Motto:

"Dacă ecuaţiile sunt trenuri care traversează peisajul numerelor, atunci niciun tren nu opreşte la pi. "

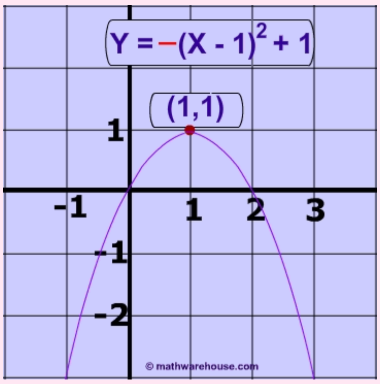
Richard Preston

$m_h < mg < m_a < m_p$

PARTEA a IV-a

EXTINDERI

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$



$ax^2 + bx + c = 0$

$a, b, c \in R,\ a \neq 0$

Din cuprins:

IV.1. ECUAŢIA DE GRADUL AL DOILEA
IV.2. REZOLVAREA TRIGONOMETRICĂ A UNUI TRIUNGHI
IV.3. INEGALITĂŢI

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

IV.1. ECUAŢIA DE GRADUL AL DOILEA

Forma generală a ecuaţiei de gradul II: $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in R,\ a \neq 0$
Numerele a, b, c se numesc ***coeficienţii ecuaţiei***.
Natura soluţiilor ecuaţiei depinde de **discriminantul** Δ a acesteia: $\Delta = b^2 - 4ac$

Cazuri posibile:

1. $\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuaţia are două soluţii reale distincte: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

2. $\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuaţia are două soluţii reale egale (soluţie dublă): $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$;

3. $\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii reale.

Exemple: Rezolvaţi ecuaţiile în R:

a) $x \cdot (x + 20) = 1500 \Rightarrow x^2 + 20x - 1500 = 0 \Rightarrow$ coeficienţii ecuaţiei sunt: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 20 \\ c = -1500 \end{cases} \Rightarrow$

$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1500) = 400 + 6000 = 6400 = 80^2 > 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20 + \sqrt{80^2}}{2} = \dfrac{-20 + 80}{2} = \dfrac{60}{2} = 30 = x_1 \\ \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20 - \sqrt{80^2}}{2} = \dfrac{-20 - 80}{2} = \dfrac{-100}{2} = -50 = x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

2 soluţii reale distincte

b) $x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow$ coeficienţii ecuaţiei sunt: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \Rightarrow \\ c = 25 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 25 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{10}{2} = 5 \Rightarrow x_1 = x_2 = 5 \Rightarrow$ 2 soluţii reale egale

c) $2x^2 + 10x + 30 = 0 \Rightarrow$ coeficienţii ecuaţiei sunt: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 10 \Rightarrow \\ c = 30 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 240 = -140 < 0 \Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii reale

Exemple de ecuaţii de gradul II în care apare şi un parametru

a) Determinaţi valorile reale ale lui m, pentru care ecuaţia $(m-1)x^2 + 2(m-1)x + m + 1 = 0$ are soluţii reale.

$(m-1)x^2 + 2(m-1)x + m + 1 = 0 \Rightarrow$ coeficienţii ecuaţiei sunt: $\begin{cases} a = m - 1 \\ b = 2(m-1) \Rightarrow \\ c = m + 1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = [2\cdot(m-1)]^2 - 4\cdot(m-1)\cdot(m+1) = 4\cdot\left(m^2-2m+1\right) - 4\cdot\left(m^2-1\right)$

$\Delta = 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 4 \Rightarrow \Delta = -8m + 8$

Ecuaţia are soluţii reale pentru $\Delta \ge 0 \Rightarrow -8m+8 \ge 0 \Rightarrow -8m \ge -8 \Rightarrow m \le 1 \Rightarrow m \in (-\infty;1]$

Dar, din forma generală a ecuaţiei de gradul II, coeficientul lui *a* trebuie să fie diferit de 0, deci $m-1 \ne 0 \Rightarrow$ soluţia problemei este: $m \in (-\infty;1)$, valori pentru care ecuaţia dată are două rădăcini reale, distincte.

b) Se consideră ecuaţia $mx^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0,\ m \in R^*$

- Rezolvaţi ecuaţia pentru m = 2.

- pentru m = 2, ecuaţia devine: $2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-3\pm1}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

- Aflaţi valoarea lui m pentru care x = 3 este soluţie a ecuaţiei.

- dacă x = 3 este soluţie a ecuaţiei, atunci verifică ecuaţia $mx^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$, deci:

$9m + 3(2m-1) + m - 1 = 0 \Rightarrow 9m + 6m - 3 + m - 1 = 0 \Rightarrow 16m = 4 \Rightarrow m = \dfrac{1}{4}$

- Arătaţi că ecuaţia are o soluţie număr întreg , $\forall m \in R^*$.

Rezolv ecuaţia dată: $mx^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0,\ m \in R^*$

coeficienţii ecuaţiei sunt: $\begin{cases} a = m \\ b = 2m-1 \Rightarrow \\ c = m-1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2m-1)^2 - 4\cdot m\cdot(m-1) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4m = 1 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-(2m-1)\pm1}{2m} = \begin{cases} \dfrac{-(2m-1)+1}{2m} = \dfrac{-2m-1+1}{2m} = \dfrac{-2m}{2m} = -1 \in Z \\ \dfrac{-(2m-1)-1}{2m} = \dfrac{-2m-2}{2m} = \dfrac{-m-1}{m} \end{cases}$$

Observaţii:

- Dacă $\Delta \ge 0$, expresia $E(x) = ax^2 + bx + c$ se poate descompune în factori astfel:

$E(x) = ax^2 + bx + c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, în care x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in R,\ a \ne 0$; pentru $\Delta < 0$ nu are loc o astfel de descompunere.

Ajută aceste descompuneri la exerciţiile cu simplificări!

