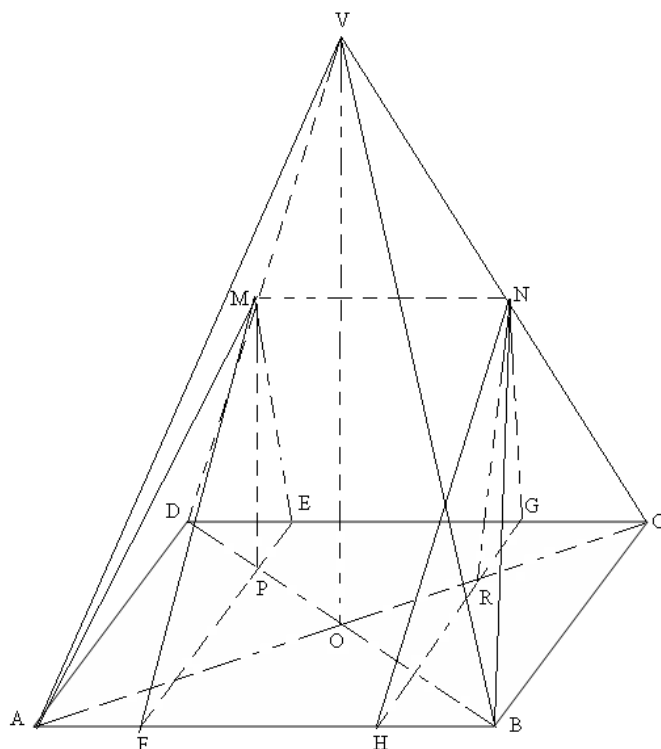


Figura III.21. Desenul problemei 30 (III.2)

$$V_{VABMN} = V_{ABCD} - V_{ABCDMN} = 1 - V_{ABCDMN}$$

Figura este ca un cort format prin lipirea pe o prismă regulată EMFHGN a două piramide: MAFED

și MHBCG. Notăm $VO \perp ABCD$, $VO = h$, $AB = L$. Știm că: $\frac{L^2 h}{3} = 1 \Rightarrow L^2 h = 3$.

Constatăm că $MP \perp ABCD$.

În $\triangle VOD$, MP este linie mijlocie, de unde $MP = \frac{h}{2}$; avem $DP = \frac{OD}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{4}$.

Imediat, $DE = \frac{L}{4} = AF$, iar $FH = \frac{L}{2}$.

$$\text{Obținem } V_{MAFED} = \frac{A_{AFED} \cdot MP}{3} = \frac{\frac{L^2}{4} \cdot \frac{h}{2}}{3} = \frac{L^2 \cdot h}{24}.$$

$$\text{Pe de altă parte, } V_{FMEHNG} = A_{MEF} \cdot FH = \frac{FE \cdot MP}{2} \cdot FH = \frac{L \cdot h}{4} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L^2 h}{8}$$

$$\text{În final, } V_{ABCDMN} = 2 \cdot V_{MAFED} + V_{FMEHNG} = 2 \cdot \frac{L^2 h}{24} + \frac{L^2 h}{8} = \frac{5L^2 h}{24} = \frac{5 \cdot 3}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow V_{VABMN} = 1 - V_{ABCDMN} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

III.3. PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ȘCOLARE¹

1. Determinați numerele reale a și b știind că în intervalul $(a;b)$ se află cel puțin trei numere întregi și $a^2 + b^2 + 3a - 5b + 11 = |a - b + 2|$.

Rezolvare:

$$a^2 + b^2 + 3a - 5b + 11 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 + a + b^2 - 4b + 4 - b + 6 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (b-2)^2 + a - b + 6 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} (a+1)^2 \geq 0 \\ (b-2)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a - b + 6 \geq 0 \Rightarrow a - b \geq -6 \Rightarrow$$

$$|a - b + 2| = -a + b - 2$$

Rezultă că expresia devine:

$$a^2 + b^2 + 3a - 5b + 11 = -a + b - 2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 4a - 6b + 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+2)^2 + (b-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a+2)^2 = 0 \\ (b-3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2 = 0 \\ b-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-2012| = 2013 \cdot (x-2013)$$