Exemplu: Ecuaţia $x^2 + 20x - 1500 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 30$, $x_2 = -50$ se poate descompune în factori astfel: $x^2 + 20x - 1500 = (x-30)\cdot(x+50) = 0$

Exemplu: Simplificaţi expresia: $E(x) = \dfrac{x^2 + 11x + 30}{x^2 + 12x + 35},\ x \in R \setminus \{-7\}$

$x^2 + 11x + 30 = 0 \Rightarrow \Delta = 121 - 120 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-11\pm1}{2} = \begin{cases} -6 \\ -5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 11x + 30 = (x+5)\cdot(x+6)$

$x^2 + 12x + 35 \Rightarrow \Delta = 144 - 140 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-12\pm2}{2} = \begin{cases} -7 \\ -5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 12x + 35 = (x+5)\cdot(x+7)$

$$E(x) = \frac{x^2 + 11x + 30}{x^2 + 12x + 35} = \frac{(x+5)\cdot(x+6)}{(x+5)\cdot(x+7)} = \frac{x+6}{x+5}$$

- Dacă cunoaştem rădăcinile unei ecuaţii de gradul II, putem scrie ecuaţia astfel:

$x^2 - Sx + P = 0$, unde $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Exemplu: Ştiind că $x_1 = 4$, $x_2 = -5$, scrieţi ecuaţia din care provin rădăcinile.

$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -1 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -20 \end{cases} \Rightarrow$ ecuaţia din care provin rădăcinile este: $x^2 + x - 20 = 0$

Proba: $\Delta = 1 + 80 = 81 = 9^2 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 9}{2} = \begin{cases} -5 \\ 4 \end{cases}$

Exemplu: Care este suma şi produsul rădăcinilor ecuaţiei $x^2 - 5x + 9 = 0$

$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 5 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = 9 \end{cases}$

Semnul funcţiei de gradul II

$f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$

- se foloseşte semnul funcţiei de gradul II, în general, la rezolvarea inecuaţiilor, la module, etc.

I. pentru $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		semn a	0	semn contrar lui a	0	semn a	

II. pentru $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
f(x)		semn a	0	semn a	

III. pentru $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		semn a	

Exemple: Calculaţi valorile lui $x \in R$ pentru care are loc:

- $x^2 - 4x + 3 > 0$

Rezolv ecuaţia de gradul II: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Suntem în cazul I pentru $\Delta > 0$

x	$-\infty$		**1**		**3**		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+ + + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +	

Răspuns: $x^2 - 4x + 3 > 0$ pentru $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

- $x^2+2x+1>0 \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow x_1=x_2=-1$

Suntem în cazul II pentru $\Delta=0$

x	$-\infty$ **-1** $+\infty$
x^2-4x+3	+ + + + + + + + + + + 0 + + + + + + + + + + +

Răspuns: $x \in R$

- Pentru orice ecuaţie de gradul II cu $\Delta<0$ (cazul III), semnul funcţiei este cel al coeficientului a peste tot, deci de exemplu, pentru $x^2+x+1>0, \forall x \in R, a>0$, dar de exemplu inecuaţia $x^2+x+1<0$ nu are soluţii, deoarece funcţia este pozitivă pe tot R.

x	$-\infty$ $+\infty$
x^2+x+1	+ +

- $(2x^2+1)\cdot(5-|2x+1|)>0$

$|2x+1|=\begin{cases}2x+1, & 2x+1\geq 0\\ -2x-1, & 2x+1<0\end{cases}$ şi $2x^2+1>0, \forall x \in R$, deoarece $\Delta<0, a>0$

$$5-|2x+1|=\begin{cases}5-2x-1, & \text{pt.} x\geq -\frac{1}{2}\\ 5+2x+1, & \text{pt } x<-\frac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}4-2x, & \text{pt.} x\geq -\frac{1}{2}\\ 6+2x, & \text{pt } x<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

I. pt.$x\geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$:

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$2x^2+1$	+ +
$4-2x$	+ + + + + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - - -
$(2x^2+1)\cdot(4-2x)$	+ + + + + + + + + + + 0- - - - - - - - - - - - - - - -

Din tabel avem: $(2x^2+1)\cdot(4-2x)>0$ pentru $x\in(-\infty;2)$, dar $S_1=(-\infty;2)\cap\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)=\left[-\frac{1}{2};2\right)$

II. pt.$x<-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$:

x	$-\infty$ -3 $+\infty$
$2x^2+1$	+ +
$6+2x$	- - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + +
$(2x^2+1)\cdot(6+2x)$	- - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + +

Din tabel avem: $(2x^2+1)\cdot(6+2x)>0$ pentru $x\in(-3;+\infty)$, dar

$$S_1=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cap(-3;+\infty)=\left(-3;-\frac{1}{2}\right)$$

$$S_f=S_1\cup S_2=\left[-\frac{1}{2};2\right)\cup\left(-3;-\frac{1}{2}\right)=(-3;2)$$

Am reamintit în calcul semnul funcţiei de gradul I:

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
ax+b	semn contrar a	0	semn a

- $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}>0$

Cum $x^2+x+1=0$ are $\Delta=-3<0$ şi semnul lui a peste $R \Rightarrow x^2+x+1>0 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x>-2$
Soluţia: $x\in(-2;+\infty)$

- $E(x)=\dfrac{x^2+11x+30}{x^2+12x+35}>0$; am calculat anterior rădăcinile ecuaţiilor.

x	$-\infty$	**-7**	**-6**		**-5**	$+\infty$
$x^2+11x+30$	+ + + + + + + + + +		0	- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +
$x^2+12x+35$	+ + + + + + + +	0		- - - - - - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +
$\dfrac{x^2+11x+30}{x^2+12x+35}$	++ + + + + + + +	/	- 0	++ + + + + + + +	/	++ + + + + + + +

$S=(-\infty;-7)\cup(-6;-5)\cup(-5;+\infty)$

- Se consideră $f:R\to R,\ f(x)=mx^2+2(m-1)+m-1$. Să se determine valorile lui $m\in R^*$, astfel încât $f(x)>0,\ \forall x\in R$.

Rezolvarea se bazează pe faptul că funcţia de gradul II păstrează semnul constant şi anume semnul lui a pentru $\Delta<0$. Se impun, deci, condiţiile:

$$\begin{cases}\Delta<0\\ m>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta=4(m-1)^2-4m(m-1)=1-m<0\\ m>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>1\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m>1\Rightarrow m\in(1;+\infty)$$

Graficul funcţiei de gradul II

Graficul funcţiei de gradul al doilea se numeşte ***parabolă.***

Prin graficul $f:R\to R,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ înţelegem reprezentarea geometrică a mulţimii $G_f=\{(x,y)\mid y=ax^2+bx+c,\ x\in R\}$

Graficul funcţiei de gradul II este caracterizat de un vârf de coordonate $V\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Prin urmare, pentru a reprezenta graficul unei funcţii de gradul II urmăm paşii:

1. Intersecţia graficului cu axele de coordonate:

$$G_f\cap Ox\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ f(x)=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ ax^2+bx+c=0\end{cases}$$

Se rezolvă ecuaţia de gradul II: $ax^2+bx+c=0$ cu cazurile amintite anterior:

- Dacă $\Delta>0\Rightarrow x_1,x_2\in R,\ x_1\neq x_2\Rightarrow$ că parabola taie axa Ox în 2 puncte de coordonate: $(x_1;0)$ şi $(x_2;0)$
- Dacă $\Delta=0\Rightarrow x_1,x_2\in R,\ x_1=x_2\Rightarrow$ că parabola taie axa Ox într-un singur punct de coordonate: $\left(-\dfrac{b}{2a};0\right)$;
- Dacă $\Delta<0\Rightarrow x_1,x_2\notin R\Rightarrow$ graficul nu intersectează axa Ox.

$$G_f \cap Oy \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(0) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases} \Rightarrow (0;c)$$

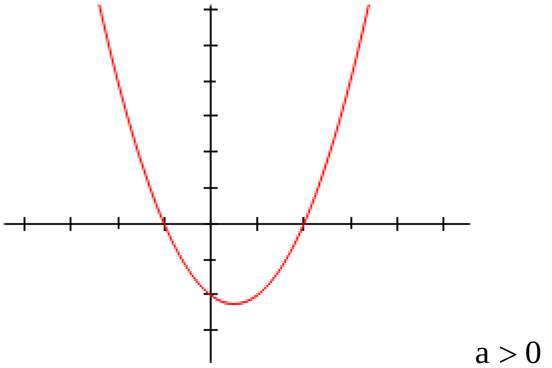
2. Calcularea coordonatelor vârfului parabolei, care poate fi punct de maxim sau de minim.

$$V(x_V;u_V) = V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

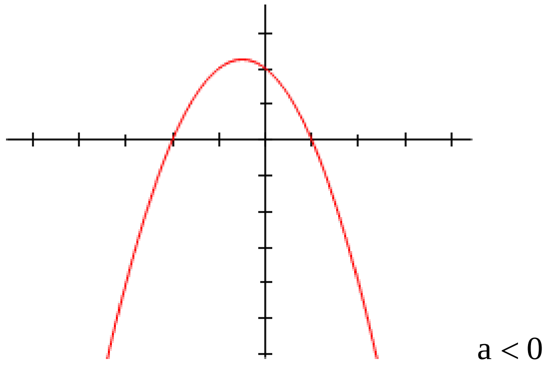
3. Determinarea şi altor puncte de pe grafic prin luarea unor valori din domeniul de definiţie şi calculul valorii funcţiei în aceste puncte considerate.

4. Trasarea tabelului de variaţie şi a graficului.

Observaţii: - dacă $a > 0$, parabola are deschiderea în sus (*figura IV.1.a*).
- dacă $a < 0$, parabola are deschiderea în jos (*figura IV.1.b*).



a)



b)

Figura IV.1. Alura grafică a funcţiei de gradul II

Exemplu:

- $f(x) = x^2 - 5x + 4$

$a > 0 \Rightarrow$ parabola are deschiderea în sus.

$$G_f \cap Ox \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \Delta = 9 > 0 \Rightarrow x_{1,2} \in \{1;4\} \end{cases} \Rightarrow A(1;0)\ ,\ B(4;0)$$

$$G_f \cap Oy \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(0) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(0;4)$$

$$V(x_V;u_V) = V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) = V\left(\frac{5}{2};-\frac{9}{4}\right)$$

Avem puncte suficiente, dar mai putem lua o valoare pentru a trasa o alură grafică mai exactă.
- pentru $x = 5 \Rightarrow f(x) = y = 4 \Rightarrow D(5;4)$

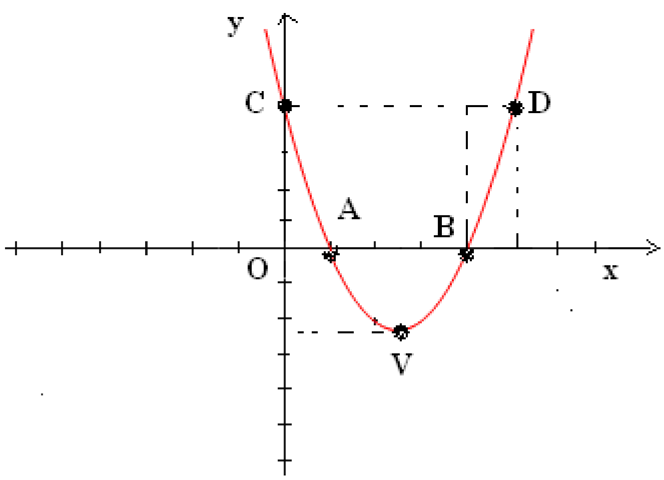


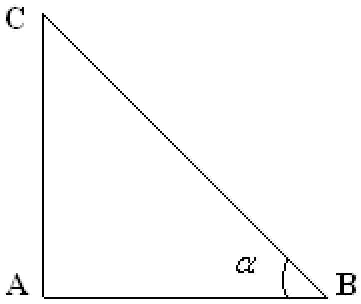
Figura IV.2. Graficul funcţiei de gradul II analizate

IV.2. REZOLVAREA TRIGONOMETRICĂ A UNUI TRIUNGHI

A rezolva un triunghi înseamnă a-i calcula lungimile laturilor, măsurile unghiurilor (sau valoarea unei funcţii trigonometrice) şi aria $\mathcal{S}$ sau $\mathcal{A}$ (*ABC*).