Rezolvare:

$$\text{Membrul stâng este } \geq 0 \Rightarrow 2013 \cdot (x-2013) \geq 0 \Rightarrow x-2013 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2013 \Rightarrow$$

$$x-1 + x-2 + \dots + x-2012 = 2013 \cdot (x-2013) \Rightarrow 2012 \cdot x - (1+2+\dots+2012) = 2013 \cdot (x-2013) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2012 \cdot x - \frac{2012 \cdot 2013}{2} = 2013 \cdot (x-2013) \Rightarrow 2012 \cdot x - 1006 \cdot 2013 = 2013 \cdot (x-2013) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2012 \cdot x - 1006 \cdot 2013 = 2013 \cdot x - 2013^2 \Rightarrow 2013^2 - 1006 \cdot 2013 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2013 \cdot (2013-1006) = x \Rightarrow x = 1007 \cdot 2013$$

$$3. \text{ Arătați că } \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n+2}{n(n+1)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezolvare:

$$3 - \frac{3}{2} + \frac{4}{2} - \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+2}{n} - \frac{n+2}{n+1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) < 2 \Rightarrow$$

$$3 - \frac{3}{2} + \frac{4}{2} - \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+2}{n} - \frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} < 2 \Rightarrow$$

$$3 - \frac{n+2}{n+1} < 2 \Rightarrow 3 \cdot (n+1) - (n+2) < 2 \cdot (n+1) \Rightarrow 1 < 2 \text{ sau } \frac{n+2}{n+1} > 1 \text{ adevărat}$$

4. Arătați că suma pătratelor a 5 numere naturale consecutive nu poate fi pătrat perfect.

Rezolvare:

$$(k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 = 5k^2 + 10 = 5 \cdot (k^2 + 1) \text{ se divide cu 5, dar nu cu 25.}$$

¹ **Observație:** Enunțul problemelor 1÷27 din cadrul paragrafului III.3. sunt din sursa bibliografică: *Gheorghe Iurea, Dorel Luchian, Gabriel Popa, Adrian Zanoschi, Matematică – algebră, geometrie, Editura Paralela 45, 2012*, carte în care, la unele probleme se face trimitere directă către sursa bibliografică, cum ar fi, de exemplu, diferite concursuri, GM, etc.

5. Găsiți numerele reale x, y, z cunoscând $x + y + z = 6$, iar $xy + xz + yz = 12$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} x + y + z = 6 \quad (\quad)^2 &\Rightarrow (x + y + z)^2 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (xy + xz + yz) = 36 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 12 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{aligned}$$

$$\text{Se observă că: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12 \\ xy + xz + yz = 12 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \Rightarrow x = y = z = 2$$

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} a + b + c = 5 \\ ab + ac + bc = 7 + a \end{cases}$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ ab + ac + bc = 7 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 - b - c \\ b^2 + (c - 6)b + (c^2 - 6c + 12) = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = -3 \cdot (c - 2)^2 \leq 0$$

$$\text{Pentru a avea } b \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta = -3 \cdot (c - 2)^2 = 0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$$

7. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $|a - b| = 2|b - c| = 3|c - a|$, arătați că $a = b = c$.

Rezolvare: Notez $|a - b| = 2|b - c| = 3|c - a| = m \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a - b| = m \\ 2|b - c| = m \\ 3|c - a| = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = \pm m \\ b - c = \pm \frac{m}{2} \\ c - a = \pm \frac{m}{3} \end{cases} \xrightarrow{(+)} 0 = \pm m \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a - b| = 0 \\ 2|b - c| = 0 \\ 3|c - a| = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c$$

8. Fie a, b, c numere reale, $x = |a| + |b| + |c|$, $y = |a - 2| + |b - 2| + |c - 2|$. Arătați că $x + y \geq 6$.

Rezolvare:

Se știe că: $|m| + |n| \geq |m + n|$

$$x + y = |a| + |b| + |c| + |a - 2| + |b - 2| + |c - 2| \Rightarrow x + y = |a| + |2 - a| + |b| + |2 - b| + |c| + |2 - c| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a| + |2 - a| \geq |a + 2 - a| \\ |b| + |2 - b| \geq |b + 2 - b| \\ |c| + |2 - c| \geq |c + 2 - c| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + |2 - a| \geq 2 \\ |b| + |2 - b| \geq 2 \\ |c| + |2 - c| \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} x + y \geq 6$$

9. Câte numere de forma $\overline{abcd}$ verifică simultan $a + b = c + d$ și $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$?

Rezolvare: Din $a + b = c + d$, prin ridicare la pătrat rezultă: $(a + b)^2 = (c + d)^2 \Rightarrow ab = cd$

$$\text{Deducem că } a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2 \Rightarrow (a - b)^2 = (c - d)^2 \Rightarrow |a - b| = |c - d| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - b = c - d \text{ sau } a - b = d - c$$

Cum $a + b = c + d$, prin adunare cu fiecare relație anterioară $\Rightarrow a = c$, $b = d$ sau $a = d$, $b = c$

Rezultă că numerele sunt de forma: $\overline{aaaa}$, $\overline{abba}$, $\overline{abab}$, $a \neq 0$, $a \neq b$.

Obținem: $9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 = 171$ numere

10. Dacă x și y sunt numere reale astfel încât $x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right]$; $y \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$, arătați că $\frac{x}{y} \in \left[\frac{1}{4}; 2\right]$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right] \\ y \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2 \leq \frac{1}{y} \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{8} \cdot 2 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{3} \cdot 6 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq 2 \Rightarrow \frac{x}{y} \in \left[\frac{1}{4}; 2\right]$$

11. a) Fie x și y numere reale situate în intervalul $(1; \infty)$. Demonstrați că $1 + xy > x + y$.

b) Dacă $a, b, c \in (1; \infty)$, demonstrați că $a + b + c + abc > 1 + ab + ac + bc$.

Rezolvare:

$$\text{a) Din } x, y \in (1; \infty) \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 1) \cdot (y - 1) > 0 \Rightarrow 1 + xy > x + y.$$

$$\text{b) Din } a, b, c \in (1; \infty) \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \\ c > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 1 > 0 \\ b - 1 > 0 \\ c - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - 1) \cdot (b - 1) \cdot (c - 1) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b + c + abc > 1 + ab + ac + bc$$

12. Dacă a, b și c sunt numere naturale nenule, astfel încât $\frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{3}}{b\sqrt{2} + c\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$, atunci

$$a + b + c \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Rezolvare:

$\exists r \in \mathbb{Q}$, astfel încât

$$\frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{3}}{b\sqrt{2} + c\sqrt{3}} = r \Rightarrow a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = r \cdot (b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) \Rightarrow a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = rb\sqrt{2} + rc\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = rb \\ b = rc \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = (a + c)^2 - ac = (a + c)^2 - b^2 = (a + c - b) \cdot (a + b + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b + c \mid a^2 + b^2 + c^2$$

13. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ sunt astfel încât $4x^2 + 9xy + 5y^2 = 0$, arătați că $\frac{2x + 3y}{3x + 4y} \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

$$4x^2 + 9xy + 5y^2 = 0 \Rightarrow 4x \cdot (x + y) + 5y \cdot (x + y) = 0 \Rightarrow (x + y) \cdot (4x + 5y) = 0 \Rightarrow$$

$$x + y = 0 \text{ sau } 4x + 5y = 0 \Rightarrow x = -y \text{ sau } x = -\frac{5}{4}y$$

$$\text{Pentru cazul: } x = -y \Rightarrow \frac{2x + 3y}{3x + 4y} = \frac{-2y + 3y}{-3y + 4y} = \frac{y}{y} = 1 \in \mathbb{N}$$

$$\text{Pentru cazul: } x = -\frac{5}{4}y \Rightarrow \frac{2x + 3y}{3x + 4y} = \frac{-2 \cdot \frac{5}{4}y + 3y}{-3 \cdot \frac{5}{4}y + 4y} = \frac{2y}{y} = 2 \in \mathbb{N}$$

14. Dacă x, y sunt numere raționale, $y \neq -1$, astfel încât $x^2 - y^2 = 2 \cdot (x + y)$, atunci $\frac{x-1}{y+1} \in \{-1; +1\}$