Teorema lui Pitagora sub formă trigonometrică

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$



Demonstraţie:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{AC}{BC}\\ \cos\alpha=\dfrac{AB}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2\Rightarrow$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}\overset{T.P.}{=}\frac{BC^2}{BC^2}=1$$

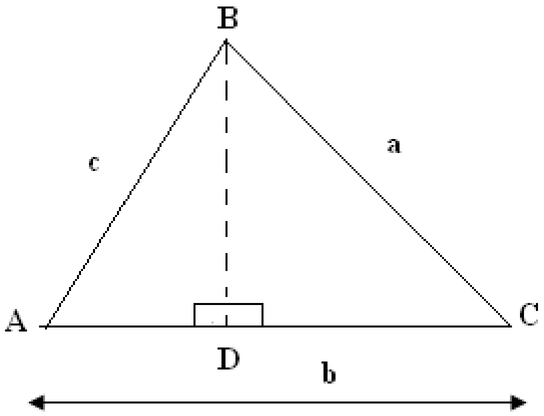
Teorema cosinusului

În ΔABC cu laturile de lungimi a, b, c are loc relaţia:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A}$$

Demonstraţie: *Cazuri posibile:*

I. A – D - C



Fie D piciorul înălţimii din B.

$$\Delta ADB-dr.\Rightarrow\begin{cases}\sin A=\dfrac{BD}{c}\\ \cos A=\dfrac{AD}{c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}BD=c\cdot\sin A\\ AD=c\cdot\cos A\end{cases}$$

$$CD=AC-AD=b-c\cdot\cos A$$

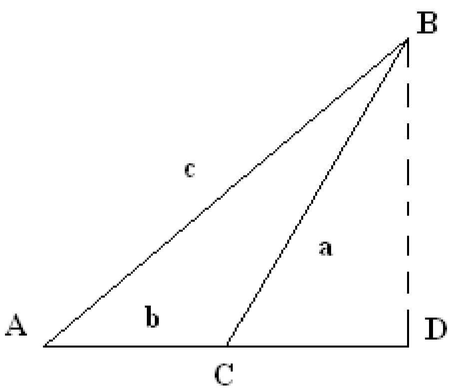
$$\Delta BDC-dr\overset{TP}{\Rightarrow}a^2=(c\cdot\sin A)^2+(b-c\cdot\cos A)^2$$

$$a^2=c^2\sin^2A+b^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A+c^2\cos^2A$$

$$a^2=b^2+c^2\left(\sin^2A+\cos^2A\right)-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$$

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$$

II. A – C - D



$$\Delta ADB-dr.\Rightarrow\begin{cases}\sin A=\dfrac{BD}{c}\\ \cos A=\dfrac{AD}{c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}BD=c\cdot\sin A\\ AD=c\cdot\cos A\end{cases}$$

$$CD=AD-AC=c\cdot\cos A-b$$

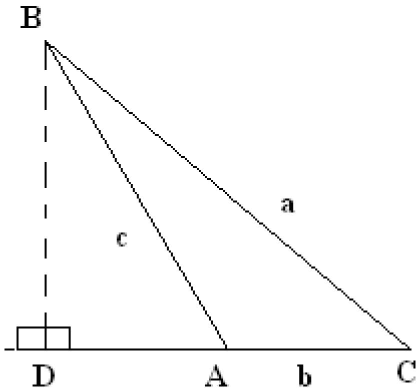
$$\Delta BDC-dr\overset{TP}{\Rightarrow}a^2=(c\cdot\cos A-b)^2+(c\cdot\sin A)^2$$

$$a^2=c^2\cos^2A+b^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A+c^2\sin^2A$$

$$a^2=b^2+c^2\left(\sin^2A+\cos^2A\right)-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$$

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$$

III. D - A – C



$$\Delta ADB - dr. \Rightarrow \begin{cases} \sin(180^\circ - A) = \dfrac{BD}{c} \\ \cos(180^\circ - A) = \dfrac{AD}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = c \cdot \sin(180^\circ - A) \\ AD = c \cdot \cos(180^\circ - A) \end{cases}$$

$$DC = AD + b = c \cdot \cos(180^\circ - A) + b$$

$$\Delta BDC - dr \overset{TP}{\Rightarrow}$$

$$a^2 = [c \cdot \sin(180^\circ - A)]^2 + [c \cdot \cos(180^\circ - A) + b]^2$$

$$a^2 = c^2 \sin^2(180^\circ - A) + b^2 + 2bc \cdot \cos(180^\circ - A) + c^2 \cos^2(180^\circ - A)$$

$$a^2 = b^2 + c^2[\sin^2(180^\circ - A) + \cos^2(180^\circ - A)] - 2bc \cdot \cos(180^\circ - A)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(180^\circ - A)$$

1. Demonstrează prin calcul că într-un paralelipiped dreptunghic cu cele 3 diagonale ale fețelor care pornesc din acelaşi vârf al paralelogramului se poate forma un triunghi ascuţitunghic.

Rezolvare: *Construim desenul din figura IV.3.*

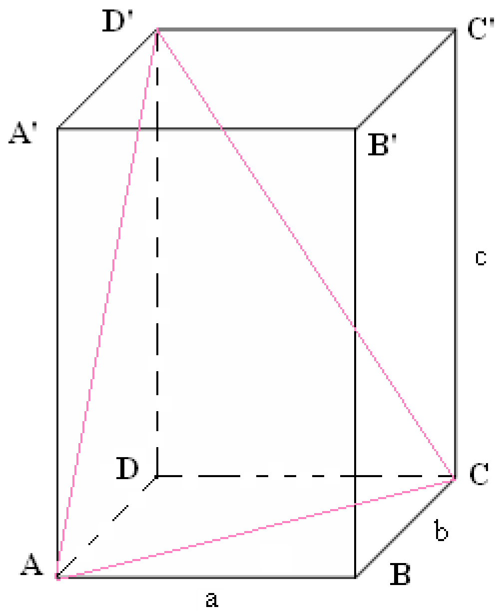


Figura IV.3. Desenul problemei 1 (IV.2)

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABC, CC'D', ADD' obţinem:

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad D'C = \sqrt{a^2 + c^2} \quad ; \quad AD' = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Arătăm că suma pătratelor a două laturi e mai mare decât celei de-a treia.

$$\begin{cases} \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{a^2 + c^2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + c^2 \geq b^2 + c^2 \Rightarrow 2a^2 \geq 0 \quad \text{"A"} \\ \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a^2 + c^2}\right)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + c^2 \Rightarrow 2b^2 \geq 0 \quad \text{"A"} \Rightarrow \\ \left(\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\sqrt{a^2 + c^2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 \Rightarrow b^2 + c^2 + a^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow 2c^2 \geq 0 \quad \text{"A"} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ că există $\Delta AD'C$.