Rezolvare:

$$x^2 - y^2 = 2x + 2y \Rightarrow x^2 - 2x = y^2 + 2y \quad | +1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = (y+1)^2 \Rightarrow x-1 = \pm(y+1) \Rightarrow \frac{x-1}{y+1} = \pm 1 \Rightarrow \frac{x-1}{y+1} \in \{-1; +1\}$$

15. a) Demonstrați că $(\sqrt{2x} + \sqrt{2x-1}) \cdot (\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x}) < 1, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

b) Comparați numerele:

$$a = (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2013} - \sqrt{2012}), \text{ iar}$$

$$b = (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{4} + \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2013} + \sqrt{2012}).$$

Rezolvare:

$$\text{a) } \sqrt{2x} + \sqrt{2x-1} < \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x}} \Rightarrow \sqrt{2x} + \sqrt{2x-1} < \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x}}{2x+1-2x} \Rightarrow \sqrt{2x} + \sqrt{2x-1} < \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x} \Rightarrow \sqrt{2x-1} < \sqrt{2x+1} \text{ evident}$$

b) Se observă că

$$a \cdot b = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{4} - \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2013} - \sqrt{2012})(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2013} + \sqrt{2012})$$

$$a \cdot b = 1$$

Conform punctului a) $\Rightarrow a < 1 \Rightarrow b > 1 \Rightarrow a < b$

16. a) Dacă a, b sunt numere raționale nenegative, astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 20$.

Rezolvare:

$$\text{a) Fie } r = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow \frac{r \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} = 1 \Rightarrow r \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \Rightarrow \frac{a - b}{r} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\text{Din } \begin{cases} r = \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \frac{a - b}{r} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \end{cases} \xrightarrow{+} r + \frac{a - b}{r} = 2 \cdot \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r^2 + a - b}{r} \right) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{b} = r - \sqrt{a} \Rightarrow$$

$$\sqrt{b} = r - \sqrt{a} = r - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r^2 + a - b}{r} \right) = \frac{2r^2 - r^2 - a + b}{2r} = \frac{r^2 - a + b}{2r} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{b) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{5} \quad | \cdot \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5x} + \sqrt{5y} = 10 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5x} \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{5y} \in \mathbb{Q} \end{cases} \text{ conform(a),}$$

$$\text{cu condiția } \begin{cases} x = 5a^2 \\ y = 5b^2 \end{cases}, a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 5a + 5b = 10 \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a, b \in \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Pentru } \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 20 \end{cases}, \text{ pentru } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}, \text{ pentru } \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Soluții: } (x, y) = \{(0, 20); (5, 5); (20, 0)\}$$

17. Dacă $n \geq 1$ este un număr natural astfel încât $2n + 3$ și $8n + 1$ sunt simultan pătrate perfecte, arătați că $5n + 3$ nu este număr prim.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2n + 3 = a^2 \\ 8n + 1 = b^2 \end{cases} \cdot 4 &\Rightarrow \begin{cases} 8n + 12 = 4a^2 \\ 8n + 1 = b^2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 4a^2 - b^2 = 11 \Rightarrow (2a - b) \cdot (2a + b) = 11 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2a - b) \cdot (2a + b) = 1 \cdot 11 = 11 \cdot 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 1 \\ 2a + b = 11 \end{cases} \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2n + 3 = 9 \\ 8n + 1 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow 5n + 3 = 18 \Rightarrow \text{nu e prim} \end{aligned}$$

18. Dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a^2 \cdot (a - 2b) = b^2 \cdot (b - 2a)$, demonstrați că $a = b$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} a^2 \cdot (a - 2b) &= b^2 \cdot (b - 2a) \Rightarrow a^3 - 2a^2b = b^3 - 2ab^2 \Rightarrow a^3 - 2a^2b - b^3 + 2ab^2 = 0 \Rightarrow \\ a^3 - b^3 - 2ab \cdot (a - b) &= 0 \Rightarrow (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) - 2ab \cdot (a - b) = 0 \Rightarrow \\ (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2 - 2ab) &= 0 \Rightarrow (a - b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 & \text{sau} \\ a^2 - ab + b^2 = 0 & \text{imposibil} \end{cases} \Rightarrow a = b \end{aligned}$$

19. Dacă a, b și c sunt numere reale pozitive astfel încât $ab + ac + bc = 1$, arătați că $(1 + a^2) \cdot (1 + b^2) \cdot (1 + c^2)$ este pătratul unui număr rațional.