Aplicăm teorema cosinusului în $\Delta AD'C$ pentru a demonstra că triunghiul este ascuţitunghic:

$$\begin{cases} AC^2 = AD'^2 + D'C^2 - 2\cdot AD'\cdot D'C\cdot \cos\left(\widehat{AD'C}\right) \\ CD'^2 = AD'^2 + AC^2 - 2\cdot AD'\cdot AC\cdot \cos\left(\widehat{D'AC}\right) \\ AD'^2 = AC^2 + D'C^2 - 2\cdot AC\cdot D'C\cdot \cos\left(\widehat{ACD'}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = b^2+c^2+a^2+c^2-2\cdot\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\cdot\left(a^2+c^2\right)}\cdot\cos\left(\widehat{AD'C}\right) \\ a^2+c^2 = b^2+c^2+a^2+b^2-2\cdot\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)}\cdot\cos\left(\widehat{D'AC}\right) \\ b^2+c^2 = a^2+b^2+a^2+c^2-2\cdot\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)}\cdot\cos\left(\widehat{ACD'}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

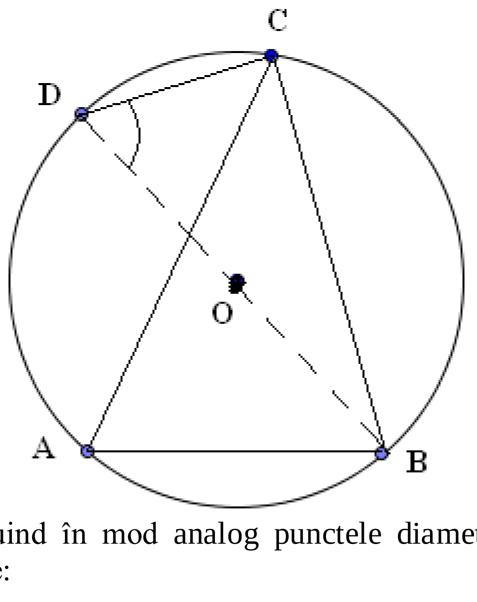
$$\begin{cases} \cos\left(\widehat{AD'C}\right) = \dfrac{c^2}{\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\cdot\left(a^2+c^2\right)}} > 0 \\ \cos\left(\widehat{D'AC}\right) = \dfrac{b^2}{\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)}} > 0 \\ \cos\left(\widehat{ACD'}\right) = \dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2+c^2\right)}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\left(\widehat{AD'C}\right) < 90^\circ \\ m\left(\widehat{D'AC}\right) < 90^\circ \\ m\left(\widehat{ACD'}\right) < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta AD'C \text{ - ascuţitunghic}$$

Teorema sinusului

În ΔABC cu laturile de lungimi a, b, c are loc relaţia:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

Demonstraţie:



Avem ΔABC înscris în cercul $\mathcal{C}(O,R)$.

D şi B diametral opuse $\Rightarrow \Delta BCD$

$BD = 2R$

$$\sin\left(\widehat{BDC}\right) = \frac{BC}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{BC}{\sin\left(\widehat{BDC}\right)}$$

$\widehat{CDB} \equiv \widehat{CAB}$ (unghiuri înscrise) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2R = \frac{BC}{\sin A} \quad (*)$$

Construind în mod analog punctele diametral opuse ale unghiurilor A, respectiv C vor rezulta relaţiile:

$\Rightarrow 2R = \frac{AC}{\sin B}$ (**), respectiv $2R = \frac{AB}{\sin C}$ (***)

$\overset{(*),(**),(***)}{\Rightarrow} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, unde R – raza cercului circumscris triunghiului.

Observaţie: O relaţie des folosită în calculul ariei unui triunghi este: $S_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$

2. În *figura IV.4* să se arate că are loc relaţia:
$A_1C \cdot B_1D \cdot C_1E \cdot D_1A \cdot E_1B = A_1D \cdot B_1E \cdot C_1A \cdot D_1B \cdot E_1C$.

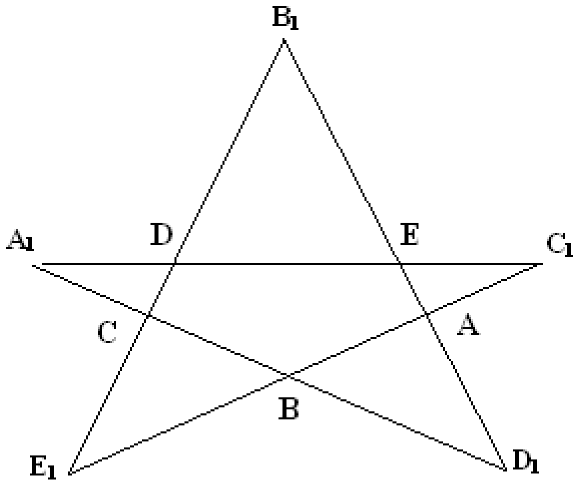


Figura IV.4. Desenul problemei 2 (IV.2)

Rezolvare: Aplicăm teorema sinusului pentru:

$\Delta A_1DC: \frac{A_1D}{\sin C} = \frac{A_1C}{\sin D} \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1D} = \frac{\sin D}{\sin C}$

$\Delta B_1DE: \frac{B_1D}{\sin E} = \frac{B_1E}{\sin D} \Rightarrow \frac{B_1D}{B_1E} = \frac{\sin E}{\sin D}$

$\Delta C_1EA: \frac{C_1E}{\sin A} = \frac{C_1A}{\sin E} \Rightarrow \frac{C_1E}{C_1A} = \frac{\sin A}{\sin E}$

$\Delta D_1AB: \frac{D_1A}{\sin B} = \frac{D_1B}{\sin A} \Rightarrow \frac{D_1A}{D_1B} = \frac{\sin B}{\sin A}$

$\Delta E_1BC: \frac{E_1B}{\sin C} = \frac{E_1C}{\sin B} \Rightarrow \frac{E_1B}{E_1C} = \frac{\sin C}{\sin B}$

Înmulţim cele 5 relaţii şi rezultă:

$\frac{A_1C}{A_1D} \cdot \frac{B_1D}{B_1E} \cdot \frac{C_1E}{C_1A} \cdot \frac{D_1A}{D_1B} \cdot \frac{E_1B}{E_1C} = \frac{\sin D}{\sin C} \cdot \frac{\sin E}{\sin D} \cdot \frac{\sin A}{\sin E} \cdot \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}$

$\frac{A_1C}{A_1D} \cdot \frac{B_1D}{B_1E} \cdot \frac{C_1E}{C_1A} \cdot \frac{D_1A}{D_1B} \cdot \frac{E_1B}{E_1C} = 1 \Rightarrow$

$A_1C \cdot B_1D \cdot C_1E \cdot D_1A \cdot E_1B = A_1D \cdot B_1E \cdot C_1A \cdot D_1B \cdot E_1C$

3. Să se arate că într-un triunghi ascuţitunghic are loc relaţia
$\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$, în care a,b,c sunt laturile, respectiv S, aria triunghiului.

Rezolvare: Vom folosi formulele pentru arie: $S=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}=\frac{a\cdot c\cdot \sin B}{2}$

$$\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=\sqrt{a^2b^2-4\cdot\left(\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}\right)^2}+\sqrt{a^2c^2-4\cdot\left(\frac{a\cdot c\cdot \sin B}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2b^2-4\cdot\frac{a^2\cdot b^2\cdot \sin^2 C}{4}}+\sqrt{a^2c^2-4\cdot\frac{a^2\cdot c^2\cdot \sin^2 B}{4}}=$$

$$=\sqrt{a^2b^2-a^2\cdot b^2\cdot \sin^2 C}+\sqrt{a^2c^2-a^2\cdot c^2\cdot \sin^2 B}=\sqrt{a^2b^2\cdot\left(1-\sin^2 C\right)}+\sqrt{a^2c^2\cdot\left(1-\sin^2 B\right)}$$

şi, aplicând teorema fundamentală a trigonometriei şi apoi teorema cosinusului, rezultă

$$\sqrt{a^2b^2\cdot \cos^2 C}+\sqrt{a^2c^2\cdot \cos^2 B}=ab\cdot \cos C+ac\cdot \cos B=ab\cdot\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}+ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=$$

$$=\frac{b^2+a^2-c^2}{2}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2}=\frac{2a^2}{2}=a^2$$

Deci, $\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$.

Formula lui Heron

$$S_\Delta=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

Demonstraţie:

$$A_\Delta=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}$$

Teorema cosinusului: $a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot \cos A\Rightarrow \cos A=\frac{a^2-b^2-c^2}{2\cdot b\cdot c}$

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1\Rightarrow \sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2\cdot b\cdot c}\right)^2=\frac{4b^2c^2-\left(a^2-b^2-c\right)^2}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2 A=\frac{\left[2bc-\left(a^2-b^2-c\right)\right]\cdot\left[2bc+\left(a^2-b^2-c\right)\right]}{4b^2c^2}=\frac{\left[(b+c)^2-a^2\right]\cdot\left[a^2-(b-c)^2\right]}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2 A=\frac{(b+c-a)\cdot(b+c+a)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2 A=\frac{(a+b+c-2a)\cdot(b+c+a)\cdot(a+b+c-2b)\cdot(a+b+c-2c)}{4b^2c^2}$$

Din $p=\frac{a+b+c}{2}\Rightarrow a+b+c=2p\Rightarrow$

$$\sin^2 A=\frac{(2p-2a)\cdot 2p\cdot(2p-2b)\cdot(2p-2c)}{4b^2c^2}=\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2 A=\frac{16\cdot p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{4b^2c^2}=\frac{4\cdot p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{b^2c^2}\Rightarrow$$

$$\sin A=\sqrt{\frac{4\cdot p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{b^2c^2}}=\frac{2}{b\cdot c}\cdot\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$
$$S_\Delta=\frac{b\cdot c\cdot\sin A}{2}=\frac{b\cdot c}{2}\cdot\frac{2}{b\cdot c}\cdot\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\Rightarrow$$
$$S_\Delta=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

4. Să se arate că: $ab+ac+bc=r^2+p^2+4rR$.

Rezolvare: Reamintim şi vom folosi în calcule formulele cunoscute:

- $R=\frac{abc}{4S}=$ raza cercului circumscris triunghiului cu laturile a, b, c şi aria S
- $r=\frac{S}{p}=$ raza cercului înscris

Folosind formula lui Heron vom avea:

$$pr^2=p\cdot\frac{S^2}{p^2}=\frac{S^2}{p}=\frac{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{p}=(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)=$$
$$=(p-a)\cdot\left(p^2-pc-pb+bc\right)=p^3-p^2c-p^2b+pbc-p^2a+pac+pab-abc=$$
$$=p^3-p^2\cdot(a+b+c)+p\cdot(ab+bc+ac)-abc$$
$$pr^2=p^3-p^2\cdot(a+b+c)+p\cdot(ab+bc+ac)-abc\Leftrightarrow$$
$$pr^2=p^3-p^2\cdot(a+b+c)+p\cdot(ab+bc+ac)-4RS\Leftrightarrow$$
$$pr^2=p^3-p^2\cdot(a+b+c)+p\cdot(ab+bc+ac)-4rpR\ |:p\Leftrightarrow$$
$$r^2=p^2-p\cdot(a+b+c)+(ab+bc+ac)-4rR\Leftrightarrow$$
$$r^2=p^2-p\cdot 2p+(ab+bc+ac)-4rR\Leftrightarrow r^2=-p^2+(ab+bc+ac)-4rR$$

de unde rezultă $ab+ac+bc=r^2+p^2+4rR$

5. Fie paralelogramul ABCD, cu laturile de lungime a şi b, iar diagonalele de lungime m şi n. Demonstraţi că $a^4+b^4=m^2n^2$,dacă şi numai dacă unghiul ascuţit al paralelogramului este de 45°

Rezolvare: Construim desenul din *figura IV.5, cu unghiul* δ ascuţit.