Rezolvare: Putem scrie:

$$\begin{aligned} 1 + a^2 &= ab + ac + bc + a^2 = b \cdot (a + c) + a \cdot (a + c) = (a + b) \cdot (a + c) \\ 1 + b^2 &= ab + ac + bc + b^2 = a \cdot (b + c) + b \cdot (b + c) = (b + c) \cdot (a + b) \\ 1 + c^2 &= ab + ac + bc + c^2 = a \cdot (b + c) + c \cdot (b + c) = (b + c) \cdot (a + c) \\ &\Rightarrow (1 + a^2) \cdot (1 + b^2) \cdot (1 + c^2) = [(a + b)^2 \cdot (a + c)^2 \cdot (b + c)^2] = [(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + c)]^2 \end{aligned}$$

20. Ion, Costel, Adi și Marcel joacă tenis de câmp, câte un set, fiecare cu fiecare câte o dată.

a) Câte seturi s-au jucat?

b) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 reprezintă numărul victoriilor fiecărui copil, iar y_1, y_2, y_3, y_4 reprezintă numărul înfrângerilor suferite de fiecare copil, arătați că: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$.

Rezolvare:

a) $I \rightarrow C, A, M$; $C \rightarrow A, M$; $A \rightarrow M \Rightarrow 6$ seturi

b) Fiecare copil a fost implicat în 3 partide, deci $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 = x_4 + y_4 = 3$

$$\begin{aligned} \text{Din } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \Rightarrow x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 - y_3^2 + x_4^2 - y_4^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x_1 + y_1) \cdot (x_1 - y_1) + (x_2 + y_2) \cdot (x_2 - y_2) + (x_3 + y_3) \cdot (x_3 - y_3) + (x_4 + y_4) \cdot (x_4 - y_4) = 0 \\ &\Rightarrow 3 \cdot (x_1 - y_1) + 3 \cdot (x_2 - y_2) + 3 \cdot (x_3 - y_3) + 3 \cdot (x_4 - y_4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) + (x_4 - y_4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \end{aligned}$$

Adevărat, deoarece orice victorie a cuiva se contabilizează și ca înfrângere a altcuiva, astfel suma victoriilor este egală cu suma înfrângerilor.

21. Dacă $a, b, c, d \in (0; \infty)$, astfel încât $ac = bd = 12$, atunci:

$$(a+3) \cdot (b+3) \cdot (c+4) \cdot (d+4) \geq 48^2.$$

Rezolvare: Folosim inegalitatea mediilor: $m_a \geq m_g \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$$\begin{cases} a+3 \geq 2\sqrt{3a} \\ b+3 \geq 2\sqrt{3b} \\ c+3 \geq 2\sqrt{3c} \\ d+3 \geq 2\sqrt{3d} \end{cases} \quad (\cdot) \Rightarrow (a+3) \cdot (b+3) \cdot (c+4) \cdot (d+4) \geq 16 \cdot \sqrt{9 \cdot 16 \cdot abcd} = 16 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{(ac)^2} = 48^2$$

22. Dacă a, b, c, d sunt numere reale, astfel încât $a+b=c+d$ și $a^2+b^2=c^2+d^2$, atunci $a^n+b^n=c^n+d^n$, $\forall n \geq 3$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} a+b=c+d \quad (\cdot)^2 &\Rightarrow (a+b)^2 = (c+d)^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2 \Rightarrow 2ab = 2cd \Rightarrow ab = cd \\ \Rightarrow (a-b)^2 &= (c-d)^2 \Rightarrow a-b = \pm(c-d), \text{ iar } a+b=c+d \Rightarrow 2a=2c \Rightarrow a=c \Rightarrow b=d \\ \Rightarrow a^n+b^n &= c^n+d^n, \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

23. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $\frac{x^2+2}{2x+1} + \frac{x^2+4}{2x+3} + \dots + \frac{x^2+4020}{2x+4019} = 2010$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x^2+2}{2x+1} - 1\right) + \left(\frac{x^2+4}{2x+3} - 1\right) + \dots + \left(\frac{x^2+4020}{2x+4019} - 1\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \dots + \frac{1}{2x+4019}\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 & \text{sau} \\ \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \dots + \frac{1}{2x+4019} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 & \text{sau} \\ \frac{1}{2x+1} = -\frac{1}{2x+4019} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{sau} \\ x = -1005 \end{cases} \end{aligned}$$

24. Se consideră expresia $E(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + \dots + |x-2012|$.

a) Arătați că $E(a) = E(2012-a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) Găsiți $m \in \mathbb{R}$, știind că $E(x) = m$ are soluție unică.

Rezolvare:

a) $E(a) = |a| + |a-1| + |a-2| + \dots + |a-2012|$

$$E(2012-a) = |2012-a| + |2012-a-1| + |2012-a-2| + \dots + |2012-a-2012|$$

$$E(2012-a) = |2012-a| + |2011-a| + |2010-a| + \dots + |-a|$$

Se știe că $|t| = |-t|$, motiv pentru care: $E(a) = E(2012-a)$

b) Din $|x| + |x-1| + |x-2| + \dots + |x-2012| = m \Rightarrow m \geq 0$

Fie u soluția ecuației date, rezultă că și $2012-u$ este soluție.

Din condiția de soluție unică, rezultă că: $u = 2012-u \Rightarrow u = 1006$

$$m = 1006 + 1005 + \dots + 0 + \dots + 1005 + 1006 = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 1006) = 1006 \cdot 1007$$

25. Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația: $(x^2 + x - 2)^3 + (3x^2 - 2x - 1)^3 = (4x^2 - x - 3)^3$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = a \\ 3x^2 - 2x - 1 = b \end{cases} \Rightarrow a + b = 4x^2 - x - 3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 \Rightarrow 3ab \cdot (a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot (x^2 + x - 2) \cdot (3x^2 - 2x - 1) \cdot (4x^2 - x - 3) = 0 \Rightarrow x \in \left\{1; -\frac{1}{3}; -\frac{3}{4}\right\}$$

26. Aflați numerele întregi x și y pentru care $y - 4x + 6 < 0$, $2y - x - 2 > 0$, $3y + 2x - 24 < 0$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} y - 4x + 6 < 0 \\ 2y - x - 2 > 0 \\ 3y + 2x - 24 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 4x - 6 & (1) \\ y > \frac{x+2}{2} & (2) \\ y < \frac{24-2x}{3} & (3) \end{cases} \xrightarrow{(1+2); (2+3)} \begin{cases} \frac{x+2}{2} < y < 4x - 6 \\ \frac{x+2}{2} < y < \frac{24-2x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{2} < 4x - 6 \\ \frac{x+2}{2} < \frac{24-2x}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 6 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 6 \Rightarrow x \in \{3; 4; 5\}$$

Se iau cazurile: - pentru $x = 3 \Rightarrow \frac{5}{2} < y < 6 \Rightarrow y \in \{3; 4; 5\}$

- pentru $x = 4 \Rightarrow 4 < y < 10 \Rightarrow y \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$

- pentru $x = 5 \Rightarrow 5 < y < 14 \Rightarrow y \in \{6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$

27. Stabiliți dacă există numere reale x , astfel încât $x + \sqrt{2}$ și $x^3 + \sqrt{2}$ să fie simultan numere raționale.