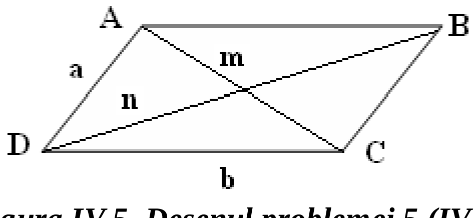


Figura IV.5. Desenul problemei 5 (IV.2)

Aplicând teorema cosinusului obţinem: $m^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\delta$, respectiv $n^2=a^2+b^2+2ab\cdot\cos\delta$. Înmulţind cele două relaţii obţinem:

$$m^2\cdot n^2=\left(a^2+b^2-2ab\cdot\cos\delta\right)\cdot\left(a^2+b^2+2ab\cdot\cos\delta\right)$$
$$m^2\cdot n^2=\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2\cos^2\delta\Rightarrow m^2\cdot n^2=a^4+b^4+2a^2b^2-4a^2b^2\cos^2\delta\Rightarrow$$
$$m^2\cdot n^2=a^4+b^4+2a^2b^2\left(1-2\cos^2\delta\right)\Rightarrow m^2\cdot n^2=a^4+b^4\Leftrightarrow 1-2\cos^2\delta=0\Leftrightarrow\cos^2\delta=\frac{1}{2}$$

adică $\delta=45^\circ$

IV.3. INEGALITĂŢI

În acest paragraf vom prezenta câteva inegalităţi cunoscute, precum şi rezolvarea unor inegalităţi.

- **Inegalitatea mediilor:**

media pătratică ≥ media aritmetică ≥ media geometrică ≥ media armonică

$$\boxed{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \ , \ \forall a,b>0}$$

cu egalitate pentru a = b.

Generalizare:

$$\boxed{\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \ , \ \forall a_1,a_2,...,a_n>0}$$

cu egalitate pentru $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

- **Inegalitatea lui Cauchy - Buniakowski - Schwarz:**

$$\boxed{(xa+yb)^2 \leq (x^2+y^2)\cdot(a^2+b^2) \ , \ \forall x,y,a,b \in R}$$

Generalizare:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+...+a_n\cdot b_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \ , \\ \forall a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n \in R\end{array}}$$

- **Inegalitatea lui Minkowski:**

$$\boxed{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2} \ , \ \forall x,y,a,b \in R}$$

Generalizare:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+...+(a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2} \\ \forall a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n \in R\end{array}}$$

- **Inegalitatea lui Titu Andreescu:**

$$\boxed{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \ , \forall a,b \in R \ , \ x,y>0}$$

Generalizare:

$$\boxed{\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n} \ , \ \forall a_i \in R, x_i>0, \ i=1,2,...,n, \ n \geq 2}$$

- **Inegalitatea lui Cebîşev**

Pentru oricare şiruri de numere reale a_1, a_2 şi b_1, b_2 :

I. Dacă şirurile sunt la fel ordonate: $a_1 \geq a_2$, $b_1 \geq b_2 \geq$ sau $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$, atunci:

$$2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) \geq (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)$$

II. Dacă şirurile sunt invers ordonate: $a_1 \leq a_2, b_1 \geq b_2$ sau $a_1 \geq a_2, b_1 \leq b_2$, atunci:

$$2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) \leq (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)$$

Generalizare:

Pentru oricare şiruri de numere reale $a_1, a_2, ..., a_n$ şi $b_1, b_2, ..., b_n$:

I. Dacă şirurile sunt la fel ordonate:
$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n, b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ sau $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$, atunci:

$$n \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

II. Dacă şirurile sunt invers ordonate:
$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n, b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ sau $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n, b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$, atunci:

$$n \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n) \leq (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

Exerciţii:

1. Dacă x,y,z sunt numere reale pozitive, să se arate că: $(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x) \geq 8xyz$.

Rezolvare: Aplicăm media aritmetică $\geq$ media geometrică de trei ori:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \\ \dfrac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \\ \dfrac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz} \end{cases} \overset{\cdot}{\Rightarrow} \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{xz} \Rightarrow (x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x) \geq 8\sqrt{(xyz)^2} \Rightarrow$$

$$(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x) \geq 8xyz$$

2. Dacă x,y,z sunt numere reale, să se arate că: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Rezolvare:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \,|\cdot 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow$$

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \ , \ \forall x, y, z \in R$$

3. Demonstraţi inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$, pentru x,y,z$\in R$.

Rezolvare: Aplicăm media aritmetică $\geq$ media geometrică:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + (y^2 + z^2)}{2} \geq x\sqrt{y^2 + z^2} \\ \dfrac{y^2 + (x^2 + z^2)}{2} \geq y\sqrt{x^2 + z^2} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)}{2} \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$$

4. Arătaţi că, dacă $x+y+z=1,\ x,y,z\in R_+$, atunci: $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}<5$.

Rezolvare:

Metoda 1: inegalitatea mediilor

$$\begin{cases}\sqrt{(4x+1)\cdot 1}<\dfrac{4x+1+1}{2}=2x+1\\ \sqrt{(4y+1)\cdot 1}<\dfrac{4y+1+1}{2}=2y+1\\ \sqrt{(4z+1)\cdot 1}<\dfrac{4z+1+1}{2}=2z+1\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}<2\cdot(x+y+z)+3\Rightarrow$$

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}<5$$

Metoda 2: Inegalitatea lui Cauchy - Buniakowski - Schwarz:

Pentru $(a_1,a_2,a_3)=\left(\sqrt{4x+1},\sqrt{4y+1},\sqrt{4z+1}\right)$ şi pentru $(b_1,b_2,b_3)=(1,1,1)\Rightarrow$

$$\left(\sqrt{4x+1}\cdot 1+\sqrt{4y+1}\cdot 1+\sqrt{4z+1}\cdot 1\right)^2<\left(\sqrt{4x+1}^2+\sqrt{4y+1}^2+\sqrt{4z+1}^2\right)\cdot\left(1^2+1^2+1^2\right)$$

$$\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}\right)^2<(4x+1+4y+1+4z+1)\cdot 3$$

$$\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}\right)^2<[4(x+y+z)+3]\cdot 3\Rightarrow$$

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}<\sqrt{21}<\sqrt{25}=5$$

5. Pentru $x,y\in R$, arătaţi că: $x^4+y^4+8\ge 8xy$.

Rezolvare: Aplicăm media aritmetică $\ge$ media geometrică:

$$x^4+y^4+8=x^4+y^4+4+4\ge 4\sqrt[4]{x^4\cdot y^4\cdot 4\cdot 4}=8xy$$

6. Dacă a, b, c > 0, arătaţi că: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$.

Rezolvare: Datorită simetriei $a\le b\le c$.

Notăm $S=a+b+c$.

Rezultă că inegalitatea devine: $\dfrac{a}{S-a}+\dfrac{b}{S-b}+\dfrac{c}{S-c}\ge\dfrac{3}{2}$.

Din $a\le b\le c\Rightarrow\dfrac{1}{S-a}\le\dfrac{1}{S-b}\le\dfrac{1}{S-c}$.

Din egalitatea lui Cebîşev rezultă:

$$a\cdot\frac{1}{S-a}+b\cdot\frac{1}{S-b}+c\cdot\frac{1}{S-c}\ge\frac{1}{3}\cdot(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{S-a}+\frac{1}{S-b}+\frac{1}{S-c}\right)\qquad(1)$$

Din inegalitatea mediilor (media armonică $\le$ media aritmetică) rezultă:

$$\frac{3}{\frac{1}{S-a}+\frac{1}{S-b}+\frac{1}{S-c}}\le\frac{S-a+S-b+S-c}{3}=\frac{3S-(a+b+c)}{3}=\frac{2S}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{S-a}+\frac{1}{S-b}+\frac{1}{S-c}\ge\frac{9}{2S}\qquad(2)$$

Înlocuind relaţia (2) în (1) rezultă:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{1}{3}\cdot S\cdot\frac{9}{2S}=\frac{3}{2}$$

Deci, într-adevăr, $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$.

7. Arătaţi că, pentru $\forall a,b,c>0$ are loc inegalitatea: $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{a^2+c^2}{a+c}\geq a+b+c$.

Rezolvare: Ne vom folosi în rezolvare de inegalitatea lui Titu Andreescu:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{c+a}=$$

$$=\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)+\left(\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}\right)\geq\frac{(a+b+c)^2}{2\cdot(a+b+c)}+\frac{(a+b+c)^2}{2\cdot(a+b+c)}=\frac{2\cdot(a+b+c)^2}{2\cdot(a+b+c)}=$$

$$=a+b+c$$

Deci, inegalitatea $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{a^2+c^2}{a+c}\geq a+b+c$ este demonstrată.

8. Arătaţi că, dacă $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1,\ a,b,c>0$, atunci: $abc\geq 8$.

Rezolvare: Notăm:

$$\begin{cases}\frac{1}{1+a}=x\\ \frac{1}{1+b}=y\\ \frac{1}{1+c}=z\end{cases}\Rightarrow x+y+z=1\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1-x}{x}\\ b=\frac{1-y}{y}\\ c=\frac{1-z}{z}\end{cases}\Rightarrow \text{ trebuie să arătăm că } \frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-y}{y}\cdot\frac{1-z}{z}\geq 8$$

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{y}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8\Rightarrow\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{yz}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+1\right)=\frac{1}{xyz}-\frac{1}{xy}-\frac{1}{xz}+\frac{1}{x}-\frac{1}{yz}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1=$$

$$=\frac{1}{xyz}-\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-1 \qquad (1)$$

Din inegalitatea mediilor rezultă:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \qquad (2)$$

$$\frac{\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{(xyz)^2}}\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(xyz)^2}} \qquad (3)$$

Înlocuind relaţiile (2) şi (3) în relaţia (1) rezultă:

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{y}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{1}{xyz}-\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-1\geq\frac{1}{xyz}-\frac{3}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}+\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}-1=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}-1\right)^3$$

Dar, $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow$

$\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{y}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq\left(\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}-1\right)^3=(3-1)^3=8$, adică $\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-y}{y}\cdot\frac{1-z}{z}\geq 8$, deci $abc\geq 8$, adevărat.

9. Pentru orice numere reale nenegative x,y,z arătaţi că are loc relaţia:

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \ge x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$$

Olimpiadă, Rusia 1991

Rezolvare:

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \ge x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)}{3} \ge x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$$

Utilizăm inegalitatea mediilor (media aritmetică $\ge$ media geometrică):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+x^2+y^2+z^2}{4} \ge \sqrt[4]{x^2\cdot x^2\cdot y^2\cdot z^2} = x\sqrt{yz} \\ \dfrac{y^2+y^2+z^2+x^2}{4} \ge \sqrt[4]{y^2\cdot y^2\cdot z^2\cdot x^2} = y\sqrt{zx} \\ \dfrac{z^2+z^2+x^2+y^2}{4} \ge \sqrt[4]{z^2\cdot z^2\cdot x^2\cdot y^2} = z\sqrt{xy} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} x^2+y^2+z^2 \ge x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{xy+xz}{2} \ge x\sqrt{yz} \\ \dfrac{yz+yx}{2} \ge y\sqrt{zx} \\ \dfrac{zx+zy}{2} \ge z\sqrt{xy} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 2(yz+zx+xy) \ge 2\cdot\left(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}\right) \qquad (2)$$

Adunând relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy) \ge 3\cdot\left(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \ge x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$$

10. Pentru a,b,c numere pozitive demonstraţi că

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}.$$

Rezolvare: Observăm că $\left(a^2-b^2\right)\cdot(a-b) \ge 0 \Rightarrow a^3-a^2b-ab^2+b^3 \ge 0 \;\big|+abc \Rightarrow$

$$a^3-a^2b-ab^2+b^3+abc \ge abc \Rightarrow a^3+b^3+abc \ge abc+a^2b+ab^2 \Rightarrow$$

$$a^3+b^3+abc \ge ab\cdot(a+b+c)$$

Procedând în mod similar şi pentru celelalte expresii de la numitor rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^3+b^3+abc} \le \dfrac{1}{ab\cdot(a+b+c)} \\ \dfrac{1}{b^3+c^3+abc} \le \dfrac{1}{bc\cdot(a+b+c)} \\ \dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \le \dfrac{1}{ac\cdot(a+b+c)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^3+b^3+abc} \le \dfrac{c}{abc\cdot(a+b+c)} \\ \dfrac{1}{b^3+c^3+abc} \le \dfrac{a}{abc\cdot(a+b+c)} \\ \dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \le \dfrac{b}{abc\cdot(a+b+c)} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{a+b+c}{abc\cdot(a+b+c)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}$$