Rezolvare:

Fie $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$, $r = x + \sqrt{2} \Rightarrow x = r - \sqrt{2} \Rightarrow$

$$x^3 + \sqrt{2} = (r - \sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 6r - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 6r - \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$x^3 + \sqrt{2} = r^3 + 6r - \sqrt{2} \cdot (3r^2 + 1) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 3r^2 + 1 = 0 \text{ imposibil}$$

28. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$11^{2x} + 13^{2x} + 17^{2x} = 11^x \cdot 13^x + 11^x \cdot 17^x + 13^x \cdot 17^x.$$

GM Nr. 5 / 2012 supliment

Rezolvare: Notăm: $11^x = a$; $13^x = b$; $17^x = c$, iar ecuația devine:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - a \cdot b - a \cdot c - b \cdot c = 0 \mid \cdot 2 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a \cdot b - 2a \cdot c - 2b \cdot c = 0 \Rightarrow$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) = 0 \Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b \\ (b-c)^2 = 0 \Rightarrow b = c \\ (c-a)^2 = 0 \Rightarrow c = a \end{cases} \mid \Rightarrow a = b = c \Rightarrow 11^x = 13^x = 17^x \Rightarrow x = 0$$

29. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 3 \\ \frac{5x+5y+6}{x+y} - \frac{4x-4y+2}{x-y} = 1 \end{cases}, \text{ unde } x, y \in \mathbb{R}, x \neq \pm y.$$

GM Nr. 5 / 2012 supliment

Rezolvare:

$$\begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 3 \\ \frac{5x+5y+6}{x+y} - \frac{4x-4y+2}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 3 \\ \frac{5 \cdot (x+y) + 6}{x+y} - \frac{4 \cdot (x-y) + 2}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 3 \\ 5 + \frac{6}{x+y} - 4 - \frac{2}{x-y} = 1 \end{cases}$$

Notăm

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = a \\ \frac{1}{x-y} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{a} \\ x-y = \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \text{sistemul devine: } \begin{cases} 3 \cdot a + 2 \cdot b = 3 \\ 5 + 6 \cdot a - 4 - 2 \cdot b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot a + 2 \cdot b = 3 \\ 6 \cdot a - 2 \cdot b = 0 \mid : 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot a + 2 \cdot b = 3 \\ 3 \cdot a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot a + 2 \cdot b = 3 \\ 3 \cdot a = b \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot a + 6 \cdot a = 3 \Rightarrow 9 \cdot a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow b = 1$$

Revenind la notații obținem:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2 \cdot x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$$

30. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (a+b) \cdot x + (a-b) \cdot y = 1 \\ (a-b) \cdot x - (a+b) \cdot y = 1 \end{cases},$$

unde a și b sunt numere reale date.

GM Nr. 5 / 2012 supliment

Rezolvare:

Notăm ecuațiile sistemului:

$$\begin{cases} (a+b) \cdot x + (a-b) \cdot y = 1 & (1) \\ (a-b) \cdot x - (a+b) \cdot y = 1 & (2) \end{cases}$$

Adunăm relațiile: $(1) + (2) \Rightarrow (a+b) \cdot x + (a-b) \cdot y + (a-b) \cdot x - (a+b) \cdot y = 2 \Rightarrow$

$$x \cdot [(a+b) + (a-b)] + y \cdot [(a-b) - (a+b)] = 2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot y = 2 \mid : 2 \Rightarrow a \cdot x - b \cdot y = 1 \quad (*)$$

Scădem relațiile: $(1) - (2) \Rightarrow (a+b) \cdot x + (a-b) \cdot y - (a-b) \cdot x + (a+b) \cdot y = 0 \Rightarrow$

$$x \cdot [(a+b) - (a-b)] + y \cdot [(a-b) + (a+b)] = 0 \Rightarrow 2 \cdot b \cdot x + 2 \cdot a \cdot y = 0 \mid : 2 \Rightarrow b \cdot x + a \cdot y = 0 \quad (**)$$

Formăm sistem cu relațiile (*) și (**):

$$\begin{cases} a \cdot x - b \cdot y = 1 \mid \cdot a \\ b \cdot x + a \cdot y = 0 \mid \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \cdot x - a \cdot b \cdot y = a \\ b^2 \cdot x + a \cdot b \cdot y = 0 \end{cases} \xrightarrow{(+)} x \cdot (a^2 + b^2) = a \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} a \cdot x - b \cdot y = 1 \mid \cdot b \\ b \cdot x + a \cdot y = 0 \mid \cdot (-a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b \cdot x - b^2 \cdot y = b \\ -a \cdot b \cdot x - a^2 \cdot y = 0 \end{cases} \xrightarrow{(+)} y \cdot (-a^2 - b^2) = b \Rightarrow y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$